

PROVA 1 DE ANÁLISE REAL 2009

PROFESSOR RICARDO SA EARP

RESPONDA VERDADEIRO OU FALSO. CASO VERDADEIRO ESBOCE UMA DEDUÇÃO SUCINTA CORRETA. CASO FALSO, EXIBA UM CONTRAEXEMPLO. JUSTIFIQUE A SUA RESPOSTA

- (1) (a) **(1.5 pt)** Seja X um subconjunto de \mathbb{R}^n e seja $a \in \overline{X}$ um valor aderente a X . Seja $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua limitada. Segue então que existe $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$.
- (b) **(1.5 pt)** Sejam f, g funções contínuas que levam um espaço métrico X na reta real \mathbb{R} . Se $f(a) \neq 0 \neq g(a)$, para certo $a \in X$, segue então que $f(x) \cdot g(x) \neq 0$, numa vizinhança de a .
- (2) Seja A um subconjunto não vazio de \mathbb{R}^n . Definimos:
- $$f(x) := \text{dist}(x, A) = \inf_{y \in A} \|x - y\|, \quad x \in \mathbb{R}^n$$
- que se chama de distância de x ao conjunto A .
- (a) **(1 pt)** Se A e B são fechados e $A \cap B = \emptyset$, então $\text{dist}(A, B) > 0$.
- (b) **(2 pt)** Se A é compacto e B é fechado e $A \cap B = \emptyset$, então $\text{dist}(A, B) > 0$.
- (c) **(1 pt)** Segue que para $t > 0$ o conjunto $V_t(A) = \{x; \text{dist}(x, A) < t\}$ é uma vizinhança de \overline{A} (fecho de A).

Escolha uma dentre as duas questões abaixo

- (3) Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow (0, \infty)$ contínua tal que $f(0) = 1/2$ e $f(x) \rightarrow 1$ quando $\|x\| \rightarrow \infty$.
- (a) **(1.5 pt)** Segue então que f é limitada e assume um máximo global.
- (b) **(1.5 pt)** Segue então que f assume um mínimo local.
- (4) **(3 pt)** Sejam $f, g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ duas funções contínuas, satisfazendo $f(0) = 1$ e $g(0) = 2$. Assuma que $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ e que $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$. Segue então que existe $y > 0$ tal que $f(y) = g(y)$.