PROVA 2 DE ANÁLISE REAL 2009

PROFESSOR RICARDO SA EARP

Justifique corretamente a sua resposta. Escolha 4 dentre as questões (itens) abaixo. Cada um dos 4 itens vale 2.5 pontos.

(1) Se $C_0 + \dfrac{C_1}{2} + \cdots + \dfrac{C_{n-1}}{n} + \dfrac{C_n}{n+1} = 0$, deduza que

$$C_0 + C_1 x + \cdots C_{n-1}x^{n-1} + C_n x^n = 0$$

tem pelo menos uma solução entre 0 e 1.

(2) Seja $\alpha \in \mathbb{R}$ e seja $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ uma função localmente integrável. Deduza que

(a) Se $\lim\limits_{x\to\infty} x^\alpha f(x) = 0$ e se $\alpha > 1$ então $\int\limits_a^\infty f(t)\,\mathrm{d}t$ é absolutamente convergente.

(3) Seja $\alpha > 0$. Seja $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e considere $u : [0, 1] \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definida por

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 \Big(f(s) \sin n\pi s \, \sin n\pi x \ \mathrm{e}^{-\alpha^2\pi^2 n^2 t} \Big) \,\mathrm{d}s$$

(a) Deduza que existe uma função $K(x, s, t)$ definida em $[0, 1]\times [0, 1] \times (0, \infty)$ de classe C^∞ tal que $u(x,t) = \int\limits_0^1 K(x, s, t) f(s)\,\mathrm{d}s$

(b) Deduza que $u(x, t)$ é de classe C^∞.

(4) Assuma que uma sequência de funções diferenciáveis $f_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$ converge pontualmente a uma função $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$. Assuma que a sequência das derivadas $\{f_n'\}$ é uniformemente limitada; $i.e$ $\exists M > 0; |f_n'(x)| \leqslant M$, $\forall x \in (0, 1)$. Deduza que f é contínua.

(5) Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ contínua satisfazendo $\int\limits_a^b f(x)\,x^n\,\mathrm{d}x = 0, n = p, p + 1, \ldots, p \in \mathbb{N}^*$. Deduza que f é identicamente nula.