TESTE 1 DE ANÁLISE REAL 2009

PROFESSOR RICARDO SA EARP

(1) Assuma que $f(x)$ seja contínua para $x \geqslant 0$ e que $f(0) = 0$. Assuma que $f'(x)$ existe para $x > 0$. Além disso, assuma que $f'(x)$ seja crescente para $x > 0$. Deduza que $\dfrac{f(x)}{x}$ é monótona crescente para $x > 0$.

(2) Esboce escrevendo *todos os detalhes* o gráfico de $y = (1 - x)\,\mathrm{e}^x$, e mostre a desigualdade
$$\mathrm{e}^x < \frac{1}{1-x},\ x < 1,\ x \neq 0$$

(3) Fazendo uso da fórmula de Taylor de ordem 2, deduza a desigualdade
$$x^r > 1 + r(x-1) + \frac{1}{2}r(r-1)\left(\frac{x-1}{x}\right)^2,\ x > 1, r > 1$$

(4) Usando obrigatoriamente o conceito de *convexidade* deduza a desigualdade:
$$\frac{x}{n + x(n-1)} < (x+1)^{1/n} - 1 < \frac{x}{n},\ x > 0, n > 1$$

(5) Construa um função $\ell_\varepsilon(x)$ pertencente a $C^\infty(\mathbb{R})$ de suporte compacto tal que $\operatorname{support}(\ell_\varepsilon) = [0, \varepsilon]$.

(6) Calcule o limite
$$\lim_{a \to 0} \frac{a\pi \coth(a\pi) - 1}{2a^2}$$