$1^{\underline{o}}$ EXAME DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

prof. Ricardo Sá Earp *9 de maio de 2002*

$1^{\underline{a}}$ Questão (3.0 pts) (Remmert):
Considere a série

$$f(z) = 1 + 2z + \sum b_n\, z^{2^n}, \qquad b_n = 2^{-n^2}$$

a) Mostre que o disco aberto unitário $B_1(0)$ é o disco de convergência da série. Mostre que $f(z)$ é uma função holomorfa no disco aberto $B_1(0)$ (aqui é preciso aplicar resultados centrais, *não* é preciso demonstrá-los).
b) Mostre que $f(z)$ e todas as derivadas se estendem suavemente até a fronteira $\partial B_1(0)$, como uma função diferenciável real.
c) Mostre que $f(z)$ é univalente no disco unitário aberto $B_1(0)$ e que a imagem por $f(z)$ do círculo unitário S^1 é uma curva de Jordan.
d) Mostre que $f(z)$ não pode ser continuada holomorficamente para além de qualquer ponto de $\partial B_1(0)$; ou seja, $B_1(0)$ é o domínio de holomorfia de $f(z)$.

$2^{\underline{a}}$ Questão (2.0 pts):
Considere a função $w = u + iv = \cos z,\ z = x + iy$.
a) Mostre que $z \mapsto w = \cos z$ leva conformemente a semi-faixa aberta $\{0 < x < \pi,\ y > 0\}$ sobre o semi-plano inferior $\{\mathrm{Im}\, z < 0\}$. Mostre ainda que $z \mapsto w = \cos z$ envia conformente a faixa $0 < x < \pi$ sobre o domínio $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$.

b) Considere $g(w) = \dfrac{1}{i}\log\left(w + i\sqrt{1-w^2}\right)$. Mostre que a inversa de $z \mapsto \cos z$ (ramo principal de $w = \arccos z$) é dada por $\arccos w = g(w),\ \forall w \in \widetilde{\mathbb{C}}$ e que
$\dfrac{d}{dw}(\arccos w) = -(1-w^2)^{-1/2},\ \forall w \in \widetilde{\mathbb{C}}$.

3ª Questão (2.0 pts):

a) Estude a convergência da série abaixo em $\mathbb{C} \setminus \{|z| = 1\}$

$$\frac{1}{1-z} + \frac{z}{z^2-1} + \frac{z^2}{z^4-1} + \frac{z^4}{z^8-1} + \frac{z^8}{z^{16}-1} + \cdots$$

b) Será que dadas duas funções inteiras $f(z)$ e $g(z)$ existe uma seqüência $h_n(z)$, com $h_n(z)$ meromorfa em $\mathbb{C}$ e holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{$raízes enésimas da unidade$\}$, convergindo uniformemente em compactos de $\mathbb{C} \setminus \{|z| = 1\}$ a uma função $h(z)$ definida por

$$h(z) = \begin{cases} f(z) & \text{para } |z| < 1 \\ g(z) & \text{para } |z| > 1 \text{ ?} \end{cases}$$

4ª Questão (1.5 pts):

Seja Ω um domínio de $\mathbb{C}$ e seja $f(z) \not\equiv 0$ uma função holomorfa definida em Ω. Suponha que $f(z)$ possua uma raíz enésima holomorfa $q(z)$, i.e $(q(z))^n = f(z),\ \forall z \in \Omega$. Determine todas as raízes enésimas de $f(z)$.

Agora, suponha que $f(z)$ nunca de anule. Exiba uma condição *geral* sobre Ω que implique na existência de uma raíz enésima $q(z)$ de $f(z)$. Justifique a sua afirmação .

5ª Questão (1.5 pts):

Será que existe uma função holomorfa $f(z)$ definida numa vizinhança da origem $z = 0$, satisfazendo a desigualdade

$$\frac{n^{-4/3}}{2} \leqslant \left| f(\frac{1}{n}) \right| \leqslant n^{-4/3} \ ?$$