

# 1º EXAME DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

prof. Ricardo Sá Earp

9 de maio de 2003

Você deve escolher uma das opções em cada questão abaixo para fazer agora.

Você ainda tem a opção **B** de fazer as questões complementares até a próxima aula.

Neste caso, a prova de hoje constituirá a Prova **A**. A outra opção deve ser feita individualmente com possível consulta, constituindo a Prova **B**. Assim a nota final do primeiro exame será a média entre as duas provas **A** e **B**, levando em conta o conceito total sobre as listas de exercício.

Você pode optar por não fazer a prova **B**.

## *Escolha uma dentre as duas próximas questões abaixo*

**1ª Questão** (3.0 pts) Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro esboce uma dedução sucinta com base em *resultados enunciados em sala de aula*. Caso falso esboce um contra-exemplo.

- a) Seja  $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  uma função holomorfa definida num domínio  $\Omega$ . Sejam  $c_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , uma seqüência de pontos de  $\Omega$  com  $c_n \rightarrow c$  ( $n \rightarrow \infty$ ). Assuma que  $f(c_n) = 0$ . Segue então que  $f \equiv 0$  em  $\Omega$ .
- b) Considere uma série da forma

$$(*) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}, \quad a_n \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{C}$$

chamada usualmente de *série de Dirichlet*

- i) Será que se  $(*)$  converge absolutamente para  $s = a + ib$ , então a série converge normalmente para  $\operatorname{Re} s \geq a$ , e vale que  $(*)$  define uma função contínua neste semi-plano fechado? Será que a série define uma função holomorfa no semi-plano

$\{\operatorname{Re} s > a\}$  satisfazendo

$$f^{(k)}(s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s} (-\ln n)^k, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

neste semi-plano ?

- ii) Considere agora o caso de que  $a_n = 1, \forall n$ . Neste caso a série é a famosa *função zeta* de Riemann dada por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Será que  $\zeta(s)$  é holomorfa para  $\operatorname{Re} s > 1$  ?

Será que a função  $\zeta(s)$  possui alguma simetria ?

Note que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

**1<sup>a</sup> Questão** (3.0 pts):

Considere a função

$$f(z) = \cos(\sqrt{z}) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), z \in \mathbb{C}^*$$

- Mostre com certo *detalhes* que  $f(z)$  está bem definida e é holomorfa em  $\mathbb{C}^*$ .
- Escreva o desenvolvimento de  $f(z)$  numa “série de potências” em  $z^n$  e  $\left(\frac{1}{z}\right)^n$ , chamada de *desenvolvimento de Laurent* de  $f(z)$  para  $|z| > 0$ .
- Verifique o *grande teorema de Picard*, mostrando que em qualquer vizinhança perfurada da origem  $f(z)$  toma todos

os valores, exceto talvez um valor complexo, uma infinidade de vezes.

**Escolha uma dentre as duas próximas questões abaixo**

**2<sup>a</sup> Questão** (2.0 pts):

Seja  $f(z)$  uma função analítica  $f(z)$  definida numa vizinhança da origem, satisfazendo

$$an^{-5/2} \leq \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq bn^{-5/2}$$

onde  $a, b$  são constantes.

Discuta as condições (possibilidades) sobre  $a$  e  $b$  bem como as propriedades locais de  $f(z)$ .

**2<sup>a'</sup> Questão** (2.0 pts):

Seja  $\{a_n, n = 2, 3, \dots\}$  uma seqüência de números complexos não nulos satisfazendo

$$\sum_2^{\infty} n|a_n| < 1$$

**Escolha um dentre os dois próximos itens abaixo**

a) Discuta sobre o disco de convergência da série

$$z + \sum_2^{\infty} ((n-1))^n (\ln 2)a_2 (\ln 3)a_3 \cdots (\ln n)a_n z^n$$

a') Agora suponha  $\operatorname{Re} a_n > 0, n = 2, 3, \dots$ . Discuta, *com todos os detalhes*, o raio de convergência da série

$$\sum_2^{\infty} \frac{a_n^{2^n}}{1 + n a_n} z^{n 2^n}$$

b) Considere agora  $f(z) = z + \sum_2^{\infty} a_n z^n$ .

- i) O que você poderia dizer sobre a *regularidade* de  $f(z)$  até o bordo? Mostre que  $f$  aplica  $\Delta := \{|z| < 1\}$  conformemente num domínio de Jordan.

***Escolha uma dentre as duas próximas questões abaixo***

**3<sup>a</sup> Questão** (2.0 pts):

Defina *ponto regular* e *ponto singular* de uma função holomorfa exibindo exemplos. Mostre que  $s = 1$  é um ponto singular da função zeta de Riemann, mostrando que

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1)$$

*Sugestão:* Trabalhando com a restrição de zeta ao eixo real, compare  $\zeta(s)$  com a área debaixo da curva  $x \mapsto x^{-s}$ , a fim de obter a estimativa acima.

**3<sup>a'</sup> Questão** (2.0 pts)

Considere  $n$  um inteiro positivo. Defina  $N(n)$  o número de algarismos de  $n$ . Defina também  $S(n)$  a soma dos algarismos de  $n$ . Escreva uma relação de desigualdade entre  $\log_{10} n$  (logaritmo na base 10) e  $S(n)$ . Levando em conta isso, determine o raio de convergência da série

$$\sum_1^{\infty} S(n) z^n$$

***Escolha uma dentre as duas próximas questões abaixo*****4<sup>a</sup> Questão** (3.0 pts):

Considere a função  $f(z) = \frac{e^{-z}}{1+z}$ . Encontre o desenvolvimento de Taylor de  $f$  na origem, determinando os coeficientes da série, bem como o seu raio de convergência. Procure calcular o raio de convergência por dois métodos distintos. Calcule  $f^{(n)}(0)$ . A partir daí, mostre que a função  $g(z) = e^{-1/z} - \frac{e^{-1/z}}{1+z}$ , admite um desenvolvimento da forma  $\sum_{n \geq 0} a_{-n} z^{-n} = a_0 + \frac{a_{-1}}{z} + \dots$ , chamado de *desenvolvimento de Laurent*, convergente para  $|z| > 1$ . O coeficiente  $a_{-1}$  é chamado de resíduo de  $g(z)$ . Calcule o resíduo.

**4<sup>a'</sup> Questão** (3.0 pts):

Seja  $f(z)$  uma função holomorfa no disco unitário aberto centrado na origem. Suponha que para  $-1 < x < 1$  ( $x \in \mathbb{R}$ ),  $u = f(x)$  satisfaça a equação diferencial

$$u'(x) = \frac{2u(x)}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

Assuma que  $f(0) = 0$ . Encontre  $f(z)$ . Calcule  $f^{(n)}(0)$ . Será que você poderia dizer algo sobre a *univalência* de  $f(z)$  ?

***Escolha uma dentre as duas próximas questões abaixo*****5<sup>a</sup> Questão** (3.0 pts):

Considere  $\Omega$  o domínio contido no disco de centro 1 e raio  $\sqrt{2}$  satisfazendo  $\operatorname{Re} z < 0$  (faça um desenho). O objetivo deste item é determinar a imagem de  $\Omega$  pela aplicação

$$g(z) = \frac{2z}{1-z^2}$$

Considere a aplicação

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

- Estabeleça uma relação funcional entre  $f(z)$ ,  $g(z)$  e a aplicação de Cayley  $z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$ . Será que  $g(z)$  tem alguma simetria?
- Mostre que  $g(z)$  dá uma equivalência conforme, levando  $\Omega$  num certo semi-disco, determinando tal disco.
- Fazendo um cálculo simples, independente do item (b) acima, determine o efeito de  $g$  no ponto  $i$  no que concerne o ângulo, calculando explicitamente o ângulo da imagem de  $\partial\Omega$  na imagem de  $i$ .

**5<sup>a</sup> Questão** (3.0 pts):

Considere  $\{a_n\}$  uma seqüência satisfazendo a equação de diferenças de segunda ordem

$$a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}, \quad n \geq 1$$

com condições iniciais  $a_1 = 0, a_2 = 1$ .

Considere a série de potências

$$f(z) = \sum_1^{\infty} a_n z^n$$

- Mostre que a série define uma função holomorfa  $f(z)$  numa vizinhança da origem.
- Determine  $f(z)$  numa “closed form”, i.e na forma de uma fração racional.
- Calcule  $f^{(n)}(0)$ ,  $n \geq 0$ , e calcule o raio de convergência da série.