$1^{\underline{o}}$ EXAME DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

prof. Ricardo Sá Earp *9 de maio de 2003*

Você deve escolher uma das opções em cada questão abaixo para fazer agora.
Você ainda tem a opção **B** de fazer as questões complementares até a próxima aula.
Neste caso, a prova de hoje constituirá a Prova **A**. A outra opcão deve ser feita individualmente com possível consulta, constituindo a Prova **B**. Assim a nota final do primeiro exame será a média entre as duas provas **A** e **B**, levando em conta o conceito total sobre as listas de exercício.
Você pode optar por não fazer a prova **B**.

Escolha uma dentre as duas próximas questões abaixo

$1^{\underline{a}}$ Questão (3.0 pts) Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro esboce uma dedução sucinta com base em *resultados enunciados em sala de aula.* Caso falso esboce um contra-exemplo.

a) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa definida num domínio Ω. Sejam $c_n, \quad n = 0, 1, 2 \ldots$, uma seqüência de pontos de Ω com $c_n \to c \quad (n \to \infty)$. Assuma que $f(c_n) = 0$. Segue então que $f \equiv 0$ em Ω.

b) Considere uma série da forma

$$(*) \qquad \sum_{n \geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}, \qquad a_n \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{C}$$

chamada usualmente de *série de Dirichlet*

i) Será que se $(*)$ converge absolutamente para $s = a + ib$, então a série converge normalmente para $\operatorname{Re} s \geqslant a$, e vale que $(*)$ define uma função contínua neste semi-plano fechado ? Será que a série define uma função holomorfa no semi-plano

$\{\operatorname{Re} s > a\}$ satisfazendo

$$f^{(k)}(s) = \sum_{n \geqslant 1} a_n n^{-s} \left(-\ln n\right)^k, \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

neste semi-plano ?

ii) Considere agora o caso de que $a_n = 1, \quad \forall n$. Neste caso a série é a famosa *função zeta* de Riemann dada por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Será que $\zeta(s)$ é holomorfa para $\operatorname{Re} s > 1$?

Será que a função $\zeta(s)$ possui alguma simetria ?

Note que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} = \frac{\pi^2}{6}$$

1ª′ Questão (3.0 pts):

Considere a função

$$f(z) = \cos\left(\sqrt{z}\right) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), z \in \mathbb{C}^*$$

a) Mostre com certo *detalhes* que $f(z)$ está bem definida e é holomorfa em $\mathbb{C}^*$.

b) Escreva o desenvolvimento de $f(z)$ numa "série de potências" em z^n e $\left(\dfrac{1}{z}\right)^n$, chamada de *desenvolvimento de Laurent* de $f(z)$ para $|z| > 0$.

c) Verifique o *grande teorema de Picard*, mostrando que em qualquer vizinhança perfurada da origem $f(z)$ toma todos os valores, exceto talvez um valor complexo, uma infinidade de vezes.

Escolha uma dentre as duas próximas questões abaixo

$2^{\underline{a}}$ Questão (2.0 pts):

Seja $f(z)$ uma função analítica $f(z)$ definida numa vizinhança da origem, satisfazendo

$$an^{-5/2} \leqslant \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leqslant bn^{-5/2}$$

onde a, b são constantes.

Discuta as condições (possibilidades) sobre a e b bem como as propriedades locais de $f(z)$.

$2^{\underline{a}'}$ Questão (2.0 pts):

Seja $\{a_n, \quad n = 2, 3, \ldots\}$ uma seqüência de números complexos não nulos satisfazendo

$$\sum_2^\infty n|a_n| < 1$$

Escolha um dentre os dois próximos itens abaixo

a) Discuta sobre o disco de convergência da série

$$z + \sum_2^\infty ((n-1))^n (\ln 2)a_2(\ln 3)a_3 \cdots (\ln n)a_n z^n$$

a') Agora suponha $\operatorname{Re} a_n > 0, \quad n = 2, 3, \ldots$. Discuta, *com todos os detalhes*, o raio de convergência da série

$$\sum_2^\infty \frac{a_n^{2^n}}{1 + n\, a_n} z^{n\, 2^n}$$

b) Considere agora $f(z) = z + \sum_{2}^{\infty} a_n z^n$.

i) O que você poderia dizer sobre a *regularidade* de $f(z)$ até o bordo ? Mostre que f aplica $\triangle := \{|z| < 1\}$ conformemente num domínio de Jordan.

Escolha uma dentre as duas próximas questões abaixo

3ª Questão (2.0 pts):

Defina *ponto regular* e *ponto singular* de uma função holomorfa exibindo exemplos. Mostre que $s = 1$ é um ponto singular da função zeta de Riemann, mostrando que

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1)$$

Sugestão: Trabalhando com a restrição de zeta ao eixo real, compare $\zeta(s)$ com a área debaixo da curva $x \mapsto x^{-s}$, a fim de obter a estimativa acima.

3ª′ Questão (2.0 pts)

Considere n um inteiro positivo. Defina $N(n)$ o número de algarismos de n. Defina também $S(n)$ a soma dos algarismos de n. Escreva uma relação de desigualdade entre $\log_{10} n$(logaritmo na base 10) e $S(n)$. Levando em conta isso, determine o raio de convergência da série

$$\sum_{1}^{\infty} S(n) z^n$$

Escolha uma dentre as duas próximas questões abaixo

$4^{\underline{a}}$ Questão (3.0 pts):

Considere a função $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{1+z}$. Encontre o desenvolvimento de Taylor de f na origem, determinando os coeficientes da série, bem como o seu raio de convergência. Procure calcular o raio de convergência por dois métodos distintos. Calcule $f^{(n)}(0)$. A partir daí, mostre que a função $g(z) = e^{-1/z} - \dfrac{e^{-1/z}}{1+z}$, admite um desenvolvimento da forma $\sum_{n\geqslant 0} a_{-n}z^{-n} = a_0 + \dfrac{a_{-1}}{z} + \cdots$, chamado de *desenvolvimento de Laurent*, convergente para $|z| > 1$. O coeficiente a_{-1} é chamado de resíduo de $g(z)$. Calcule o resíduo.

$4^{\underline{a}'}$ Questão (3.0 pts):

Seja $f(z)$ uma função holomorfa no disco unitário aberto centrado na origem. Suponha que para $-1 < x < 1$ ($x \in \mathbb{R}$), $u = f(x)$ satisfaça a equação diferencial

$$u'(x) = \frac{2u(x)}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

Assuma que $f(0) = 0$. Encontre $f(z)$. Calcule $f^{(n)}(0)$. Será que você poderia dizer algo sobre a *univalência* de $f(z)$?

Escolha uma dentre as duas próximas questões abaixo

$5^{\underline{a}}$ Questão (3.0 pts):

Considere Ω o domínio contido no disco de centro 1 e raio $\sqrt{2}$ satisfazendo $\operatorname{Re} z < 0$ (faça um desenho). O objetivo deste item é determinar a imagem de Ω pela aplicação

$$g(z) = \frac{2z}{1-z^2}$$

Considere a aplicação

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

a) Estabeleça uma relação funcional entre $f(z)$, $g(z)$ e a aplicação de Cayley $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$. Será que $g(z)$ tem alguma simetria ?

b) Mostre que $g(z)$ dá uma equivalência conforme, levando Ω num certo semi-disco, determinando tal disco.

c) Fazendo um cálculo simples, independente do item (b) acima, determine o efeito de g no ponto i no que concerne o *ângulo*, calculando explicitamente o ângulo da imagem de $\partial\Omega$ na imagem de i.

$5^{\underline{a}'}$ Questão (3.0 pts):

Considere $\{a_n\}$ uma seqüência satisfazendo a equação de diferenças de segunda ordem

$$a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}, \qquad n \geqslant 1$$

com condições iniciais $a_1 = 0, a_2 = 1$.

Considere a série de potências

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n z^n$$

a) Mostre que a série define uma função holomorfa $f(z)$ numa vizinhança da origem.

b) Determine $f(z)$ numa "closed form", i.e na forma de uma fração racional.

c) Calcule $f^{(n)}(0), \quad n \geqslant 0$, e calcule o raio de convergência da série.