$2^{\underline{o}}$ EXAME DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

prof. Ricardo Sá Earp *13 de junho de 2002*

$1^{\underline{a}}$ Questão (2.0 pts) :

Se $f(z)$ é uma *função meromorfa* definida no disco unitário $B_1(0)$ satisfazendo $|f(z)| = 1$ para $|z| = 1$ o que você pode dizer sobre $f(z)$?

$2^{\underline{a}}$ Questão (2.0 pts):

Suponha que a função *meromorfa univalente* $F(z)$ leva o disco unitário centrado na origem $\mathcal{D}$ sobre um certo domínio Ω da esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Assuma que $F(z)$ possua apenas um único pólo e que tenha a *expansão de Laurent* da forma

$$F(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

em $\{0 < |z| < 1\}$. Agora considere uma função *holomorfa* $f(z)$ definida no disco perfurado unitário $\mathcal{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$. Assuma que f leva leva o disco perfurado $\mathcal{D}^*$ em Ω. Suponha ainda que admita expansão de Laurent da forma

$$f(z) = \frac{a}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

Que valores pode assumir a ? Justifique cuidadosamente a sua resposta. *Sugestão* : Tente aplicar o lema de Schwarz, convenientemente.

$3^{\underline{a}}$ Questão (Vitali) (2.0 pts):

Seja Ω um domínio de $\mathbb{C}$ e seja $\{f_n\}$, $n \in \mathbb{N}$, uma seqüência de funções que é localmente limitada em Ω. Seja $c \in \Omega$. Assuma que a seqüência das derivadas $\{f_n^{(k)}(c)\}$, converge, $k = 1, 2, \ldots$. Mostre que a seqüência $\{f_n\}$ converge uniformemente em compactos de Ω à uma função holomorfa $f(z)$ em Ω. Com a hipótese adicional que cada f_n é univalente satisfazendo $f_n'(c) = 1, \ \forall n \in \mathbb{N}$ o que você pode dizer de $f(z)$? Neste caso, se $\Omega = \mathbb{C}$ será possível que $f(\Omega)$ seja o plano complexo $\mathbb{C}$ menos um ponto? No caso geral, que você pode dizer do conjunto $f(\Omega)$?

4ª Questão (2.0) pts:

Considere a função (chamada função Gamma)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} \, dt$$

a) Mostre que Γ é holomorfa no aberto $\Re z > 0$.

b) Mostre a equação funcional

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Conclua que $\Gamma(n+1) = n!, \ n \in \mathbb{N}$.

Nota: (*Prolongamento analítico da função* Γ) A função Gamma possui um prolongamento analítico em $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$, sendo cada ponto $-n$ um pólo simples com

$$\operatorname{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

5ª Questão (2.0 pts):

Sejam $f(z)$ e $g(z)$ duas funções inteiras. O que você pode dizer de f e g se satisfazem a relação

$$f^2 + g^2 = 1 \quad ?$$