$2^{\underline{o}}$ EXAME DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

prof. Ricardo Sá Earp *27 de junho de 2003*

$1^{\underline{a}}$ Questão (3.0 pts) Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro dê uma resposta completa e escreva uma dedução sucinta com base em *resultados demonstrados em sala de aula.* Caso falso esboce um contra-exemplo.

a) O disco perfurado $0 < |z - c| < r$ e o "verdadeiro" anel $1 < |z| < R$, não são conformemente equivalentes.

b) É possível que uma função holomorfa definida numa vizinhança perfurada da origem satisfaça

$$|f(z)| \sim \mathrm{e}^{1/|z|}, \qquad \text{quando} \quad |z| \to 0\,?$$

$2^{\underline{a}}$ Questão (4.0 pts):

Considere uma função *holomorfa* $f(z)$ definida no disco perfurado unitário $B_1^*(0) = \{0 < |z| < 1\}$. Assuma que f leva leva o disco perfurado $B_1^*(0)$ num certo domínio Ω da esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que não contém a origem. Suponha ainda $f(z)$ que admita expansão de Laurent da forma

$$f(z) = \frac{a}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots \qquad (*)$$

a) Calcule

$$\int_{\gamma_n} f(z)\,\mathrm{d}z$$

onde $\gamma_n(t) = (\cos t)^n + i\,(\operatorname{sen} t)^n\,, \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, e $n \in \mathbb{N}$, *sem reduzir sua análise a um mero cálculo de uma integral do tipo*

$\displaystyle\int_0^{2\pi} h(t)\,\mathrm{d}t, \quad h(t) \in \mathbb{C}$. Ou seja, fazendo um raciocínio lógico dedutivo baseado num argumento intelectivo. Além disso, dê uma brevíssima justificativa da existência de uma expansão do tipo $(*)$ para $f(z)$.

b) Seja z_0 um ponto fixado de $B_1^*(0)$. Considere a função

$$g(z) = \int_{\gamma_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

onde γ_z é uma curva C^1 por partes ligando z_0 à um ponto fixado z.

i) Discuta se $g(z)$ está bem definida localmente e é holomorfa numa vizinhança de z_0. Discuta *cabalmente* se $g(z)$ está bem definida localmente e é holomorfa numa vizinhança de z. Discuta se $g(z)$ está bem definida globalmente em $B_1^*(0)$. Discuta a existência de $g'(z)$, calculando-a caso possível.

ii) Dê condições necessárias e suficientes sobre a para que a função

$$G(z) = \mathrm{e}^{g(z)}$$

esteja globalmente bem definida e seja holomorfa em $B_1^*(0)$. Neste caso, calcule a derivada logarítmica

$$\frac{G'(z)}{G(z)}$$

c) Agora, suponha que uma função *meromorfa univalente* $F(z)$ leva o disco unitário centrado na origem $B_1(0) = \{|z| < 1\}$ sobrejetivamente em Ω.

Assuma que $F(z)$ possua tenha a *expansão de Laurent* da forma

$$F(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

em $\{0 < |z| < 1\}$.

Que valores a pode assumir ? Justifique cuidadosamente a sua resposta. *Sugestão* : Tente aplicar o lema de Schwarz, convenientemente.

3ª Questão (3.0 pts):

Considere novamente a famosa *função zeta* de Riemann dada por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Admita neste momento que $\zeta(s)$ possui uma extensão meromorfa a todo o plano complexo, e uma extensão analítica a $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, sendo 1 um pólo simples de $\zeta(s)$ de resíduo 1.

a) Mostre que

$$\zeta(s) = \frac{1}{s-1} + O(1)$$

onde $O(1)$ é uma função inteira. Deduza da essência do raciocínio alguma formulação de um resultado geral de unicidade de duas funções meromorfas $f(z)$ e $g(z)$ no plano complexo $\mathbb{C}$.

b) Considere a série

$$f(s) = 1 - \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} - \frac{1}{4^s} + - \cdots$$

i) Mostre que $f(s)$ é holomorfa num aberto (não vazio) onde $\zeta(s)$ também é holomorfa.

ii) Obtenha uma relação entre $f(s)$ e $\zeta(s)$ e discuta o domínio de holomorfia de $f(s)$.

Justifique sua resposta com *rigor*.

4ª Questão (3.0 pts):

Considere

$$\psi(u,z) = \mathrm{e}^{2uz-z^2}, \qquad u,z \in \mathbb{C}$$

a) Mostre que
$$\psi(u,z) = \sum_{n\geqslant 0} H_n(u)\frac{z^n}{n!}$$
onde
$$H_n(u) = (-1)^n\,\mathrm{e}^{u^2}\,\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}u^n}\,\mathrm{e}^{-u^2}$$

b) Justificando rigorosamente a passagem
$$\frac{\partial \psi}{\partial u}(u,z) = \sum_{n\geqslant 0} H_n'(u)\frac{z^n}{n!}$$
Mostre que
$$H_n'(u) = 2nH_{n-1}(u), \qquad n \geqslant 1$$

c) Mostre que $H_n(u)$ são polinômios de grau n chamados de polinômios de Hermite, calculando $H_0(u), H_1(u), H_2(u)$.

Nota: Os polinômios de Hermite aparecem na Mecânica Quântica, como soluções da equação

$$w" - 2uw' + 2nw = 0, \quad n \geqslant 0$$

Também aparecem na teoria de aproximação já que satisfazem a seguinte relação de ortogonalidade

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,H_n(u)H_m(u)\,\mathrm{d}u = 0, \qquad m \neq m \quad (n,m \in \mathbb{N})$$

Além disso, surgem na teoria das probabilidades como polinômios de Tchebyshev-Hermite.