EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE VARIÁVEIS COMPLEXAS 2002.2

prof. Ricardo Sá Earp *9 de agosto de 2002*

Justifique seus desenvolvimentos e respostas com rigor

Questão 1 (2.0 pts):
Calcule a integral abaixo via o método dos resíduos

$$\int_0^\infty \frac{1+x}{(x^2+x+1)^2}\,\mathrm{d}\,x$$

Questão 2 (3.0 pts):
OPÇÃO A : Seja $f(z)$ uma função holomorfa definida num disco aberto $B_R(0)$, de raio R, centrado na origem. Assuma que $f(0)=0$, $f'(0)\neq 0$, e que $f(z)\neq 0$, paras $|z|<r\leqslant R$.

i) Mostre que

$$g(w) := \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\rho} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta)-w}\,\mathrm{d}\zeta, \qquad \rho < r$$

define uma função holomorfa para $|w| < m := \min_\theta |f(\rho\,\mathrm{e}^{i\theta})|$.

ii) Mostre que $z = g(w)$ é a única solução da equação $f(z) = w$, tal que $g(w)\to 0$, se $w\to 0$.

iii) Escreva o desenvolvimento de Taylor de $g(w)$, em $w=0$, explicitando os coeficientes a_n deste desenvolvimento numa forma integral cujo integrando depende de f e f'. Em particular, exiba explicitamente o desenvolvimento de Taylor da inversa da função $f(z) = 2z^3+6z$ em $z=0$, dando o raio de convergência da série.

OPÇÃO B Os polinômios de Legendre $P_n(u)$ são dados pelas suas funções geradoras:

$$\varphi(u,z) := (1-2uz+z^2)^{-1/2} = \sum_0^\infty P_n(u)z^n \qquad (*)$$

Note que a fórmula acima vem do fato que para u fixado, a função $z\mapsto\varphi(u,z)$, é uma função holomorfa num disco aberto centrado na origem; logo $(*)$ é o desenvolvimento de Taylor desta função em $z=0$.

i) Utilizando a fórmula do binômio

$$(1-\zeta)^{-1/2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \binom{-1/2}{k} (-\zeta)^k = 1 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{2k!}{2^{2k}(k!)^2}\zeta^k, \qquad |\zeta| < 1$$

generalizada, mostre, justificando todas as suas operações , que

$$\varphi(u,z) = 1 + \sum_{k\geqslant 1} \frac{2k!}{2^k(k!)^2} z^k \left(u - \frac{z}{2}\right)^k \tag{1}$$

concluindo que

$$P_n(u) = \sum_{r=0}^{m} \frac{(-1)^r(2n-2r)!}{2^n \cdot r!(n-r)!(n-2r)!}(u^{n-2r}), \quad m = n/2 \text{ se } n \text{ é par e } m = (n-1)/2 \text{ se } n \text{ é ímpar}$$

Em particular, verifique que $P_0(u) = 1, P_1(u) = u$, $P_2(u) = \frac{1}{2}(3u^2-1), P_3(u) = \frac{1}{2}(5u^3 - 3u)$.

ii) Deduza a *fórmula de Rodrigues*

$$P_n(u) = \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, u^n}(u^2-1)^n \tag{2}$$

iii) Infira que

$$P_n(u) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w-u|=1} \frac{(w^2-1)^n}{2^n(w-u)^{n+1}}\,\mathrm{d}\, w \tag{3}$$

Nota: Levando em conta o que foi feito acima não é difícil deduzir que $w = P_n(u)$ é uma solução da equação de Legendre

$$(1-u^2)w'' - 2uw' + n(n+1)w = 0$$

e que verificam a *condição de ortogonalidade*

$$\int_{-1}^{1} P_m(u)P_n(u)\,\mathrm{d}u = 0$$

se $m \neq n$.

Questão 3 (3.0 pts):

Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{(z+1)(z+3)}$$

a) Exiba o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$, no anel $1 < |z| < 3$. Justifique convergência. Encontre um valor α, tal que a função $f(z) - \alpha/z$, seja *integrável*, i.e admita uma primitiva no anel. Calcule tal primitiva.

b) Exiba o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$, no anel $|z| > 3$. Seja z_0 fixado satisfazendo $|z_0| > 3$, e seja γ_z uma curva seccionalmente C^1 ligando z_0 a z, $|z| > 3$. Encontre um valor β com $\beta \neq 0$ tal que a função $e^{\left(\beta \int_{\gamma_z} f(z)\right)}$ esteja bem definida e seja holomorfa no anel.

Questão 4 (2.0 pts):

Seja $\Omega := \{z, \operatorname{Im} z > 0, |z| > 1\}$, o domínio formado da parte exterior do disco unitário, contida no semi-plano superior. Seja $f(z)$ uma aplicação holomorfa definida em Ω, contínua até o bordo, i.e $f(z)$ é contínua em $\overline{\Omega}$. Assuma que f leva $\partial\Omega$ no eixo real, i.e $f(z) \to \{\operatorname{Im} z = 0\}$, se $z \to \partial\Omega$.

a) Que relação funcional $f(z)$ deve satisfazer ? Mostre que uma tal $f(z)$ admite um prolongamento analítico a um domínio que é conformemente equivalente ao disco perfurado (disco aberto menos um ponto).

b) Mostre que existe uma tal aplicação $f(z)$ que produz uma equivalência conforme entre Ω e $\{z, \operatorname{Im} z > 0\}$.