

3º EXAME DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

prof. Ricardo Sá Earp

1 de julho de 2002

1ª Questão (2.0 pts) :

Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{2000}}{1+x^{2002}} dx$$

Este é um caso bem particular de cálculo de integrais conhecido por Euler (1743).

2ª Questão (2.0 pts):

- Mostre que existe uma singularidade de uma função holomorfa $f(z)$ que é um ponto de acumulação de pólos (de $f(z)$). Tal função holomorfa $f(z)$ pode ser construída de maneira que tal singularidade possa ser um pólo de $f(z)$? Tal singularidade pode ser uma singularidade essencial de $f(z)$?
- Mostre que existe uma singularidade de uma função holomorfa $f(z)$ que é um ponto de acumulação de singularidades essenciais.
- Seja f uma função holomorfa no disco perfurado $\mathcal{D}^* = \{|z| < 1\} \setminus \{0\}$. O que você pode dizer da função

$$\alpha(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt \quad 0 < r < 1 ?$$

3ª Questão (2.0 pts):

Considere uma função holomorfa $f(z)$ definida no disco perfurado $\{0 < |z - c| < r\}$, que não se anula neste disco perfurado. Seja $\frac{f'(z)}{f(z)}$, a derivada logarítmica.

a) Suponha que a derivada logarítmica satisfaça

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z - c} + g(z), \quad k \in \mathbb{Z}$$

onde $g(z)$ é uma função holomorfa numa vizinhança de $z = c$. Discuta todas as possibilidades do comportamento de $f(z)$ numa vizinhança de $z = c$.

b) Suponha que a derivada logarítmica tenha um pólo duplo em $z = c$. Será que $f(z)$ pode ter uma singularidade essencial em $z = c$?

4ª Questão (2.0) pts:

Sejam a_1, \dots, a_n e b números complexos de módulo inferior que 1, e sejam k_1, \dots, k_n números inteiros positivos. Discuta a existência de soluções da equação

$$\prod_1^n \left(\frac{z - a_j}{z\bar{a}_j - 1} \right)^{k_j} = b$$

na bola unitária aberta de raio 1 centrada na origem.

5ª Questão (2.0 pts):

Seja Γ um reticulado de \mathbb{C} . Suponha que $g(z)$ seja uma função meromorfa em \mathbb{C} cujo conjunto de pólos seja exatamente Γ , sendo todos pólos simples com resíduos iguais a -2 . Numa lista de exercício nós construímos tais $f(z)$.

Seja Ω o domínio $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, e fixemos $c \in \Omega$. Seja γ_z uma curva seccionalmente C^1 em Ω que liga c à z .

Considere

$$f(z) := \exp \left(\int_{\gamma_z} g(\zeta) d\zeta \right)$$

- a) Mostre que $f(z)$ está bem definida e é holomorfa em Ω .
- b) Discuta a natureza das singularidades de $f(z)$.