$3^{\underline{o}}$ EXAME DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

prof. Ricardo Sá Earp *1 de julho de 2002*

$1^{\underline{a}}$ Questão (2.0 pts) :
Calcule

$$\int_0^\infty \frac{x^{2000}}{1+x^{2002}}\,\mathrm{d}\,x$$

Este é um caso bem particular de cálculo de integrais conhecido por Euler (1743).

$2^{\underline{a}}$ Questão (2.0 pts):

a) Mostre que existe uma singularidade de uma função holomorfa $f(z)$ que é um ponto de acumulação de pólos (de $f(z)$). Tal função holomorfa $f(z)$ pode ser construída de maneira que tal singularidade possa ser um pólo de $f(z)$? Tal singularidade pode ser uma singularidade essencial de $f(z)$?

b) Mostre que existe uma singularidade de uma função holomorfa $f(z)$ que é um ponto de acumulação de singularidades essenciais.

c) Seja f uma função holomorfa no disco perfurado $\mathcal{D}^* = \{|z| < 1\} \setminus \{0\}$. O que você pode dizer da função

$$\alpha(r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t \qquad 0 < r < 1 \text{ ?}$$

3ª Questão (2.0 pts):

Considere uma função holomorfa $f(z)$ definida no disco perfurado $\{0 < |z - c| < r\}$, *que não se anula neste disco perfurado*. Seja $\dfrac{f'(z)}{f(z)}$, a *derivada logarítmica*.

a) Suponha que a *derivada logarítmica* satisfaça

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{k}{z-c} + g(z), \qquad k \in \mathbb{Z}$$

onde $g(z)$ é uma função holomorfa numa vizinhança de $z = c$. Discuta todas as possibilidades do comportamento de $f(z)$ numa vizinhança de $z = c$.

b) Suponha que a derivada logarítmica tenha um pólo duplo em $z = c$. Será que $f(z)$ pode ter uma *singularidade essencial* em $z = c$?

4ª Questão (2.0) pts:

Sejam $a_1, \ldots, a_n$ e b números complexos de módulo inferior que 1, e sejam $k_1, \ldots, k_n$ números inteiros positivos. Discuta a existência de soluções da equação

$$\prod_1^n \left(\frac{z - a_j}{z\overline{a}_j - 1} \right)^{k_j} = b$$

na bola unitária aberta de raio 1 centrada na origem.

5ª Questão (2.0 pts):

Seja Γ um reticulado de $\mathbb{C}$. Suponha que $g(z)$ seja uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ cujo conjunto de pólos seja exatamente Γ, sendo todos pólos simples com resíduos iquais a -2. Numa lista de exercício nós construimos tais $f(z)$.

Seja Ω o domínio $\mathbb{C} \setminus \Gamma$, e fixemos $c \in \Omega$. Seja γ_z uma curva seccionalmente C^1 *em* Ω que liga c à z.

Considere

$$f(z) := \exp\left(\int_{\gamma_z} g(\zeta)\,\mathrm{d}\,\zeta\right)$$

a) Mostre que $f(z)$ está bem definida e é holomorfa em Ω.

b) Discuta a natureza das singularidades de $f(z)$.