$3^{\underline{o}}$ EXAME DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

prof. Ricardo Sá Earp *15 de julho de 2003*

Escolha uma dentre as três próximas questões abaixo

$1^{\underline{a}}$ Questão (2.0 pts)

Seja $f(z)$ uma função meromorfa no disco unitário $B_1(0)$. Assuma que

$$|f(z)| \to 1, \qquad \text{se} \quad |z| \to 1$$

Determine a forma mais geral de uma tal $f(z)$.

$1^{\underline{a}'}$ Questão (2.0 pts):

Sejam $f(z)$ e $g(z)$ funções *meromorfas* em $\mathbb{C}$, satisfazendo

$$f^n + g^n = 1, \qquad n = 2, 3, \ldots$$

a) Mostre que se $n \geqslant 3$, então ou bem $f(z), g(z)$ são constantes ou bem $f(z)$ e $g(z)$ *tem* pólos em comum.
b) Quando $n = 2$ será que a proposição do item a) ainda é válida ? Por quê ?

$1^{\underline{a}''}$ Questão (2.0 pts)

Suponha que a função *meromorfa univalente* $F(z)$ leva o disco unitário centrado na origem $\mathcal{D}$ sobre um certo domínio Ω da esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que não contenha a origem. Assuma que $F(z)$ possua apenas um único pólo e que tenha a *expansão de Laurent* da forma

$$F(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots$$

em $\{0 < |z| < 1\}$. Agora considere uma função *holomorfa* $f(z)$ definida no disco perfurado unitário $\mathcal{D}^* = \{0 < |z| < 1\}$. Assuma que f leva leva o disco perfurado $\mathcal{D}^*$ em Ω. Suponha ainda que admita expansão de Laurent da forma

$$f(z) = \frac{a}{z} + b_0 + b_1 z + b_2 z^2 + \cdots$$

Que valores pode assumir a ? Justifique cuidadosamente a sua resposta. *Sugestão* : Tente aplicar o lema de Schwarz, convenientemente.

Escolha uma dentre as duas próximas questões abaixo

2$^{\underline{\text{a}}}$ Questão (3.0 pts):

Calcule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\theta}{1 - 2a\sin\theta + a^2}\, \mathrm{d}\theta$$

onde $n = 1, 2, \ldots$ e $a \in \mathbb{R},\ |a| \neq 1$.

2$^{\underline{\text{a}'}}$ Questão (3.0 pts):

Calcule a integral abaixo via o método dos resíduos

$$\int_0^{\infty} \frac{1 + x}{(x^2 + x + 1)^2}\, \mathrm{d}\, x$$

Escolha uma dentre as duas próximas questões abaixo

3$^{\underline{\text{a}}}$ Questão (2.5 pts):

Seja $\sum\limits_{0}^{\infty} a_n z^n$, uma série de potências convergente para $|z| < 1$ em que os coeficientes estão dados pela fórmula

$$a_n = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-nt}\, g(t)\,\mathrm{d}t$$

em que você claramente pode identificar a *transformada de Laplace* de g em n. O chamado *método dos momentos*, diz que após uma justificada troca de ordem dos símbolos do somatório e integral obtém-se que

$$f(z) = \int\limits_0^\infty \frac{\mathrm{e}^t\ g(t)}{\mathrm{e}^t - z}$$

o que produz um prolongamento analítico à $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ (Por quê ?). Tal método pode ser aplicado em situações bem mais gerais em que se considera séries de funções holomorfas, em vez de apenas séries de potências.

Agora considere a função Gamma dada por

$$\Gamma(z) = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-t}\ t^{z-1}\,\mathrm{d}t, \qquad \Re z > 0$$

Lembro do fato que $\Gamma(z)$ possui uma extenção meromorfa a todo plano complexo $\mathbb{C}$, sendo que $\Gamma(z)$ os pólos de $\Gamma(z)$ são exatamente $0, -1, -2, \ldots$, todos são simples e de resíduo em $n \in -\mathbb{N}$ dados por $\dfrac{(-1)^n}{n!}$.

a) Mostre que

$$\frac{\Gamma(z)}{n^z} = \int\limits_0^\infty \mathrm{e}^{-nt}\ t^{z-1}\,\mathrm{d}t, \qquad \Re z > 0$$

b) Use o método dos momentos para obter a fórmula

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\, \mathrm{d}t$$

c) Daí considerando a identidade

$$\zeta(z) = \frac{1}{\Gamma(z)} \left(\int_0^1 \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\, \mathrm{d}t + \int_1^\infty \frac{t^{z-1}}{\mathrm{e}^t - 1}\, \mathrm{d}t \right)$$

bem como as propriedades da função Gamma, obtenha um prolongamento analítico de $\zeta(z)$ à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, e mostre que 1 é um pólo simples de $\zeta(z)$ com resíduo 1.

3ª Questão (2.5 pts):

Seja $n \in \mathbb{N}^*$ e $a \in \mathbb{R}$ com $a > e$. Mostre que a equação

$$h(z) = az^n - \mathrm{e}^z$$

possui no disco aberto unitário $B_1(0)$, n raízes *simples.*

Escolha uma dentre as três próximas questões abaixo

4ª Questão (2.5 pts):

Seja u uma função harmônica definida no disco unitário perfurado $B_1(0)^*$. Seja $c \in \mathbb{R}$. Assuma que a função $u(z) - c \ln |z|$ seja limitada em $B_1(0)^*$. Determine a forma mais geral de uma tal u

$4^{\underline{\mathrm{a}}'}$ **Questão** (2.5 pts):

Seja $F(z)$ holomorfa na vizinhança perfurada $B_\delta^*(a)$ do ponto a. Assuma que $\dfrac{F'(z)}{F(z)}$ tenha exatamente um pólo simples de resíduo $k \in \mathbb{Z}$. Mostre que numa vizinhança vizinhança perfurada $B_\epsilon^*(a)$, $F(z)$ se escreve

$$F(z) = c(z-a)^k \, \mathrm{e}^{G(z)}$$

onde $c \in \mathbb{C}^*$ e $G(z)$ é holomorfa em $B_\epsilon(a)$. Discuta a natureza da singularidade $z = a$ de $F(z)$.

$4^{\underline{\mathrm{a}}''}$ **Questão** (2.5 pts):

Calcule pelo método dos resíduos.

$$\int_0^{2\pi} (\cos\theta)^{2n} \, \mathrm{d}\theta$$