

# EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE VARIÁVEIS COMPLEXAS 2003

prof. Ricardo Sá Earp

29 de agosto de 2003

**Questão 1** (3.0 pts):

Seja

$$f(z) = a \operatorname{sen} z - e^z, \quad z \in \Omega := \{z; |\Re z| \leq \pi/2, \quad |\operatorname{Im} z| \leq \pi/2\}$$

a) Calcule

$$\max_{\Omega} |f(z)|$$

b) Para  $a \geq e^{\pi/2}$ , mostre que  $f(z)$  tem apenas um zero em  $\Omega$  e que este zero é real. Seja  $t$  este zero.

c) Calcule

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\operatorname{sen}^2 2z (a \cos z - e^z)}{(a \operatorname{sen} z - e^z) z^2} dz$$

em função de  $t$ .

**Questão 2** (5.0 pts):

Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{1 + z + z^2}$$

a) Encontre o desenvolvimento de Taylor de  $f(z)$  na origem explicitando os coeficientes e determinando o raio de convergência da série.

i) Calcule

$$\int_{|z|=1/3} \frac{dz}{(1 + z + z^2) z^n}$$

b) Mostre que  $f(z)$  é uma função meromorfa em  $\mathbb{C}$  determinando seus pólos.

i) Para o pólo  $a$  com  $\operatorname{Im} a > 0$ , obtenha a série de Laurent de  $f(z)$  em torno de tal singularidade, explicitando seus coeficientes.

ii) Seja  $\log z$  o ramo principal do logaritmo e  $a$  a singularidade de  $f(z)$  no semi-plano superior. Calcule

$$\int_{|z-a|=1/2} \frac{\log z}{1 + z + z^2} dz$$

- iii) Classifique a singularidade de  $\sin(f(z))$  em  $z = a$ , fazendo uma justificativa rigorosamente sintética, usando no máximo 4 linhas.

**Questão 3** (2.0 pts):

Exiba uma família de funções limitadas definidas na bola unitária  $B_1(0)$  que seja normal, justificando sua afirmação em no máximo 4 linhas.

**Questão 4** (3.0 pts):

Seja  $f(z)$  uma função holomorfa numa vizinhança perfurada  $B_\epsilon^*(0)$  da origem satisfazendo

$$f(1/n) = \frac{n^2 e^{i\pi/n}}{1 + n + n^2}$$

para  $n \in \mathbb{N}^*$  suficientemente grande

- Assuma que  $f(z)$  está limitada. Determine  $f(z)$ .
- Discuta se  $f(z)$  pode ter ou não um pólo na origem, escrevendo no máximo 3 linhas. Caso afirmativo, exiba um exemplo.
- Discuta se  $f(z)$  pode ter uma singularidade essencial na origem, exibindo um exemplo no caso afirmativo ou dando uma justificativa sumária de no máximo 2 linhas no caso negativo.