EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE VARIÁVEIS COMPLEXAS 2003

prof. Ricardo Sá Earp *29 de agosto de 2003*

Questão 1 (3.0 pts):
Seja

$$f(z) = a \operatorname{sen} z - e^z, \qquad z \in \Omega := \{z;\ |\Re z| \leqslant \pi/2, \quad |\operatorname{Im} z| \leqslant \pi/2\}$$

a) Calcule

$$\max_{\Omega} |f(z)|$$

b) Para $a \geqslant e^{\pi/2}$, mostre que $f(z)$ tem apenas um zero em Ω e que este zero é real. Seja t este zero.

c) Calcule

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\operatorname{sen}^2 2z(a\cos - e^z)}{(a \operatorname{sen} z - e^z)z^2}\, dz$$

em função de t.

Questão 2 (5.0 pts):
Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{1 + z + z^2}$$

a) Encontre o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ na origem explicitando os coeficientes e determinando o raio de convergência da série.

   i) Calcule

$$\int_{|z|=1/3} \frac{dz}{(1 + z + z^2)z^n}$$

b) Mostre que $f(z)$ é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ determinando seus pólos.

   i) Para o pólo a com $\operatorname{Im} a > 0$, obtenha a série de Laurent de $f(z)$ em torno de tal singularidade, explicitando seus coeficientes.

   ii) Seja $\log z$ o ramo principal do logaritmo e a a singularidade de $f(z)$ no semi-plano superior. Calcule

$$\int_{|z-a|=1/2} \frac{\log z}{1 + z + z^2}\, dz$$

iii) Classifique a singularidade de $\operatorname{sen}(f(z))$ em $z = a$, fazendo uma justificativa rigorosamente sintética, usando no máximo 4 linhas.

Questão 3 (2.0 pts):

Exiba uma família de funções limitadas definidas na bola unitária $B_1(0)$ que seja normal, justificando sua afirmação em no máximo 4 linhas.

Questão 4 (3.0 pts):

Seja $f(z)$ uma função holomorfa numa vizinhança perfurada $B_\epsilon^*(0)$ da origem satisfazendo

$$f(1/n) = \frac{n^2 \ \mathrm{e}^{i\pi/n}}{1 + n + n^2}$$

para $n \in \mathbb{N}^*$ suficientemente grande

a) Assuma que $f(z)$ está limitada. Determine $f(z)$.

b) Discuta se $f(z)$ pode ter ou não um pólo na origem, escrevendo no máximo 3 linhas. Caso afirmativo, exiba um exemplo.

c) Discuta se $f(z)$ pode ter uma singularidade essencial na origem, exibindo um exemplo no caso afirmativo ou dando uma justificativa sumária de no máximo 2 linhas no csso negativo.