

VCOMPLEXAS- MAIO DE 2003–Lista1

Professor: Ricardo Sá Earp

PARTE A: A GEOMETRIA DOS NÚMEROS COMPLEXOS

- 1) Mostre que a equação geral de uma reta ou círculo no plano complexo é da forma

$$\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$$

onde $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}$, $|\beta|^2 > \alpha\gamma$.

- Dê condições sobre α para que a equação represente ou bem uma reta ou bem um círculo. No caso do círculo calcule o seu centro e o seu raio, em função dos parâmetros α, β, γ .
 - Mostre que a aplicação $f(z) = 1/z$ é uma aplicação conforme que leva círculos ou retas em círculos ou retas.
 - Mostre que a aplicação $\varphi : z \mapsto \frac{r^2}{\bar{z} - \bar{a}} + a$, onde $a \in \mathbb{C}$, $r > 0$ deixa fixo todos os pontos do círculo C_a de raio r e centro a , e leva cada círculo C ortogonal a C_a em si mesmo.
 - No exercício anterior mostre que quando $a = -i$ e $r = \sqrt{2}$, a aplicação φ composta com a conjugação usual dos números complexos, chamada de ψ , fornece uma equivalência conforme entre o semi-plano $\mathbb{H}^2 = \{\text{Im } z > 0\}$ e o disco unitário aberto $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$. O que você pode dizer da imagem por ψ de cada semi-reta vertical em \mathbb{H}^2 e de cada semi-círculo em \mathbb{H}^2 ortogonal a $\{\text{Im } z = 0\}$?
- 2) Considere \mathcal{L} a reta em \mathbb{C} determinada pelo número complexo a e pelo vetor diretor $b \in \mathbb{C}$, $b \neq 0$. Determine os seguintes conjuntos
- $\left\{ z; \text{Im} \left(\frac{z-a}{b} \right) = 0 \right\}$
 - $\left\{ z; \text{Im} \left(\frac{z-a}{b} \right) > 0 \right\}$
 - $\left\{ z; \text{Im} \left(\frac{z-a}{b} \right) = 0 \right\}$
- 3) Considere quatro números distintos z_1, z_2, z_3, z_4 do plano complexo.
- Mostre a seguinte desigualdade

$$|z_1 - z_3||z_2 - z_4| \leq |z_1 - z_2||z_3 - z_4| + |z_1 - z_4||z_2 - z_3|$$

- b) Mostre que há igualdade acima \Leftrightarrow os números distintos z_1, z_2, z_3, z_4 , nesta ordem (*ordem cíclica*) são cociclos (estão num mesmo círculo) ou são colineares (estão numa mesma reta). Mostre ainda que os números distintos z_1, z_2, z_3, z_4 , nesta ordem (*ordem cíclica*) são cociclos (estão num mesmo círculo) ou são colineares (estão numa mesma reta) \Leftrightarrow a *bi-razão* definida por (obedecendo a ordem)

$$[z_1, z_2, z_3, z_4] := \frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$$

é um número *real* independente da ordem destes pontos (ou seja; independente das 24 permutações que produzirá apenas 6 números reais distintos). Mostre que se a ordem não for respeitada a afirmação é falsa.

Um teorema de Ptolomeu do II século de nossa era mostra que se z_1, z_2, z_3, z_4 estiverem num círculo então vale a igualdade na desigualdade acima. A recíproca é verdadeira e foi demonstrada no século passado. A demonstração deste fato está baseada no estudo das aplicações de Möbius

$z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$, $ad - bc \neq 0$ que estudaremos posteriormente no curso.

4)

- a) Seja $f(z) = \frac{z - a}{z\bar{a} - 1}$, $|a| < 1$. Mostre que $|f(z)| < 1$ se $|z| < 1$ e $|f(z)| = 1$ se $|z| = 1$. Conclua que f é uma transformação conforme do disco $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$ em si mesmo. Mostre que dados $a, b \in \mathcal{D}$ existe uma transformação conforme de \mathcal{D} em si mesmo levando a em b . Aplique este conhecimento para determinar uma equivalência conforme entre o disco aberto retirado o segmento $[a, 1)$ com $0 < a < 1$, e o disco aberto retirado o segmento $[0, 1)$. Existem outras transformações conformes de \mathcal{D} em \mathcal{D} (Não se desespere se não souber responder esta última pergunta agora)?
- b) Estude a função e^z , $z = x + iy$ quanto a conformidade; em particular estude as imagens das linhas coordenadas $x = \text{const}$ e $y = \text{const}$. O que mais você poderia dizer sobre esta aplicação?
- c) Idem com respeito a aplicação $f(z) := u + iv = z^2$. Qual a imagem inversa das retas $u = \text{const}$ e $v = \text{const}$? Determine uma equivalência conforme entre a bola aberta retirado o segmento $[a, 1)$ com $0 < a < 1$ e a semi-bola aberta.

- d) Exiba uma transformação conforme da bola aberta sobre o semi-plano superior aberto.
- e) O quê você sabe dizer sobre a aplicação

$$z \longrightarrow \frac{z + \tan(\theta/2)}{1 - z \tan(\theta/2)}, \quad \theta \in \mathbb{R}?$$

- f) Encontre uma equivalência conforme entre uma faixa arbitrária e o disco unitário aberto.
- g) Mostre que a aplicação $w \longrightarrow (w - 1)/(w + 1)$ leva conformemente o primeiro quadrante no semi-disco superior (*isto tem um significado geométrico na geometria hiperbólica*). Você poderia bolar uma transformação conforme entre este semi-disco e uma semi-faixa? E você finalmente saberia levar esta semi-faixa conformemente num semi-plano?
- h) Exiba novos exemplos de aplicações conformes.
Posteriormente, trataremos com mais detalhes outros exemplos de transformações conformes.
- 5) Coloque sobre a forma $x + iy$ as seguintes expressões
- $\frac{(-1/2 + i\sqrt{3}/2)^4}{3 - 2i}$.
 - $(1 + i)^n + (1 - i)^n, n \in \mathbb{N}$.
- 6) Resolva as equações
- $z^3 = -1$.
 - $z^2 + \sqrt{32}iz - 6i = 0$.
- 7) Determine o conjunto

$$E = \left\{ z; z = c + \rho \left(\frac{1 + it}{1 - it} \right), t \in \mathbb{R} \right\}.$$

$$c \in \mathbb{C}, \rho > 0.$$

- 8) Demonstrar que a equação do círculo passando por três pontos não colineares a, b, c é dada por

$$\begin{vmatrix} |z|^2 & z & \bar{z} & 1 \\ |a|^2 & a & \bar{a} & 1 \\ |b|^2 & b & \bar{b} & 1 \\ |c|^2 & c & \bar{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

9)

a) Mostre que se $w^n = 1, w \neq 1, n \geq 2$ então

$$1 + w + \dots + w^{n-1} = 0.$$

b) Seja $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Mostre que para $h \neq kn, k \in \mathbb{Z}$, tem-se que

$$1 + w^h + \dots + w^{(n-1)h} = 0.$$

Além disto verifique que

$$1 + z + \dots + z^{n-1} = (z - w)(z - w^2) \dots (z - w^{n-1}).$$

10) Simplifique a expressão $1 + \cos \varphi + \cos 2\varphi + \dots + \cos n\varphi$.

11) Mostre que

$$A|\alpha|^2 + B\alpha\bar{\beta} + \bar{B}\bar{\alpha}\beta + C|\beta|^2 \geq 0$$

para toda escolha de $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$

$$A \geq 0, \quad C \geq 0, \quad |B|^2 \leq AC$$

12) Utilize o exercício anterior e o fato que $\sum_{k=1}^n |\alpha a_k + \beta \bar{b}_k|^2 \geq 0$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ para estabelecer a desigualdade de Schwarz:

$$\left| \sum_{k=1}^n a_k b_k \right|^2 \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 \sum_{k=1}^n |b_k|^2.$$

13) (*Propriedades elementares das funções trigonométricas*)a) Mostre a fórmula de adição : Para $z, w \in \mathbb{C}$,

$$\cos(z + w) = \cos z \cos w - \sin z \sin w$$

$$\sin(z + w) = \sin z \cos w + \cos z \sin w$$

b) Mostre que para todo $z \in \mathbb{C}$

$$\cos^2 z + \sin^2 z = 1$$

c) Mostre que para todo $z = x + iy \in \mathbb{C}$

$$|\cos z| = (\cos^2 x + \sinh^2 y)^{1/2}, \quad |\sin z| = (\sin^2 x + \sinh^2 y)^{1/2}$$

O quê você pode dizer do comportamento de $\sin z$ e $\cos z$, quando $|z| \rightarrow \infty$?

d) Mostre que se $0 < a < 1$, então

$$2\pi i e^{i\pi a} / (e^{2\pi a i} - 1) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

e) Mostre que se $q = e^{i\pi\tau}$, $\text{Im } \tau > 0$ e se $\theta = e^{i\pi u}$, então

$$\frac{\sin \pi(n\tau - u) \cdot \sin \pi(n\tau + u)}{\sin^2(\pi n\tau)} = \frac{(1 - q^{2n}\theta^{-2})(1 - q^{2n}\theta^2)}{(1 - q^{2n})^2}$$

14) Mostre que

$$1 - \left| \frac{z - w}{1 - z\bar{w}} \right|^2 = \frac{(1 - |z|^2)(1 - |w|^2)}{|1 - \bar{z}w|^2}, \quad \text{se } \bar{z}w \neq 1$$

PARTE B: DIFERENCIABILIDADE

1) Mostre a seguinte regra da cadeia: Seja A um conjunto aberto de \mathbb{C} e seja $f \in C^1(A)$. Se B é um aberto de \mathbb{C} tal que $f(A) \subset B$ e $g \in C^1(B)$, então $g \circ f \in C^1(A)$ e

a)

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} = \left[\left(\frac{\partial g}{\partial z} \right) \circ f \right] \frac{\partial f}{\partial z} + \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) \circ f \right] \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} = \left[\left(\frac{\partial g}{\partial z} \right) \circ f \right] \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) \circ f \right] \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

i) Calcule

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial z}(3\bar{z}^3 - z^2 + 1) & \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z^8 + 2z^3\bar{z}^6) \\ \frac{\partial^5}{\partial z^3 \partial \bar{z}^2}(\bar{z}^{11}z^7 + z^8 + 2\bar{z}^3) & \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2}(\bar{z}^{11}z^7 + z^8 + 2\bar{z}^3) \\ \frac{\partial^5}{\partial z^3 \partial \bar{z}^2}(x^{11}y^7 + x^8 + 2y^3) & \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2}(2\bar{z}^6z^6 + z^5 + 2\bar{z}^7) \end{array}$$

- b) Mostre que $\frac{\partial(\log |z|)}{\partial z} = \frac{1}{2z}$ e $\frac{\partial(\log |z|)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\bar{z}}$
 c) Se Δ é o laplaciano usual então

$$\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

- d) Se $\lambda(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}$, $|z| < 1$, então $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ é a métrica hiperbólica no disco unitário aberto $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$. Mostre que a *curvatura de Gauss* K dada por $K(z) = \frac{-\Delta \log \lambda}{\lambda^2}$ é identicamente igual a -1 .
 e) Mostre rigorosamente que as funções $f(z)$ e $\overline{f(\bar{z})}$ são simultaneamente holomorfas.
 f) Seja f uma função holomorfa num aberto $U \subset \mathbb{C}$. Suponha que f não se anule. Mostre que

$$\Delta (|f|^p) = p^2 |f|^{p-2} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2, \quad \text{para } p > 0$$

- g) Mostre que se f é harmônica tomando valores reais no aberto U , e se f não se anula, então

$$\Delta (|f|^p) = p(p-1) |f|^{p-2} |\nabla f|^2, \quad \text{para } p \geq 1$$

- h) Mostre que o laplaciano em coordenadas polares é escrito da forma

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

- i) Seja $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio. Suponha que

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} P = 0$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostre que

$$P(z, \bar{z}) = z \cdot G(\bar{z}) + H(\bar{z})$$

para polinômios G e H que dependem apenas de \bar{z} .

- 2) Seja f uma função holomorfa definida num domínio Ω de \mathbb{C} .

a) Demonstre que f é constante se uma das condições seguintes são verificadas:

- (i) $\operatorname{Re} f$ é constante (ii) $\operatorname{Im} f$ é constante (iii) $a\operatorname{Re} f + b\operatorname{Im} f + c = 0$,
 onde $a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0$. (iv) $|f|$ é constante.

b) Mostre que $\forall z \in \Omega$

$$\Delta(|f(z)|^2) = 4|f'(z)|^2$$

admitindo o fato de que $f = u + iv, u, v \in C^2(\Omega)$.

3) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{zt - \alpha t^2} dt = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{z^2/4\alpha}, \quad \alpha > 0$$

Nota: Na verdade, pode ser mostrado que a igualdade acima é válida $\forall z \in \mathbb{C}$! Você saberia demonstrar isto ? Fazendo $z = -i\xi$, tem-se

$$\mathcal{F}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-i\xi t} dt = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-p^2/4\alpha}, \quad p \in \mathbb{R}, \alpha > 0$$

que é a chamada *Transformada de Fourier* de $t \mapsto f(t) = e^{-\alpha t^2}$.

Para $u \in L^1(\mathbb{R})$, define-se a *Transformada de Fourier* por

$$\mathcal{F}(u)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi t} u(t) dt, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

e sua *Transformada de Fourier inversa*

$$\mathcal{F}^{-1}(u)(\xi) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\xi t} u(t) dt, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

Vamos lembrar um pouco de alguns fatos da teoria dos espaços L^p . Dado $u \in L^2$ existe uma seqüência de funções $\{u_n\}$ em $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ com

$$u_k \longrightarrow u \quad \text{em } L^2(\mathbb{R})$$

Você saberia demonstrar isto ? Usando o fato acima e o *teorema de Plancherel*, pode-se definir a transformada de Fourier de uma função em $L^2(\mathbb{R})$. Para $u, v \in L^2(\mathbb{R})$, valem as seguintes propriedades (veja ref. 11) :

- i) $\mathcal{F}(D^\alpha u) = (i\xi)^\alpha \mathcal{F}(u)$, para cada multiíndice α , tal que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R})$.
 ii) $\mathcal{F}(u * v) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(u)\mathcal{F}(v)$.
 iii) $u = \mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(u))$.

4) Calcule as transformadas de Fourier das funções indicadas abaixo.

a) $u_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } |x| \leq a, \\ 0 & \text{se } |x| > a \end{cases}, \quad a > 0$.

Resposta: $\frac{2 \sin a\xi}{\xi\sqrt{2\pi}}$.

b) $f(x) = e^{-a|x|}, \quad a > 0$. Resposta: $\frac{2a}{(a^2 + \xi^2)\sqrt{2\pi}}$.

c) $f(x) = \begin{cases} e^{-ax} & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x \leq 0 \end{cases}$.

Resposta: $\frac{1}{(a + i\xi)\sqrt{2\pi}}$.

4) Calcule a transformada de Fourier inversa de

$$\mathcal{F}(B) = \frac{1}{1 + |\xi|^2}$$

Sugestão: Considere a identidade $\frac{1}{1 + |\xi|^2} = \int_0^\infty e^{-t(1+|\xi|^2)} dt$ e use o cálculo

feito no exerc. 3) logo acima. Resposta:

$$B(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \frac{e^{-t - \frac{|x|^2}{4t}}}{t^{1/2}} dt, \quad x \in \mathbb{R}$$

comumente chamado de *Potencial de Bessel*.

5) Usando o que foi feito acima resolva

$$-u''(x) + u(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

onde $f \in L^2(\mathbb{R})$. Resposta: $u(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-t - \frac{|x-y|^2}{4t}}}{t^{1/2}} f(y) dy dt, x \in \mathbb{R}$.

PARTE C: FAMÍLIAS SOMÁVEIS, CONVERGÊNCIA ABSOLUTA

(Leitura)

Somas positivas somáveis

Seja T um conjunto não vazio. Denotamos por $a = \{a_t\}_{t \in T}$, ou simplesmente $\{a_t\}$, uma aplicação $a : T \rightarrow \mathbb{C}$, $a_t \in \mathbb{C}$, chamada de *família complexa indexada por T* . Se os $a'_t \in \mathbb{R}$ dizemos que a família a é real, se $a_t \geq 0, \forall t \in T$, dizemos que a é *positiva*. Se a e b são duas famílias reais indexadas por T , escrevemos $a \leq b$, se $a_t \leq b_t, \forall t \in T$.

Dada $a = \{a_t\}_{t \in T}$ positiva a *soma* $\sum_{t \in T} a_t$ está definida como segue

$$\sum_{t \in T} a_t := \sup \left\{ \sum_{t \in F} a_t ; F \subset T, \#F < \infty \right\}$$

Se $\sum_{t \in T} a_t < \infty$, dizemos que a família a é *somável*. Que acontece quando $T = \mathbb{N}$?

Critério de somabilidade de famílias positivas

Afirmamos o seguinte:

A família positiva $\sum_{t \in T} a_t$ é somável \iff existe uma seqüência crescente de subconjuntos finitos de T , $F_1 \subset F_2 \subset \dots$; $\bigcup_{n \geq 1} F_n = S$, $S := \{t \in T; a_t \neq 0\}$, com $\sup_n \sum_{t \in F_n} a_t < \infty$; então

$$\sum_{t \in T} a_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t \in F_n} a_t$$

Em particular, se $a \geq 0$ o conjunto $S := \{t \in T; a_t \neq 0\}$ é no máximo enumerável. S é chamado de *suporte de a* .

Dem: Pela definição de $\sum_{t \in T} a_t$ temos uma seqüência de conjuntos finitos B_1, B_2, \dots em T , tal que

$$\sum_{t \in T} a_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t \in B_n} a_t$$

Tomando $F_n = B_1 \cup \dots \cup B_n$, obtém-se uma seqüência crescente de conjuntos finitos $F_1 \subset F_2 \subset \dots$ tal que

$$\sum_{t \in T} a_t = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t \in F_n} a_t = \sup_n \sum_{t \in F_n} a_t$$

(\Rightarrow) Se a é somável $\bigcup_n F_n = S$. Em caso contrário, $\exists t' \in T$, $a_{t'} > 0$ com $t' \notin F_n, \forall n \geq 1$. Coloquemos $G_n = F_n \cup \{t'\}$. Inferimos daí que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t \in G_n} a_t = \sum_{t \in T} a_t + a_{t'} > \sum_{t \in T} a_t$$

o que produz uma contradição .

(\Leftarrow) Por outro lado, se existe uma seqüência $\{F_n\}$ como no enunciado, então para todo subconjunto finito F de T , tem-se um dado F_n tal que

$$\sum_{t \in F} a_t \leq \sum_{t \in F_n} a_t$$

De fato basta tomar $F_n \supset F \cap S$; de onde segue que

$$\sup_F \sum_{t \in F} a_t < \infty,$$

F varrendo todos os conjuntos finitos de T ; logo a é somável. \square

Teorema da convergência monótona para somas positivas

Seja $a(n) = \{a_t(n)\}_{t \in T}$, $n = 1, 2, \dots$ satisfazendo

$0 \leq a_t(1) \leq a_t(2) \leq \dots$, $t \in T$. Vale a seguinte afirmação

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} a_t(n) &= a_t < \infty \\ &\Downarrow \\ \lim_{t \rightarrow \infty} \sum a_t(n) &= \sum_t a_t \end{aligned}$$

(O que acontece se $\lim_{t \rightarrow \infty} a_t(n) = \infty$, para algum t ?)

Dem: Do fato que

$$\sum_t a_t(n) \leq \sum_t a_t(n+1) \leq \sum_t a_t$$

podemos deduzir que existe L , $L = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_t a_t(n)$ e $L \leq \sum_t a_t$. Se F é um subconjunto finito de T então

$$\begin{aligned} \sum_{t \in T} a_t(n) &\geq \sum_{t \in F} a_t(n) \\ \Rightarrow L &\geq \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t \in F} a_t(n) = \sum_{t \in F} a_t \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow L &\geq \sup_F \sum_{t \in F} a_t = \sum_{t \in T} a_t \\ \Rightarrow L &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t \in T} a_t(n) = \sum_{t \in T} a_t \end{aligned}$$

□

Somas Complexas

Seja $a = \{a_t\}$ uma família complexa. Dizemos que a é somável se $\sum_t |a_t| < \infty$.

É claro que a é somável $\iff u = \operatorname{Re} a$ e $v = \operatorname{Im} a$ são somáveis. Se $b = \{b_t\}$ é uma família real (não necessariamente positiva) definimos b^+, b^- , como $b_t^+ = \max(b_t, 0)$ e $b_t^- = \max(-b_t, 0)$. Assim b será somável $\iff b^+$ e b^- forem somáveis: Se b é real e é somável definimos $\sum_t b_t := \sum_t b_t^+ - \sum_t b_t^-$. Portanto, se $a = \{a_t\}$ é uma família complexa somável definimos

$$\sum_t a_t := \sum_t u_t + i \sum_t v_t$$

Como um exercício livre, elabore um critério de somabilidade para somas complexas análogo ao que foi estabelecido para somas positivas. Um outro exercício interessante consiste da formulação de um teorema de *Fubini* para somas (“séries duplas”).

1) Seja $\{a_t(n)\}_{t \in T, n = 1, 2, \dots}$, uma família de números complexos somável.

a) Mostre que se os $a(n)$ são reais e $a_t(1) \leq a_t(2) \leq \dots, t \in T$, com $\sup_n \sum_t a_t(n) < \infty$, então $a_t = \lim_{n \rightarrow \infty} a_t(n), t \in T$ é tal que $\{a_t\}$ é somável e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_t a_t(n) = \sum_t a_t$$

Sugestão: Observe que $0 \leq a_t(2) - a_t(1) \leq a_t(3) - a_t(1) \leq \dots, t \in T$.

Procure aplicar o teorema da convergência monótona.

b) Mostre que se os $a(n)$ são números reais e $a_t(1) \geq a_t(2) \geq \dots \geq b_t, t \in T$, onde $b = \{b_t\}$ é somável, então $a_t = \lim_{n \rightarrow \infty} a_t(n)$ é tal que $\{a_t\}$ é somável e

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_t a_t(n) = \sum_t a_t$$

Sugestão: Observe que $|a_t| \leq |a_t(1)| + |b_t|, t \in T$ e procure aplicar o resultado precedente.

- c) (*Convergência dominada*): Suponhamos que $|a_t(n)| \leq M_t, t \in T$, onde $M = \{M_t\}$ é uma família somável. Suponhamos também que $a_t(n) \rightarrow \alpha_t$ quando $n \rightarrow \infty$, então mostre a somabilidade de $\{a_t\}$ com

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_t a_t(n) = \sum_t \alpha_t$$

Sugestão: Coloque $b_t(n) = \sup_{k \geq n} |a_t(k) - a_t|$ e procure aplicar o resultado precedente.

- 2) Demonstre rigorosamente os critérios de Cauchy e D'Alembert para convergência de séries complexas absolutamente convergentes.
- 3) (*Lema da soma parcial de Abel*): Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}$ duas seqüências de números complexos, $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Coloquemos $A_n = a_0 + \dots + a_n, n \geq 0$; então para $n \geq 0, k \geq 1$, temos que

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} a_j b_j = \sum_{j=n+1}^{n+k-1} A_j (b_j - b_{j+1}) - A_n b_{n+1} + A_{n+k} b_{n+k}$$

Deduza: $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge se $\sum_{n \geq 0} A_n (b_n - b_{n+1})$ converge e $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n b_n$ existe.

- a) (*Crítério de Abel*) Da fórmula de Abel deduza que se $\sum_{n \geq 0} a_n$ é convergente e se $\{b_n\}$ é uma seqüência monótona limitada; então $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.
- b) (*Crítério de Dirichlet*) Mostre que se a seqüência das somas parciais $\{A_n\}$ de $\sum_n a_n$ é limitada e se a seqüência $\{b_n\}$ é uma seqüência real monótona tendendo a zero, então $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

Daí deduzo o critério de Leibniz: Seja $\{\alpha_n\}$ uma seqüência monótona de números reais tendendo a zero, então $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha_n$ converge. Dê exemplos de séries convergentes, mas não absolutamente convergentes.

Também deduzo o seguinte: Se $\sum_n |b_n - b_{n+1}| < \infty$ e se $\sum_n a_n$ converge então $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

- 4) Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ seqüências de números reais estritamente positivos com

$$\sum_n c_n < \infty, \sum_n d_n = \infty.$$

a) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}, \quad n \geq N,$$

então $\sum_n a_n < \infty$.

b) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{d_{n+1}}{d_n}, \quad n \geq N,$$

então $\sum_n a_n = \infty$.

Sugestão: Para o item a) observe que a seqüência $\{a_n/c_n\}$ é uma seqüência decrescente.

5) (*Cr terio de Kummer*): Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ seqüências de números reais estritamente positivos com $\sum_n d_n = \infty$.

a) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$ e um número $\rho > 0$ temos que

$$b_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} b_{n+1} \geq \rho > 0, \quad n \geq N,$$

então $\sum_n a_n < \infty$.

b) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$ temos que

$$\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{d_{n+1}} \leq 0, \quad n \geq N,$$

então $\sum_n a_n = \infty$.

Sugestão: Para o item b) veja o exercício anterior item b). Para o item a) observe que $w_n := a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq a_n \rho > 0, n \geq N$. Também observe que $\sum_n w_n$   convergente.

6) (*Cr terio de Raabe-Duhamel*). Guardando as notat es do exercício 5), tomando $b_n = n - 1 (n \geq 2)$ no exercício 5 a) e $d_n = 1/(n - 1)$ no item b) obt m-se

$$\sum_n a_n < \infty \quad \text{se, para algum } \alpha > 1 \quad \text{e um } N \in \mathbb{N}, \quad n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq \alpha, \quad n \in N$$

$$\sum_n a_n = \infty \quad \text{se, para algum } N \in \mathbb{N}, \quad n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1, \quad n \in N$$

Em particular, se $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$ então $\sum_n a_n < \infty$ se $L > 1$ e $\sum_n a_n = \infty$ se $L < 1$. Mostre que se $L = 1$, todas as hipóteses podem ocorrer.

7) (*Crítério de Gauss*) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais estritamente positivos tais que, para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^p}, \quad n \geq N$$

onde $p > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\sup_{n \geq N} |\beta_n| < \infty$.

a) Mostre que $\sum_n a_n < \infty$, se $\alpha > 1$ e $\sum_n a_n = \infty$, se $\alpha \leq 1$.

Sugestão: Se $\alpha \neq 1$ utilize o exercício 6). Para $\alpha = 1$ utilize o exercício 5 b) com $1/d_n = (n-1) \log(n-1)$, $n \geq 3$ verificando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{d_{n+1}} \right) = -1.$$

b) Seja $a \in \mathbb{C}$. Seja $z_n = \binom{a}{n}$, onde $\binom{a}{0} = 1$, $\binom{a}{1} = a$,

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)}{n!}, \quad n \geq 1.$$

Mostre que $\sum_n |z_n| < \infty$ se $\operatorname{Re} a > 0$ ou $a = 0$ e, $\sum_n |z_n| = \infty$ se $\operatorname{Re} a \leq 0$, $a \neq 0$.

Sugestão: Considere

$$r_n = \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \left| \frac{a-n}{n+1} \right|$$

Quando $\operatorname{Re} a \neq 0$ aplique o exercício 6), verificando que

$$n(1-r_n) = \frac{n}{1+r_n} \cdot \frac{1-|a|^2 + 2n(1+\operatorname{Re} a)}{(n+1)^2} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(1-r_n) = 1 + \operatorname{Re} a$$

Quando $\operatorname{Re} a = 0$, $a \neq 0$, $a = it$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ e

$$r_n = \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^{1/2}$$

verifica-se que

$$n^2 \left(r_n - 1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{n^3}{n+1} \left(\left(1 + \frac{t^2}{n^2}\right)^{1/2} - 1 \right) + \frac{n^2}{n(n+1)} \rightarrow \frac{t^2}{2} + 1$$

O resultado agora segue do item a).

- 8) Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz mostre que se $\sum_n |a_n| < \infty$ as seguintes séries são convergentes

$$\sum_n |a_n a_{n+1}|^{1/2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n^{1/2+p}}, \quad p > 0.$$

Voce poderia dar uma demonstração mais elementar ?

- 9) Mostre que

$$A_n = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^n \cos \nu x = \frac{\sin(n + 1/2)x}{2 \sin(x/2)}$$

$$B_n = \sum_{\nu=1}^n \sin \nu x = \frac{\cos(x/2) - \cos(n + 1/2)x}{2 \sin(x/2)}$$

se $n \in \mathbb{N}$ e $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ utilizando as fórmulas

$$2 \sin(1/2)x \cos \nu x = \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(\nu - \frac{1}{2}\right)x$$

$$2 \sin(1/2)x \sin \nu x = \cos\left(\nu - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x.$$

Conclua que se $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $n \geq 1$ as séries

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \cos \nu x, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \sin \nu x$$

são convergentes, desde que a seqüência $\{b_n\}_{n \geq 1}$ seja monótona tendendo a zero. Dê exemplos particulares disto.

- 10) Mostre com todos os detalhes que se $\sum a_n$, $\sum b_n$ são duas séries que convergem absolutamente então o produto das séries converge absolutamente e temos que

$$\left(\sum_n a_n \right) \left(\sum_n b_n \right) = \sum_n c_n$$

onde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$.

a) Considerando a função exponencial e^z , mostre que

$$e^{z-1/z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \geq n}}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!} \right) z^n$$

b) Mostre que a série abaixo converge para $p > 0$ e converge absolutamente para $p > 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$$

i) Mostre que a série $\sum c_n$ diverge para $0 < p \leq 1/2$, onde

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^n ((k+1)(n-k+1))^{-p}$$

O que isto significa para você conceitualmente ?

PARTE D: COMPLEMENTOS

- 1) Seja p um polinômio. Assuma que todo zero de p esteja contido no semi-plano dado por $\Re az + b > 0$. Mostre que todo zero da derivada p' está contido no mesmo semi-plano (*Teorema de localização de zeros de Gauss-Lucas*).
- 2) Assuma que $0 < a_0 < a_1 < \dots < a_n$. Mostre que todos os zeros do polinômio $p(z) = a_0 + a_1 z + \dots + a_n z^n$ estão contidos na bola aberta de raio 1 centrada na origem.
- 3) Sejs Ω um domínio do plano complexo. Sejam f e g funções holomorfas em Ω . Assuma que g nunca se anule em Ω e que $\frac{f(z)}{g(z)} \in \mathbb{R}$, para todo $z \in \Omega$. O que você pode dizer da relação entre f e g ?

BIBLIOGRAFIA

1. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variables*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
2. Christian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps*. Springer, 1992.

3. Einar Hille. *Analytic function theory*. Dois volumes, Chelsea, Nova York, 1982.
4. Georges Valiron. *Théorie des fonctions*. Troisième édition, Masson, 1966.
5. Henri Cartan. *Teoria elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas*. Selecciones Científicas, Madrid, 1968.
6. Jean-Francois Pabion. *Éléments d'analyse complexe*. Edition Marketing, Paris, 1995.
7. John B. Conway. *Functions of one complex variable I*. Segunda edição Springer, 1995.
8. J. Gerretsen e G. Sansone. *Lectures on the theory of functions of complex variable*. Wolters-Noordhoff Publishing Groningen 1969 (dois volumes).
9. K. Knopp. *Elements of the theory of functions*. Dois volumes (com dois volumes de exercícios), Dover, Nova York, 1952.
10. Lars Ahlfors. *Complex analysis*. Mc Graw-Hill, 1996.
11. Lawrence C. Evans. *Partial differential equations*. American Mathematical Society, 1998.
12. Norman Levinson e Raymond M. Redheffer. *Complex variables*. Holden-Day, SãoFrancisco, 1970.
13. Patrice Tauvel. *Analyse complexe*. Exercices corrigés. Dunod, 1999.
14. Rami Shakarchi. *Problems and solutions for complex analysis*. Springer, 1999.
15. Reinhold Remmert. *Theory of complex functions*. Springer, 1991 (*Readings in Mathematics*).
16. R. E Greene e S. G. Krantz. *Function theory of one complex variables*. John Wiley and Sons, N. Y, 1997.
17. Sristi Chatterji. *Cours d'analyse 2, Analyse complexe*. Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Suíça, 1997.
18. Stephen D. Fisher. *Complex variables*. Second Edition. Dover Public., N. Y, 1999.
19. Steven G. Krantz. *Handbook of complex variables*. Birkäuser, Boston, 1999.
20. Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Mc Graw-Hill, 1987.