

## VCOMPLEXAS- MAIO DE 2003–Lista2

*Professor: Ricardo Sá Earp*

### PARTE A: SÉRIES DE FUNÇÕES COMPLEXAS

- 1) Seja  $f_n(z) = 1/(z + n)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Mostre que
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = 0$ ,  $z \in \mathbb{C}$ .
  - Seja  $A_\alpha = \{z; \Re z \geq \alpha, z \notin -\mathbb{N}\}$ . Mostre que  $f_n \rightarrow 0$  ( $n \rightarrow \infty$ ) uniformemente em  $A_\alpha$ , onde  $\alpha$  é um número real qualquer. Mais precisamente, mostre que

$$\sup_{z \in A_\alpha} |f_n(z)| \leq \frac{1}{\alpha + n} \quad \text{se } n > -\alpha$$

- Mostre que se  $A = \{z; \Im z \geq 1\}$ , então  $f_n \not\rightarrow 0$ , uniformemente em  $A$ , mostrando que  $\sup_{z \in A} |f_n(z)| \geq 1$ ,  $n \in \mathbb{N}$ .
- 2) Seja  $a_n(z) = 1/(z + n^2)$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . Seja  $S = \{-n^2; n \in \mathbb{N}\}$ . Considere

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z), \quad z \notin S.$$

- Mostre que  $\sum_{n \geq 0} |a_n(z)| < \infty$ ,  $z \notin S$ .
- Mostre que a série é uniformemente convergente em  $A_\alpha$  (cf Ex 1 b)).
- Mostre que se  $\alpha \leq 0$ , a série  $\sum_{n \geq 0} a_n(z)$  não é normalmente convergente em  $A_\alpha$  (Ex 1 c)), mostrando que  $\|a_n\|_{A_\alpha} = \infty$ , para  $n^2 \leq -\alpha$ .
- Mostre que a série  $\sum_{n \geq 0} a_n(z)$  não é uniformemente convergente em  $A$  (Ex 1 c)).
- Mostre que a série  $\sum_{n \geq 0} a_n(z)$  é uniformemente convergente em todo compacto  $K \subset \mathbb{C} \setminus S$ ; conclua que  $f$  é contínua em  $\mathbb{C} \setminus S$ .
- Discuta as relações entre séries normalmente convergentes, absolutamente convergentes e uniformemente convergentes. Discuta como isto foi aplicado no teorema de séries de potências que relacionou o raio de convergência da série e da série de potências obtida da original derivando-se termo a termo.

g) Considere  $e^z := \sum \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$ . Mostre que

$$\left| e^z - \sum_0^{n-1} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{2}{n!} |z|^n \quad \text{para } n \geq 1 \quad |z| \leq 1 + \frac{1}{2}(n-1)$$

O quê você pode concluir da estimativa acima com respeito à convergência da soma parcial da série dada por  $e^z$ ? Você tem outra maneira de ver isto?

3) Seja  $X$  um conjunto e sejam  $f_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $f$  funções complexas definidas em  $X$ . Mostre que  $f_n \xrightarrow{u} f$  ( $n \rightarrow \infty$ )  $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$ , para toda seqüência  $\{x_n\}_{n \geq 1}$  em  $X$ .

4) Seja  $f_n(x) = nx(1-x)^n$  ( $0 \leq x \leq 1$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ). Verifique que as funções contínuas  $f_n$  convergem (quando  $n \rightarrow \infty$ ) pontualmente à uma função contínua  $f \equiv 0$  em  $[0, 1]$ , sem que a convergência seja uniforme, mostrando que

$$\|f_n\|_{[0,1]} \rightarrow \frac{1}{e} \neq 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

5) Sejam  $a_n : X \rightarrow \mathbb{C}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , onde  $X$  é um conjunto e  $\{b_n\}$  uma seqüência monótona tendendo à zero. Seja  $A_n(x) := a_0 + \dots + a_n(x)$ ,  $x \in X$ . Suponha que  $\sup_{n \geq 0} \|A_n\| < \infty$ .

a) Seguindo o raciocínio do critério de Dirichlet (veja Lista 1), mostre que  $\sum_n a_n(x)b_n$  converge uniformemente em  $X$ . Conclua que a série  $\sum_{\nu \geq 1} b_\nu \cos \nu x$  (cf Lista 1) converge uniformemente em  $x \in [\alpha, \beta]$ , onde  $0 < \alpha < \beta < \pi$ .

## PARTE B: SÉRIES DE POTÊNCIAS, FUNÇÕES ANALÍTICAS ELEMENTARES

1) Determine o raio de convergência das séries. Em cada caso, indique um domínio compacto no qual a série converge normalmente.

a)  $\sum_n n^\alpha z^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

b)  $\sum_n n!(z/n)^n$ .

c)  $\sum_n \alpha^{n^2} z^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

d)  $\sum_n \frac{1}{n!} \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n) z^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ;  $\sum_n \frac{1}{n!} \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n) z^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

*Sugestão: Considere o caso  $\alpha \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$  separadamente.*

e)  $\sum_n (\log n)^2 z^n$ . Resposta: 1.

f)  $\sum_n n!/(n^n) z^n$ .

*Sugestão:* Considere a fórmula de Stirling  $n! = n^n e^{-n} u_n$  com  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} = 1$ .

*Resposta:* e

2)

- a) Sejam  $a, b, c$  números complexos. Suponha que  $c$  não é um inteiro  $\leq 0$ . Mostre que o raio de convergência da série abaixo é 1. Indique um domínio compacto no qual a série converge normalmente:

$$1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2 + \dots$$

$$+ \frac{a(a+1) \dots (a+n-1) \cdot b(b+1) \dots (b+n-1)}{n!c(c+1) \dots (c+n-1)}z^n + \dots$$

- b) Encontre os termos de ordem  $\leq 3$  do desenvolvimento em série de potências da função  $f(z) = z^2/(z-2)$  em  $z = 1$ .

*Resposta :*  $-1 - (1+2)(z-1) - (1+2+1)(z-1)^2 - (1+2+1)(z-1)^3$ .

Agora, aplicando *certa técnica* desenvolvida em sala de aula, obtenha a série de Taylor de  $f(z)$  em  $z = 1$ . Daí calcule  $f^{(n)}(1)$ ,  $n \geq 0$

- c) Considere

$$J(z) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

Qual é o raio de convergência da série ? Indique um domínio compacto no qual a série converge normalmente.

Mostre que  $J(z)$  satisfaz a equação diferencial (Veja o livro de Gerretsen-Sansone para o desenvolvimento e outros exemplos de equações lineares complexas, regulares e singulares-regulares, de segunda ordem)

$$z^2 J''(z) + zJ'(z) + z^2 J(z) = 0$$

- 3) Seja  $R$  o raio de convergência da série  $\sum_n a_n z^n (n \in \mathbb{N})$ ; se  $s_n = a_0 + \dots + a_n$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , mostre que o raio de convergência  $R'$  da série  $\sum_n s_n z^n$  verifica a desigualdade  $R' \geq \min(R, 1)$  e estabeleça que

$$\sum_n s_n z^n = \frac{1}{1-z} \sum_n a_n z^n, \quad |z| < \min(R, 1)$$

4) Mostre que as séries de números complexas abaixo, convergem nos conjuntos  $\mathcal{C}$  dados

- a)  $\sum_n (z/(1+z))^n$ .  $\mathcal{C} = \{z; \Re z > -1/2\}$ .  
 b)  $\sum_n z^n/(1+z^n)$ .  $\mathcal{C} = \{z; |z| < 1\}$ .  
 c)  $\sum_n \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$ .  $\mathcal{C} = \{z, \Re z > 0\}$ .

Classicamente, o domínio limitado pelas chamadas *curvas de Cassini*, dadas por

$$|z-a||z+a| = R^2, \quad a, R > 0$$

são chamados de domínios de Cassini. Para  $a = R$ , a origem é um ponto duplo, para  $a > R$  tem duas componentes conexas e para  $a < R$  é um domínio estrelado cujo centro é a origem.

- d) Mostre que a série  $\sum_n \left(\frac{1}{2}z(z-1)\right)^{2^n}$ , converge em certo domínio de Cassini.

O quê você pode dizer sobre *convergência normal* das séries ?

5) Seja  $R$  o raio de convergência da série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ . Mostre que o raio de convergência  $\tilde{R}$  da série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{1+|a_n|} z^n$$

é dado por  $\tilde{R} = \max(R, 1)$

6) Determine os raios de convergência das séries. Indique um domínio compacto no qual a série converge normalmente:

- a)  $\sum_{n \geq 0} (-1)^n 2^n z^{2n+2}$ .  
 b)  $\sum_{n \geq 0} 2^{\log n} z^n$ .  
 c)  $\sum_{n \geq 0} (\sin n) z^n$ .

7) Seja  $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n (z - z_0)^n$  uma função dada por uma série com raio de convergência  $R > 0$ . Mostre que  $f$  é holomorfa em  $B = B_R(z_0) = \{z; |z - z_0| < R\}$ ; além disto mostre que  $f$  admite uma primitiva em  $B$ , i.e existe  $F$  holomorfa em  $B$  tal que  $F'(z) = f(z)$ ,  $\forall z \in B$ . Finalmente, mostre que tal primitiva  $F$  é única, a menos de uma constante aditiva.

8) Seja  $f(z) = \exp(az) + \exp(bz)$ , onde  $a, b$  são constantes complexas e  $z \in \mathbb{C}$ . Mostre que  $f$  é periódica  $\Leftrightarrow a = b = 0$  ou  $b = ra$ , onde  $r$  é um número real racional.

9) Mostre que

a)  $|\exp z^2| \rightarrow \infty$  se  $|z| \rightarrow \infty, |\arg z| \leq \alpha < \pi/4$ .

b)  $\cos z$  é real  $\Leftrightarrow y = 0$  ou  $x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ .

c)  $\sin z$  é imaginário puro  $\Leftrightarrow x = n\pi, n \in \mathbb{Z}$ .

d)  $\exp((1+i)z) = \sum_{n \geq 0} 2^{n/2} \exp\left(\frac{in\pi}{4}\right) \frac{z^n}{n!}, \forall z \in \mathbb{C}$ .

e)  $\exp(\cos z) \cos(\sin z) = \sum_{n \geq 0} \frac{\cos nz}{n!}, \forall z \in \mathbb{C}$ . *Sugestão:* Verifique que

$$\exp(\exp \pm iz) = \sum_n \frac{\exp(\pm inz)}{n!} = \sum_n \frac{\cos nz}{n!} \pm \sum_n i \frac{\sin nz}{n!}$$

e que  $\exp(\exp \pm iz) = \exp(\cos z) \exp(\pm i \sin z)$ .

f)  $\cos i + i \sin i = e^{-1}$ .

g)  $\log \exp(1 + 4i) = 1 + (4 - 2\pi)i$ .

h)  $\forall z \in \mathbb{C}, |\cos z| \leq \cosh |z|$  e que  $|\sin z| \leq \sinh |z|$ . Deduza que para  $|z| < 1, |\cos z| < 2$  e  $|\sin z| \leq 6|z|/5$ .

i) Se  $a \neq 0$ , a equação  $\exp(1/z) = a$ , possui uma infinidade de soluções em toda vizinhança da origem. O que voce conclui disto? Que tipo de singularidades num disco perfurado  $\mathcal{D}^* = \{0 < |z - z_0| < \epsilon, \epsilon > 0\}$ , uma função holomorfa pode ter?

10) Mostrar que uma função holomorfa  $f \in H(\Omega)$  definida num domínio  $\Omega$  de  $\mathbb{C}$  verifica  $f'(z) = \alpha f(z) \Leftrightarrow f(z) = ce^{\alpha z}, z \in \mathcal{D}$ , onde  $c \in \mathbb{C}$ . Disto conclua uma caracterização da exponencial complexa.

11)

a) Seja  $f \in H(\mathbb{C})$  uma função inteira tal que  $f(0) = 1$ . Mostre que se  $f(z+w) = f(z)f(w), \forall z, w \in \mathbb{C}$ ; então  $f(z) = e^{\alpha z}, \forall z \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}$ .

b) Seja  $f$  uma função contínua tal que

$$f(z+w) = f(z) + f(w), \quad z, w \in \mathbb{C}.$$

Mostre que

$$f(z) = az + b\bar{z}, \quad z \in \mathbb{C}, \text{ para } a, b \in \mathbb{C}.$$

12) Verificar que  $\cos z = w$ , implica que

$$z = -i \log \left( w \pm \sqrt{w^2 - 1} \right) + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Em particular, concluir que  $\cos : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é sobrejetiva.

13) Verificar que  $\sin z = w$ , implica que

$$z = -i \log \left( iw \pm \sqrt{1 - w^2} \right) + 2n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Em particular, concluir que  $\sin : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  é sobrejetiva.

14) Verificar todas as determinações de

a)  $2^i$ . *Resposta:*  $e^{-2n\pi} \{ \cos(\log 2) + i \sin(\log 2) \}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

b)  $i^i$ . *Resposta:*  $\exp \left\{ -\pi \left( 2n + \frac{1}{2} \right) \right\}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

15) Encontrar todos os números  $a$  e  $z$  complexos tais que:

a) Toda determinação de  $a^z$  são reais.

b) Toda determinação de  $a^z$  seja de valor absoluto 1. *Sugestão:* Seja  $z = x + iy$ ,  $x, y$  reais e  $a = re^{i\theta}$ ,  $r > 0$ ,  $\theta \in (-\pi, \pi]$ .

16)

a) Utilizando a proposição da convergência dominada mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + z_n)^n = \exp(z),$$

se  $z_n \in \mathbb{C}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , e  $\lim_{n \rightarrow \infty} nz_n = z$ . Em particular conclua que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n = \exp(z), \quad z \in \mathbb{C}.$$

*Sugestão:* Escreva

$$(1 + z_n)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(n), \quad \alpha_k(n) = \binom{n}{k} z_n^k, \quad \text{s } 0 \leq k \leq n,$$

verificar que para  $k$  fixado,  $\alpha_k(n) \rightarrow z^k/k!$  ( $n \rightarrow \infty$ ) e que  $|\alpha_k(n)| \leq \rho^k/k!$ ,  $\rho = \sup_n |nz_n|$ .

Demonstre ainda que

$$\left( 1 + \frac{z}{n} \right)^n \rightarrow \exp z \quad (n \rightarrow \infty) \quad \text{uniformemente em } z \in B_R(0)$$

para todo  $R, 0 < R < \infty$

- b) (*Lema da composição*) Seja  $X$  um espaço métrico,  $f_n$  uma seqüência de funções contínuas definidas em  $X$ . Suponha que  $f_n$  converge uniformemente em compactos a uma função contínua  $f$ . Mostre que  $e^{f_n}$  converge uniformemente em compactos (de  $X$ ) à  $e^f$ .

*Sugestão:* Aplique a estimativa da Parte A, item 2)g).

- c) Usando o item anterior mostre que a seqüência  $(1 + z/n)^n$  converge uniformemente em compactos à  $e^z$ .

*Sugestão:* Mostre que  $|\log(1 + w) - w| \leq |w|^2$  para  $|w| \leq 1/2$ .

- 17) Sejam  $\alpha = a + ib$ ,  $a, b$  reais e  $z \in \mathbb{C}^*$ . Verifique que

$$|z^\alpha| = |z|^a e^{-b \arg z}$$

deduza que

- a)  $\lim_{z \rightarrow 0} |z^\alpha| = 0 \Leftrightarrow \Re \alpha > 0$ .  
 b)  $\lim_{z \rightarrow 0} |z^\alpha| = \infty \Leftrightarrow \Re \alpha < 0$ .

- 18) Verificar que, se  $|z| < 1$ ,

$$\frac{1}{2} + z + z^2 + \dots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+z}{1-z}$$

colocando  $z = re^{i\theta}$ ,  $0 \leq r < 1$ , deduza:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r \cos \theta}$$

deduza ainda fórmula análoga trocando-se  $\cos$  por  $\sin$  na expressão a esquerda da igualdade.

- 19) Seja  $z = x + iy$ , com  $x, y$  reais. Verifique que  $|\sin nz| \leq e^{n|y|}$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ; deduza que  $\sum_{n \geq 1} 2^{-n} \sin nz$  converge absolutamente se  $|\operatorname{Im} z| < \log 2$ . Por outro lado se  $|\operatorname{Im} z| \geq \log 2$ , mostre que  $|2^{-n} \sin nz| \not\rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$  (veja o exercício seguinte), de modo que  $\sum_{n \geq 1} 2^{-n} \sin nz$  diverge se  $|\operatorname{Im} z| \geq \log 2$ .
- 20) Mostrar que a série  $\sum_{n \geq 1} n^{-2} \sin nz$  converge apenas para  $z$  real, mostrando que

$$|\sin nz| \geq \frac{1}{2} (e^{n|y|} - e^{-n|y|}), \quad y = \operatorname{Im} z.$$

21) Mostre que não existe nenhuma função contínua

$$f : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{C}^* \quad \text{talque } (f(z))^2 = z, \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

*Sugestão:* Observe que  $f(z) \neq 0, \forall z \in \mathbb{C}^*$ . Passando a  $-f$  se necessário, suponha que  $f(1) = 1$ . Mostre que a função  $z \rightarrow f(z)f(w)/f(zw)$  é contínua e identicamente igual a 1. Infira daí uma contradição.

Mostre que não existe nenhum ramo contínuo de  $z^{1/2}$  em  $\mathbb{C}^*$ , por outro lado  $z \rightarrow z^{1/2}$  é holomorfa em  $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$ .

Conclua também que não existe nenhuma função logaritmo no domínio  $\mathbb{C}^*$ .

22) Verificar as afirmações abaixo com respeito a existência de uma função analítica  $f$  definida numa vizinhança (aberta) de  $z = 0$ .

a)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \cos n\pi, n = 1, 2, \dots$ , é impossível.

b)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right), n = 1, 2, \dots$ , é impossível.

c)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}, n = 1, 2, \dots$ , implica que  $f(z) = z/(z+1)$ .

d)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2 \sin(\pi/n)}{n+1}, n = 1, 2, \dots$ , implica que  $f(z) = \sin(\pi z)/z(z+1)$ , com  $f(0) = \pi$ .

e)  $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right), n = 1, 2, \dots$ , implica que  $f$  é constante.

23) As séries de Taylor de  $\frac{z}{e^z - 1}$ ,  $\cot z$  e  $\tan z$ .

a) A série de Taylor de  $\frac{z}{e^z - 1}$  em torno da origem está definida por

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_0^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k, \quad B_k \in \mathbb{C}$$

Mostre as seguintes afirmações

i)  $B_1 = 0$  e  $B_{2k+1} = 0$  para  $k \geq 1$ .

ii)

$$\binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \binom{n}{2} B_2 + \dots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0$$

Os números acima são chamados de *números de Bernouille*. Determine-os recursivamente, calculando

$$B_0 = 1, B_2 = 1/6, B_4 = -1/30, B_6 = 1/42$$

$$B_8 = -1/30, B_{10} = 5/66, B_{14} = 7/6$$

Curiosidade:  $B_{26} = 8553103/6 \dots$

Sugestão: Considere  $1 = \frac{e^z - 1}{z} \cdot \frac{z}{e^z - 1}$ .

b) Mostre que

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty} (-1)^k \frac{4^k}{(2k)!} B_{2k} z^{2k-1}$$

$$\tan z = \sum_1^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{4^k(4^k - 1)}{(2k)!} B_{2k} z^{2k-1}$$

Discuta o raio de convergência da série de  $z \cot z$ .

24) Considere a série

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^{3n}}{(3n)!}$$

a) Mostre que  $f$  satisfaz  $f'''(z) - f(z) = 0$ . Mostre ainda que  $f(z) = \frac{1}{3} \left( e^z + 2e^{-z/2} \cos \frac{\sqrt{3}z}{2} \right)$ .

i) Deduza que

$$\frac{1}{3} \left( \cosh z + 2 \cosh z/2 \cos(\sqrt{3}z/2) \right) = \sum_0^{\infty} \frac{z^{6n}}{(6n)!}$$

25) Sejam  $a, b, k$  constantes reais, com  $k \neq 0$ . Define-se uma seqüência  $\{a_n\}$  pelas relações

$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad ka_{n+2} - (1 + k^2)a_{n+1} + ka_n = 0$$

Considere a série

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

a) Mostre que  $f(z)$  satisfaz a uma equação diferencial linear de segunda ordem. Encontre  $f(z)$  e em seguida encontre uma expressão para os  $a_n$ . Analise os casos  $k = \pm 1$ , separadamente.

- 26) Estabeleça o desenvolvimento em série de potências da função  $f$  definida por  $f(z) = \int_0^z \frac{e^\zeta - 1}{\zeta} d\zeta$ , determinando o raio de convergência da série. Coloque  $g(z) = \int_1^2 e^z \log z dz$ . Estabeleça uma relação entre  $g$  e certos valores de  $f$ .

- 27) Considere a função  $f(z) = \log \frac{1+z}{1-z}$ ,  $|z| < 1$ . Calcule  $f^{(n)}(0)$ , a  $n$ -ésima derivada de  $f$  na origem. Use obrigatoriamente o desenvolvimento de Taylor de  $f$  na origem para calcular,  $\log \frac{m}{n}$ ,  $\log 2$  e  $\log |\cot z|$ .

- 28) Considere a função  $f(z) = \frac{e^{-z}}{1+z}$ . Mostre que a  $n$ -ésima derivada de  $f$  na origem é dada por  $f^{(n)}(0) = (-1)^n n! \left(1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}\right)$ .

- 29) Considere as funções

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^n}{n!}, \quad g(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n a^n z^n}{b(b+a)(b+2a)\cdots(b+na)}$$

Seja  $h(z) = f(z)g(z)$ . Mostre que  $h^{(n)}(0) = \frac{1}{b+na}$ .

- 30) Escrevendo obrigatoriamente as potências e os produtos de funções trigonométricas como combinação linear de senos e cossenos, calcule a  $n$ -ésima derivada na origem das funções  $f(z) = \left(\frac{\sin z}{z}\right)^2$ ,  $z \neq 0$ ,  $f(0) = 1$ ,  $g(z) = \cos^3 z$ ,  $h(z) = \sin 2z \cos 4z$ .

- 31) Use obrigatoriamente o teorema de Newton-Abel para mostrar que o desenvolvimento de Taylor de  $f(z) = \log \frac{\sqrt{1+z^2}-1}{z^2}$ ,  $f(0) = \log \frac{1}{2}$ , na origem é

$$f(z) = \log \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n 1 \cdot 3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} n(n!)} z^{2n}$$

Determine o raio de convergência da série.

- 32) Fazendo a decomposição em frações parciais, encontre o desenvolvimento de Taylor das seguintes funções, na origem, determinando o raio de convergência da série:  $f(z) = \frac{z+2}{z^2+z+1}$ ,  $g(z) = \frac{z^4}{z^4+z^2-2}$ .

- 33) Fazendo obrigatoriamente duas deduções distintas, escreva o desenvolvimento de Taylor da função  $f(z) = \frac{1-z \cos a}{1-2z \cos a+z^2}$ , na origem, determinando o raio de convergência da série. Calcule a  $n$ -ésima derivada de  $f$  na origem.

34) Mostre que

$$\sum_0^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3z-2}{4z^2} - \frac{(1-z)^2}{2z^3} \log(1-z), \quad |z| < 1$$

35) Mostre que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+n-2} = \frac{1}{3} \left( \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{3} \right) + \frac{1}{3} \left( \frac{1}{z^2} - z \right) \log(1-z)$$

36) Considere a série

$$g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(\nu+n+1) s^{-\nu-n-1}$$

one  $\Gamma = \Gamma(z)$  é a função Gamma e  $\Re \nu > -1$ . Considere a fórmula de Stirling que diz o seguinte (veja, por exemplo refs 15, 17):

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z}, \quad \text{quando } |z| \rightarrow \infty (|\arg z| \leq \pi - \delta, \quad 0 < \delta < \pi)$$

Assuma que a série converge para algum  $s = s_0$ . Mostre que o raio de convergência da série definida por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

é infinito

37) Seja  $f(z)$  uma função holomorfa em  $\{|z| < 1\}$ .

Considere o desenvolvimento de Taylor de  $f(z)$  na origem dado por

$$(*) \quad f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_h z^h + \cdots$$

Seja  $\omega := e^{2\pi i/n}$ , uma enésima raiz da unidade. Defina

$$g(z) = \frac{1}{n} (f(\omega z) + f(\omega^2 z) + \cdots + f(\omega^n z))$$

a) Qual é o domínio de convergência absoluta da série (\*) ?

- b) Em que domínio compacto (\*) converge uniformemente ? E normalmente ?
- c) Escreva o desenvolvimento de Taylor na origem de  $g(z)$ . Qual é o raio de convergência da série ?
- d) Calcule  $g^{(k)}(0)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .
- e) Mostre que a função  $F(z) = g(\sqrt[n]{z})$  é holomorfa (“single-value”) em  $\{|z| < 1\}$ .

38) O que você pode dizer sobre um domínio no qual a série abaixo converge ?

$$f(z) = \sum e^{-n^2} \sum'_{m=1}^{n-1} (z - m/n)^{-1}$$

onde a soma  $\sum'$ , se faz quando  $(m, n) = 1$ , i.e quando  $m, n$  são primos entre si.  
O que você pode dizer sobre o domínio em que  $f(z)$  é holomorfa ?

39) Sejam  $p_0(z), \dots, p_n(z)$ , polinômios em  $\mathbb{C}$ . Considere a equação de diferenças

$$p_0(z)w(z+n) + p_1(z)w(z+n-1) + \dots + p_n(z)w(z) = 0$$

Assuma que  $w(z)$  é holomorfa para  $\Re z > b$  e que  $p_n(z) \neq 0$  para  $\Re z > 0$ .

Será que  $w(z)$  pode ser estendida a todo plano complexo  $\mathbb{C}$  como função meromorfa ? No caso afirmativo, diga quais são os pólos de  $f(z)$ .

40) Considere  $\{a_n\}$  uma seqüência satisfazendo a equação de diferenças de segunda ordem

$$a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}, \quad n \geq 1$$

com condições iniciais  $a_1 = 0, a_2 = 1$ .

Considere a série de potências

$$f(z) = \sum_1^{\infty} a_n z^n$$

- a) Mostre que a série define uma função holomorfa  $f(z)$  numa vizinhança da origem.
- b) Determine  $f(z)$  numa “closed form”, i.e na forma de uma fração racional.

c) Calcule  $f^{(n)}(0)$ ,  $n \geq 0$ , e calcule o raio de convergência da série.

41) O que você pode dizer sobre o raio de convergência das séries  $\sum a_n z^n$ , onde os coeficientes  $a_n$  estão dados abaixo ?

a)  $a_n = (\sin \alpha_1 + \cdots + \sin \alpha_n)^2 + (\cos \beta_1 + \cdots + \cos \beta_n)^2$ , onde os  $\alpha_i$  e os  $\beta_j$  são reais.

b)  $a_n = \frac{1^k}{n^{k+1} + 1} + \cdots + \frac{n^k}{n^{k+1} + n}$ ,  $k > 0$ .

c)  $\sqrt[n]{a_n} = \sum_1^n \frac{3}{3n + 3p + 1}$ .

d)  $a_n = b_{n+1} - b_n$ , onde  $b_1 = 1$ ,  $b_{n+1} = \frac{1}{1 + b_n}$ .

e)  $a_n = b_n^n$ , onde  $b_n$  satisfaz a equação de diferenças

i)  $b_{n+1} = b_n \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$ ,  $n \geq 2$ ,  $b_0 = b_1 = b_2 = 1$ .

ii)  $b_{n+1} = b_n \frac{n^3 - 1}{n^3 + 1}$ ,  $n \geq 2$ ,  $b_0 = b_1 = b_2 = 1$ .

f)  $a_n = \frac{b_n}{n^n}$ , onde  $b_n$  satisfaz a equação de diferenças

$$b_{n+1} - (n+1)b_n = 2^n(n+1)! \quad b_0 = 1$$

g)  $a_n$  satisfaz a equação de diferenças de primeira ordem

$$a_{n+1}(a + by_n) = cy_n, \quad a, b, c > 0, \quad y_0 > 0$$

h)  $a_n$  satisfaz a equação de diferenças de segunda ordem

i)  $a_{n+2} + a a_{n+1} - a_n = L$ ,

ii)  $a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0$ ,  $a_0 = 1, a_1 = 1/2$ .

42) Seja  $0 < a < 1$ . Considere o seguinte exemplo de Fredholm

$$g(z) = \sum_0^\infty a^n z^{n^2} = 1 + az + a^2 z^4 + \cdots$$

Discuta o raio de convergência da série. Discuta a univalência de  $g(z)$  e a regularidade das derivadas parciais de  $g(z)$  até o bordo.

- 43) Mostre que podemos obter um desenvolvimento em potências de  $\frac{1}{z}$ , convergente para  $\{|z| > 1\}$ , da função

$$f(z) = \frac{1}{1-z} e^{1/z}$$

chamado de *série de Laurent* de  $g$ .

- 44) Neste exercício você precisará fazer uso de certas *desigualdades clássicas*. Sejam  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$  duas seqüência de números reais positivos satisfazendo certas condições. Considere a série de potências

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

Discuta o raio de convergência da série sabendo que  $a_n, \alpha_n, \beta_n$  satisfazem às seguintes condições abaixo.

- a)  $a_n := (\alpha_n + \beta_n)^{\alpha_n + \beta_n}$ , onde

$$\alpha_n^{\alpha_n} \beta_n^{\beta_n} = O(2^n) \quad (n \rightarrow \infty)$$

- b)  $a_{n+1} := \alpha_{n+1} \beta_{n+1}^n$ , onde

$$\frac{\alpha_{n+1} + n\beta_{n+1}}{n+1} = O(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

- c)  $a_n := \left( \sum \alpha_j \cdot \sum 1/\alpha_j \right)^{-1}$ .

- d)  $a_n := \sum \frac{1 + \alpha_n}{1 - \alpha_n}$ , onde

$$\sum |\alpha_n| < \infty$$

- e)  $a_n := \frac{1}{\left(\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1}\right)^2 + \cdots + \left(\alpha_n + \frac{1}{\alpha_n}\right)^2}$ , onde

$$\sum_1^n \frac{\alpha_j}{n} \rightarrow A, \quad (n \rightarrow \infty)$$

- 45) Escreva as funções abaixo num desenvolvimento de “série de potências” em  $z$  e  $\frac{1}{z}$ , convergentes para  $|z| > 0$ , chamada de *série de Laurent*. Discuta a holomorfia de  $f(z)$  e verifique o *grande teorema de Picard* em cada caso.
- a)  $f(z) = \cos(\sqrt{az}) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{bz}}\right)$ ,  $a, b \neq 0$ .
- b)  $f(z) = e^{1/(az)+bz}$ ,  $a, b \neq 0$ .
- c)  $f(z) = \cosh\left(z + \frac{1}{z}\right)$ .

### PARTE C: COMPLEMENTOS

- 1) Lembremos que uma função  $f$  que aplica o domínio  $\Omega$  sobre  $G$  é chamada *univalente* se
- $f$  é holomorfa em  $\Omega$
  - $f$  é injetiva (um-a-um) (para o momento, considere que  $f'$  nunca se anula em  $\Omega$ . Veremos mais tarde que injetividade de uma função holomorfa  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$  implica que  $f'$  nunca se anula em  $\Omega$ . Este é um fato notável das variáveis complexas).

Mostre o seguinte *critério de univalência*: Seja  $f$  uma função holomorfa num *domínio convexo*  $\Omega$  satisfazendo a condição :

$$\operatorname{Re} f'(z) > 0, \quad \forall z \in \Omega$$

Conclua que

- $f$  é univalente em  $\Omega$ .
  - Se  $\Omega = \{|z| < 1\}$  e  $f$  é contínua em  $\bar{\Omega}$  então  $f(\Omega)$  é um domínio de Jordan (i. e  $\partial\Omega$  é uma curva de Jordan).
- 2) Seja  $f$  uma função holomorfa em um domínio  $\Omega$  que seja localmente injetiva (leia-se:  $f'$  nunca se anula. Na verdade, esta propriedade é equivalente a ser localmente injetiva, como veremos posteriormente). A *derivada Schwarziana* de  $f$  denotada por  $S_f$  está definida por

$$S_f := \frac{d}{dz} \frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{1}{2} \left( \frac{f''(z)}{f'(z)} \right)^2$$

- a) Mostre que se  $w = T(z)$  e  $w = Q(z)$  são uma aplicações de Möbius então

$$S_{T \circ f \circ Q}(z) = S_f(Q(z))Q'(z)^2$$

e assim é invariante por aplicações de Möbius, isto é  $S_{T \circ f}(z) = S_f(z)$ . Conclua que a derivada Schwarziana de uma aplicação de Möbius é nula. Para um teorema de existência, envolvendo equações lineares complexas de segunda ordem, veja o livro de Hille, segundo volume. A derivada Schwarziana tem papel importante na Análise Complexa.

3) Considere a *série binomial*

$$b_\sigma(z) := \sum_0^\infty \binom{\sigma}{n} z^n$$

onde

$$\binom{\sigma}{0} := 1 \quad \binom{\sigma}{n} := \frac{\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-n+1)}{n!}$$

ou seja

$$b_\sigma(z) = 1 + \sigma z + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2} z^2 + \cdots$$

- a) Deduza que  $b_\sigma$  é holomorfa na bola unitária aberta centrada na origem, mostrando que o raio de convergência da série que define  $b_\sigma$  é igual a 1. Mostre que  $b_{-1} = \frac{1}{1+z}$ ,  $|z| < 1$ .
- b) Mostre a fórmula de multiplicação :

$$(1+z)b_{\sigma-1} = b_\sigma$$

Infira que

$$b'_\sigma(z) = \sigma b_\sigma / (1+z)$$

- c) Seja  $\lambda(z) := \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$ . Mostre que

$$b_\sigma(z) = e^{\sigma\lambda(z)}, \quad |z| < 1$$

Deduza a fórmula de Abel-Newton

$$(1+z)^\sigma = \sum_0^\infty \binom{\sigma}{n} z^n, \quad \forall \sigma \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1.$$

- 4) Considere a equação de Legendre (integral elíptica (completa) de primeira ordem. Veja o livro de Gerretsen-Sansone.)

$$K(z) := \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sqrt{1 - z \sin^2 \theta}}$$

- a) Mostre que  $K(z)$  é holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$ .  
 b) Mostre que para

$$K(z) = \sum_0^{\infty} (-1)^n A_n \binom{-1/2}{n} z^n$$

onde

$$A_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n} \theta \, d\theta, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

- c) Mostre que  $K(z)$  e  $\tilde{K}(z) := K(1 - z)$  são soluções da equação

$$z(1 - z)w'' + (1 - 2z)w' - (1/4)w = 0$$

- d) Mostre que  $\tilde{K}(z) = \frac{4c}{\pi^2} \ln z K(z) + \varphi(z)$  onde  $\varphi(z)$  é holomorfa em  $z = 0$ .
- 5) Verifique se existem funções holomorfas definidas num domínio contendo a origem que satisfaçam a condição abaixo.
- a)  $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = e^{-\sqrt{n}}$ , onde  $n \in \mathbb{N}^*$ .
- 6) Seja  $\Omega$  um domínio e sejam  $f$  e  $g$  duas funções holomorfas definidas em  $\Omega$ .
- a) Assuma que  $f(z)g(z) = 0$  para todo  $z \in \Omega$ . O quê você pode dizer de  $f$  e de  $g$  ?
- b) Suponha que  $f^2(z) = z$  e que  $g^2(z) = z$  para todo  $z \in \Omega$ . O quê você pode dizer de  $f$  e de  $g$  ?
- 7) Seja  $u = u(x + iy)$  uma função harmônica definida num domínio  $\Omega$ . O quê você pode dizer do conjunto  $\mathcal{C} = \{u_x = u_y = 0\}$  ?

#### PARTE D: EXAME SIMULADO

*Justifique rigorosamente todos os cálculos e afirmações*

**1ª Questão** (3 pts):

a) (1 pt) Determine o raio de convergência da série  $\sum_n n!/(n^n)z^n$ .

*Sugestão:* Considere a fórmula de Stirling  $n! = n^n e^{-n} u_n$  com  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} = 1$ .

b) (1 pt) Considere  $f$  uma função analítica e univalente em  $\Delta := \{|z| < 1\}$ . Seja  $\mathcal{S}$  o conjunto das funções da forma  $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \dots$  que são analíticas e univalentes em  $\Delta$ . Seja  $z_0 \in \Delta$ . Considere a *transformação de Koebe* dada por

$$h(z) = \frac{f\left(\frac{z+z_0}{1+\bar{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)f'(z_0)}$$

Mostre que  $h$  pertence à  $\mathcal{S}$  e calcule os três primeiros termos não nulos do desenvolvimento de Taylor de  $h$  na origem.

Conclua

c) (1 pt) Se  $f$  aplica  $\Delta$  conformemente em  $\mathbb{C}$  então

$$\left| (1-|z|^2) \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\bar{z} \right| \leq 4, \quad \forall z \in \Delta.$$

**2ª Questão** (3 pts):

Considere  $f(z) = z + \sum_2^{\infty} a_n z^n$ . Assuma que

$$\sum_2^{\infty} n|a_n| \leq 1$$

a) (1 pt) Mostre que  $f$  é contínua em  $\bar{\Delta} := \{|z| \leq 1\}$ .

b) (1 pt) Mostre que  $f$  é holomorfa em  $\Delta$ .

c) (1 pt) Mostre que  $f$  aplica  $\Delta$  conformemente num domínio de Jordan.

**3ª Questão** (2 pts):

a) Encontre explicitamente uma equivalência conforme entre o semi-disco aberto  $\Omega = \{|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0\}$  e o disco unitário aberto  $\Delta$ .

**4ª Questão** (2 pts):

- 1) Seja  $f$  e  $g$  duas funções analíticas em um domínio  $\Omega$  do plano complexo que contém a origem e que não se anulam em nenhum ponto de  $\Omega$ . Seja  $a_n = \frac{2^n}{n!}$ . Suponha que

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

O que você pode dizer de  $f(z)$  e  $g(z)$ ? Justifique sua resposta com base na teoria.

### BIBLIOGRAFIA

1. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variables*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
2. Christian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps*. Springer, 1992.
3. Einar Hille. *Analytic function theory*. Dois volumes, Chelsea, Nova York, 1982.
4. Georges Valiron. *Théorie des fonctions*. Troisième édition, Masson, 1966.
5. Henri Cartan. *Teoria elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas*. Selecciones Científicas, Madrid, 1968.
6. Jean-Francois Pabion. *Éléments d'analyse complexe*. Edition Marketing, Paris, 1995.
7. John B. Conway. *Functions of one complex variable I*. Segunda edição Springer, 1995.
8. J. Gerretsen e G. Sansone. *Lectures on the theory of functions of complex variable*. Wolters-Noordhoff Publishing Groningen 1969 ( dois volumes).
9. J. Rivaud. *Séries; équations différentielles*. Vuibert, 1973.
10. K. Knopp. *Elements of the theory of functions*. Dois volumes (com dois volumes de exercícios), Dover, Nova York, 1952.
11. Lars Ahlfors. *Complex analysis*. Mc Graw-Hill, 1996.
12. Norman Levinson e Raymond M. Redheffer. *Complex variables*. Holden-Day, SãoFrancisco, 1970.

13. Patrice Tauvel. *Analyse complexe. Exercices corrigés*. Dunod, 1999.
14. Peter Henrici. *Applied computational complex analysis. Volume 2*, John Wiley & Sons, 1991.
15. Rami Shakarchi. *Problems and solutions for complex analysis*. Springer, 1999.
16. Reinhold Remmert. *Theory of complex functions*. Springer, 1991 ( *Readings in Mathematics*). *Classical topics in function theory*, Springer, 1998.
17. R. E Greene e S. G. Krantz. *Function theory of one complex variables*. John Wiley and Sons, N. Y, 1997.
18. Sristi Chatterji. *Cours d'analyse 2, Analyse complexe*. Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Suíça, 1997.
19. Stephen D. Fisher. *Complex variables*. Second Edition. Dover Public., N. Y, 1999.
20. Steven G. Krantz. *Handbook of complex variables*. Birkäuser, Boston, 1999.
21. Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Mc Graw-Hill, 1987.
22. Zeev Nehari. *Conformal mapping*. Dover, 1952.