VCOMPLEXAS- MAIO DE 2003–Lista2

Professor: Ricardo Sá Earp

PARTE A: SÉRIES DE FUNÇÕES COMPLEXAS

1) Seja $f_n(z) = 1/(z+n),\ n \in \mathbb{N}$. Mostre que

a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = 0,\ z \in \mathbb{C}$.

b) Seja $A_\alpha = \{z; \Re z \geqslant \alpha, z \notin -\mathbb{N}\}$. Mostre que $f_n \longrightarrow 0 (n \to \infty)$ uniformemente em A_a, onde α é um número real qualquer. Mais precisamente, mostre que

$$\sup_{z\in A_\alpha} |f_n(z)| \leqslant \frac{1}{\alpha+n} \qquad \text{se } n > -\alpha$$

c) Mostre que se $A = \{z; \operatorname{Im} z \geqslant 1\}$, então $f_n \not\to 0$, uniformemente em A, mostrando que $\sup_{z\in a} |f_n(z)| \geqslant 1,\ n \in \mathbb{N}$.

2) Seja $a_n(z) = 1/(z+n^2),\ n \in \mathbb{N}$. Seja $S = \{-n^2;\ n \in \mathbb{N}\}$. Considere

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z), \qquad z \notin S.$$

a) Mostre que $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n(z)| < \infty, \quad z \notin S$.

b) Mostre que a série é uniformemente convergente em A_α (cf Ex 1 b)).

c) Mostre que se $\alpha \leqslant 0$, a série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z)$ não é normalmente convergente em A_α (Ex 1 c)), mostrando que $\|a_n\|_{A_\alpha} = \infty$, para $n^2 \leqslant -\alpha$.

d) Mostre que a série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z)$ não é uniformemente convergente em A (Ex 1 c)).

e) Mostre que a série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z)$ é uniformemente convergente em todo compacto $K \subset \mathbb{C} \setminus S$; conclua que f é contínua em $\mathbb{C} \setminus S$.

f) Discuta as relações entre séries normalmente convergentes, absolutamente convergentes e uniformente convergentes. Discuta como isto foi aplicado no teorema de séries de potências que relacionou o raio de convergência da série e da série de potências obtida da original derivando-se termo a termo.

g) Considere $\mathrm{e}^z := \Sigma \dfrac{z^k}{k!} = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \cdots$. Mostre que

$$\left| \mathrm{e}^z - \sum_0^{n-1} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{2}{n!}|z|^n \qquad \text{para } n \geqslant 1 \qquad |z| \leqslant 1 + \frac{1}{2}(n-1)$$

O quê você pode concluir da estimativa acima com respeito à convergência da soma parcial da série dada por e^z ? Você tem outra maneira de ver isto ?

3) Seja X um conjunto e sejam $f_n,\ n = 1, 2, \ldots,\ f$ funções complexas definidas em X. Mostre que $f_n \xrightarrow{u} f\ (n \to \infty) \ \Leftrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$, para toda seqüência $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ em X.

4) Seja $f_n(x) = nx(1-x)^n$ $(o \leqslant x \leqslant 1,\ n = 1, 2, \ldots,)$. Verifique que as funções contínuas f_n convergem (quando $n \to \infty$) pontualmente à uma função contínua $f \equiv 0$ em $[0, 1]$, sem que a convergência seja uniforme, mostrando que

$$\|f_n\|_{[0,1]} \longrightarrow \frac{1}{e} \neq 0 \ (n \to \infty).$$

5) Sejam $a_n : X \to \mathbb{C},\ n \in \mathbb{N}$, onde X é um conjunto e $\{b_n\}$ uma seqüência monótona tendendo à zero. Seja $A_n(x) := a_0 + \cdots + a_n(x),\ x \in X$. Suponha que $\sup\limits_{n\geqslant 0} \|A_n\| < \infty$.

a) Seguindo o raciocínio do critério de Dirichlet (veja Lista 1), mostre que $\sum_n a_n(x) b_n$ converge uniformemente em X. Conclua que a série $\sum_{\nu\geqslant 1} b_\nu \cos \nu x$ (cf Lista 1) converge uniformemente em $x \in [\alpha, \beta]$, onde $0 < \alpha < \beta < \pi$.

PARTE B: SÉRIES DE POTÊNCIAS, FUNÇÕES ANALÍTICAS ELEMENTARES

1) Determine o raio de convergência das séries.s Em cada caso, indique um domínio compacto no qual a série converge normalmente.

a) $\sum_n n^\alpha z^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

b) $\sum_n n!(z/n)^n$.

c) $\sum_n \alpha^{n^2} z^n,\ \alpha \in \mathbb{C}$.

d) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n!}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)z^n,\ \alpha \in \mathbb{C}; \sum_n \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)z^n,\ \alpha \in \mathbb{C}$.

Sugestão: Considere o caso $\alpha \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,\}$ *separadamente.*

e) $\sum_n (\log n)^2 z^n$. *Resposta*: 1.

f) $\sum_n n!/(n^n) z^n$.

Sugestão: Considere a fórmula de Stirling $n! = n^n e^{-n} u_n$ com $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = 1$.
Resposta: e

2)

a) Sejam a, b, c números complexos. Suponha que c não é um inteiro $\leqslant 0$. Mostre que o raio de convergência da série abaixo é 1. Indique um domínio compacto no qual a série converge normalmente:

$$1 + \frac{ab}{c} z + \frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{2!c(c+1)} z^2 + \cdots$$
$$+ \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)\cdot b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)} z^n + \cdots$$

b) Encontre os termos de ordem $\leqslant 3$ do desenvolvimento em série de potências da função $f(z) = z^2/(z-2)$ em $z = 1$.

Resposta : $-1-(1+2)(z-1)-(1+2+1)(z-1)^2-(1+2+1)(z-1)^3$. Agora, aplicando *certa técnica* desenvolvida em sala de aula, obtenha a série de Taylor de $f(z)$ em $z = 1$. Daí calcule $f^{(n)}(1), \quad n \geqslant 0$

c) Considere

$$J(z) = \sum_0^\infty \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

Qual é o raio de convergência da série ? Indique um domínio compacto no qual a série converge normalmente.

Mostre que $J(z)$ satisfaz a equação diferencial (Veja o livro de Gerretsen-Sansone para o desenvolvimento e outros exemplos de equações lineares complexas, regulares e singulares-regulares, de segunda ordem)

$$z^2 J''(z) + zJ'(z) + z^2 J(z) = 0$$

3) Seja R o raio de convergência da série $\sum_n a_n z^n (n \in \mathbb{N})$; se $s_n = a_0 + \cdots + a_n$, $n \in \mathbb{N}$, mostre que o raio de convergência R' da série $\sum_n s_n z^n$ verifica a desigualdade $R' \geqslant \min(R, 1)$ e estaleleça que

$$\sum_n s_n z^n = \frac{1}{1-z} \sum_n a_n z^n, \qquad |z| < \min(R, 1)$$

.

4) Mostre que as séries de números complexas abaixo, convergem nos conjuntos $\mathcal{C}$ dados
   a) $\sum\limits_n (z/(1+z))^n$. $\mathcal{C} = \{z; \Re z > -1/2\}$.
   b) $\sum\limits_n z^n/(1+z^n)$. $\mathcal{C} = \{z; |z| < 1\}$.
   c) $\sum \left(\dfrac{z-1}{z+1}\right)^n$. $\mathcal{C} = \{z, \quad \Re z > 0\}$.

Classicamente, o domínio limitado pelas chamadas *curvas de Cassini*, dadas por

$$|z-a|\,|z+a| = R^2, \qquad a, R > 0$$

são chamados de domínios de Cassini. Para $a = R$, a origem é um ponto duplo, para $a > R$ tem duas componentes conexas e para $a < R$ é um domínio estrelado cujo centro é a origem.

   d) Mostre que a série $\sum\limits_n \left(\dfrac{1}{2}z(z-1)\right)^{2^n}$, converge em certo domínio de Cassini.

   O quê você pode dizer sobre *convergência normal* das séries ?

5) Seja R o raio de convergência da série $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$. Mostre que o raio de convergência $\widetilde{R}$ da série

$$\sum_{n\geqslant 0} \frac{a_n}{1+|a_n|} z^n$$

   é dado por $\widetilde{R} = \max(R, 1)$

6) Determine os raios de convergência das séries. Indique um domínio compacto no qual a série converge normalmente:
   a) $\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n 2^n z^{2n+2}$.
   b) $\sum_{n\geqslant 0} 2^{\log n} z^n$.
   c) $\sum_{n\geqslant 0}(\sin n) z^n$.

7) Seja $f(z) = \sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z-z_0)^n$ uma função dada por uma série com raio de convergência $R > 0$. Mostre que f é holomorfa em $B = B_R(z_0) = \{z;\ |z - z_0| < R\}$; além disto mostre que f admite uma primitiva em B, i.e existe F holomorfa em B tal que $F^{'}(z) = f(z)$, $\forall z \in B$. Finalmente, mostre que tal primitiva F é única, a menos de uma constante aditiva.

8) Seja $f(z) = \exp(az) + \exp(bz)$, onde a, b são constantes complexas e $z \in \mathbb{C}$. Mostre que f é periódica $\Leftrightarrow a = b = 0$ ou $b = ra$, onde r é um número real racional.

9) Mostre que
   a) $|\exp z^2| \to \infty$ se $|z| \to \infty, |\arg z| \leqslant \alpha < \pi/4$.
   b) $\cos z$ é real $\Leftrightarrow y = 0$ ou $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.
   c) $\sin z$ é imaginário puro $\Leftrightarrow x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.
   d) $\exp\left((1+i)z\right) = \sum_{n \geqslant 0} 2^{n/2} \exp\left(\frac{in\pi}{4}\right) \frac{z^n}{n!},\ \forall z \in \mathbb{C}$.
   e) $\exp(\cos z)\cos(\sin z) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{\cos nz}{n!},\ \forall z \in \mathbb{C}$. *Sugestão*: Verifique que

$$\exp(\exp \pm iz) = \sum_n \frac{\exp(\pm inz)}{n!} = \sum_n \frac{\cos nz}{n!} \pm \sum_n i\frac{\sin nz}{n!}$$

   e que $\exp(\exp \pm iz) = \exp(\cos z)\exp(\pm i \sin z)$.
   f) $\cos i + i \sin i = e^{-1}$.
   g) $\log \exp(1 + 4i) = 1 + (4 - 2\pi)i$.
   h) $\forall z \in \mathbb{C},\ |\cos z| \leqslant \cosh |z|$ e que $|\sin z| \leqslant \sinh |z|$. Deduza que para $|z| < 1, |\cos z| < 2$ e $|\sin z| \leqslant 6|z|/5$.
   i) Se $a \neq 0$, a equação $\exp(1/z) = a$, possui uma infinidade de soluções em toda vizinhança da origem. O que voce conclui disto? Que tipo de singularidades num disco perfurado $\mathcal{D}^* = \{0 < |z - z_0| < \epsilon,\ \epsilon > 0\}$, uma função holomorfa pode ter?

10) Mostrar que uma função holomorfa $f \in H(\Omega)$ definida num domínio Ω de $\mathbb{C}$ verifica $f^{'}(z) = \alpha f(z) \Leftrightarrow f(z) = ce^{\alpha z},\ z \in \mathcal{D}$, onde $c \in \mathbb{C}$. Disto conclua uma caracterização da exponencial complexa.

11)
   a) Seja $f \in H(\mathbb{C})$ uma função inteira tal que $f(0) = 1$. Mostre que se $f(z + w) = f(z)f(w),\ \forall z, w \in \mathbb{C}$; então $f(z) = e^{\alpha z},\ \forall z \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}$.
   b) Seja f uma função contínua tal que

$$f(z + w) = f(z) + f(w), \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

   Mostre que

$$f(z) = az + b\bar{z}, \qquad z \in \mathbb{C},\ \text{para},\ a, b \in \mathbb{C}.$$

12) Verificar que $\cos z = w$, implica que

$$z = -i \log \left(w \pm \sqrt{w^2 - 1} \right) + 2n\pi, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Em particular, concluir que $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é sobrejetiva.

13) Verificar que $\sin z = w$, implica que

$$z = -i \log \left(iw \pm \sqrt{1 - w^2} \right) + 2n\pi, \ n \in \mathbb{Z}.$$

Em particular, concluir que $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é sobrejetiva.

14) Verificar todas as determinações de
   a) 2^i. *Resposta*: $e^{-2n\pi}\{\cos(\log 2) + i \sin(\log 2)\}, \ n \in \mathbb{Z}$.
   b) i^i. *Resposta*: $\exp\left\{-\pi\left(2n + \frac{1}{2}\right)\right\}, \ n \in \mathbb{Z}$.

15) Encontrar todos os números a e z complexos tais que:
   a) Toda determinação de a^z são reais.
   b) Toda determinação de a^z seja de valor absoluto 1. *Sugestão*: Seja $z = x + iy, x, y$ reais e $a = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$.

16)
a) Utilizando a proposição da convergência dominada mostre que

$$\lim_{n \to \infty} (1 + z_n)^n = \exp(z),$$

se $z_n \in \mathbb{C}, \ n = 1, 2, \ldots,$ e $\lim_{n \to \infty} n z_n = z$. Em particular conclua que

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = \exp(z), \ z \in \mathbb{C}.$$

Sugestão: Escreva

$$(1 + z_n)^n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(n), \qquad a_k(n) = \binom{n}{k} z_n^k, \qquad \text{s } 0 \leqslant k \leqslant n,$$

verficar que para k fixado, $a_k(n) \longrightarrow z^k/k!$ $(n \to \infty)$ e que $|a_k(n)| \leqslant \rho^k/k!, \ \rho = \sup_n |n z_n|$.
Demonstre ainda que

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n \to \exp z \ (n \to \infty) \qquad \text{uniformemente em } z \in B_R(0)$$

para todo $R, 0 < R < \infty$

b) (*Lema da composição*) Seja X um espaço métrico, f_n uma seqüência de funções contínuas definidas em X. Suponha que f_n converge uniformemente em compactos a uma função contínua f. Mostre que e^{f_n} converge uniformemente em compactos (de X) à e^{f}.

Sugestão: Aplique a estimativa da Parte A, item 2)g).

c) Usando o item anterior mostre que a seqüência $(1+z/n)^n$ converge uniformemente em compactos à e^z.

Sugestão: Mostre que $|\log(1+w) - w| \leqslant |w|^2 \quad \text{para} \quad |w| \leqslant 1/2.$

17) Sejam $\alpha = a + ib,\ a, b$ reais e $z \in \mathbb{C}^*$. Verifique que

$$|z^\alpha| = |z|^a e^{-b \arg z}$$

deduza que

a) $\lim\limits_{z\to 0} |z^\alpha| = 0 \Leftrightarrow \Re\alpha > 0.$

b) $\lim\limits_{z\to 0} |z^\alpha| = \infty \Leftrightarrow \Re\alpha < 0.$

18) Verificar que, se $|z| < 1$,

$$\frac{1}{2} + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{2} \cdot \frac{1+z}{1-z}$$

colocando $z = re^{i\theta},\ 0 \leqslant r < 1$, deduza:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1}{2} \frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}$$

deduza ainda fórmula análoga trocando-se cos por sin na expressão a esquerda da igualdade.

19) Seja $z = x + iy$, com x, y reais. Verifique que $|\sin nz| \leqslant e^{n|y|},\ n = 1, 2, \ldots;$ deduza que $\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n} \sin nz$ converge absolutamente se $|\operatorname{Im} z| < \log 2$. Por outro lado se $|\operatorname{Im} z| \geqslant \log 2$, mostre que $|2^{-n} \sin nz| \not\to 0$, quando $n \to \infty$ (veja o exercício seguinte), de modo que $\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n} \sin nz$ diverge se $|\operatorname{Im} z| \geqslant \log 2$.

20) Mostrar que a série $\sum_{n\geqslant 1} n^{-2} \sin nz$ converge apenas para z real, mostrando que

$$|\sin nz| \geqslant \frac{1}{2}\left(e^{n|y|} - e^{-n|y|}\right),\ y = \operatorname{Im} z.$$

21) Mostre que não existe nenhuma função contínua

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \qquad \text{talque } \left(f(z)\right)^2 = z,\ \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

Sugestão: Observe que $f(z) \neq 0,\ \forall z \in \mathbb{C}^*$. Passando a $-f$ se necessário, suponha que $f(1) = 1$. Mostre que a função $z \to f(z)f(w)/f(zw)$ é continua e identicamente igual a 1. Infira daí uma contradição .

Mostre que não existe nenhum ramo contínuo de $z^{1/2}$ em $\mathbb{C}^*$, por outro lado $z \to z^{1/2}$ é holomorfa em $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$.

Conclua também que não existe nenhuma função logaritmo no domínio $\mathbb{C}^*$.

22) Verificar as afirmações abaixo com respeito a existência de uma função analítica f definida numa vizinhança (aberta) de $z = 0$.

a) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \cos n\pi,\ n = 1, 2, \ldots,$ é impossível.

b) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n} \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right),\ n = 1, 2, \ldots,$ é impossível.

c) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{n+1},\ n = 1, 2, \ldots,$ implica que $f(z) = z/(z+1)$.

d) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{n^2 \sin(\pi/n)}{n+1},\ n = 1, 2, \ldots,$ implica que $f(z) = \sin(\pi z)/z(z+1)$, com $f(0) = \pi$.

e) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = f\left(\dfrac{1}{2n}\right),\ n = 1, 2, \ldots,$ implica que f é constante.

23) As séries de Taylor de $\dfrac{z}{e^z - 1}$, $\cot z$ e $\tan z$.

a) A série de Taylor de $\dfrac{z}{e^z - 1}$ em torno da origem está definida por

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_0^\infty \frac{B_k}{k!} z^k, \quad B_k \in \mathbb{C}$$

Mostre as seguintes afirmações

i) $B_1 = 0$ e $B_{2k+1} = 0$ para $k \geqslant 1$.

ii)

$$\binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \binom{n}{2} B_2 + \cdots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0$$

Os números acima são chamados de *números de Bernouille*. Determine-os recursivamente, calculando

$$B_0 = 1,\ B_2 = 1/6,\ B_4 = -1/30,\ B_6 = 1/42$$
$$B_8 = -1/30,\ B_{10} = 5/66,\ B_{14} = 7/6$$

Curiosidade: $B_{26} = 8553103/6\ldots$

Sugestão: Considere $1 = \dfrac{e^z - 1}{z} \cdot \dfrac{z}{e^z - 1}$.

b) Mostre que

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_1^\infty (-1)^k \frac{4^k}{(2k)!} B_{2k} z^{2k-1}$$
$$\tan z = \sum_1^\infty (-1)^{k-1} \frac{4^k(4^k-1)}{(2k)!} B_{2k} z^{2k-1}$$

Discuta o raio de convergência da série de $z \cot z$.

24) Considere a série

$$f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^{3n}}{(3n)!}$$

a) Mostre que f satisfaz $f'''(z) - f(z) = 0$. Mostre ainda que $f(z) = \dfrac{1}{3}\left(e^z + 2\,e^{-z/2} \cos\dfrac{\sqrt{3}z}{2}\right)$.

i) Deduza que

$$\frac{1}{3}\Big(\cosh z + 2\cosh z/2 \cos(\sqrt{3}z/2)\Big) = \sum_0^\infty \frac{z^{6n}}{(6n)!}$$

25) Sejam a, b, k constantes reais, com $k \neq 0$. Define-se uma seqüência $\{a_n\}$ pelas relações

$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad k a_{n+2} - (1 + k^2) a_{n+1} + k a_n = 0$$

Considere a série

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n \frac{z^n}{n!}$$

a) Mostre que $f(z)$ satisfaz a uma equação diferencial linear de segunda ordem. Encontre $f(z)$ e em seguida encontre uma expressão para os a_n. Analise os casos $k = \pm 1$, separadamente.

26) Estabeleça o desenvolvimento em série de potências da função f definida por $f(z) = \displaystyle\int_0^z \frac{\mathrm{e}^{\zeta} - 1}{\zeta}\,\mathrm{d}\zeta$, determinando o raio de convergência da série. Coloque $g(z) = \displaystyle\int_1^2 \mathrm{e}^z \log z\,\mathrm{d}z$. Estabeleça uma relação entre g e certos valores de f.

27) Considere a função $f(z) = \log \dfrac{1+z}{1-z}$, $\quad |z| < 1$. Calcule $f^{(n)}(0)$, a n-ésima derivada de f na origem. Use obrigatoriamente o desenvolvimento de Taylor de f na origem para calcular, $\log \dfrac{m}{n}$, $\log 2$ e $\log |\cot z|$.

28) Considere a função $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{-z}}{1+z}$. Mostre que a n-ésima derivada de f na origem é dada por $f^{(n)}(0) = (-1)^n n! \left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)$.

29) Considere as funções

$$f(z) = \sum_0^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad g(z) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n\, a^n z^n}{b(b+a)(b+2a)\cdots(b+na)}$$

Seja $h(z) = f(z)g(z)$. Mostre que $h^{(n)}(0) = \dfrac{1}{b+na}$.

30) Escrevendo obrigatoriamente as potências e os produtos de funções trigonométricas como combinação linear de senos e cossenos, calcule a n-ésima derivada na origem das funções $f(z) = \left(\dfrac{\sin z}{z}\right)^2, z \neq 0, f(0) = 1, g(z) = \cos^3 z, h(z) = \sin 2z \cos 4z$.

31) Use obrigatoriamente o teorema de Newton-Abel para mostrar que o desenvolvimento de Taylor de $f(z) = \log \dfrac{\sqrt{1+z^2} - 1}{z^2}, f(0) = \log \dfrac{1}{2}$, na origem é

$$f(z) = \log \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 1.3 \cdots (2n-1)}{2^{n+1} n(n!)} z^{2n}$$

Determine o raio de convergência da série.

32) Fazendo a decomposição em frações parciais, encontre o desenvolvimento de Taylor das seguintes funções, na origem, determinando o raio de convergência da série: $\quad f(z) = \dfrac{z+2}{z^2+z+1}, g(z) = \dfrac{z^4}{z^4+z^2-2}$.

33) Fazendo obrigatoriamente duas deduções distintas, escreva o desenvolvimento de Taylor da função $f(z) = \dfrac{1 - z\cos a}{1 - 2z\cos a + z^2}$, na origem , determinando o raio de convergência da série. Calcule a n-ésima derivada de f na origem.

34) Mostre que

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{3z-2}{4z^2} - \frac{(1-z)^2}{2z^3} \log(1-z), \qquad |z| < 1$$

35) Mostre que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{n^2+n-2} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{z}{3}\right) + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{z^2} - z\right) \log(1-z)$$

36) Considere a série

$$g(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \Gamma(\nu + n + 1) s^{-\nu-n-1}$$

one $\Gamma = \Gamma(z)$ é a função Gamma e $\Re\nu > -1$. Considere a fórmula de Stirling que diz o seguinte (veja, por exemplo refs 15, 17):

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-1/2}\, \mathrm{e}^{-z}, \qquad \text{quando} \quad |z| \to \infty (|\arg z| \leqslant \pi - \delta, \quad 0 < \delta < \pi)$$

Assuma que a série converge para algum $s = s_0$. Mostre que o raio de convergência da série definida por

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

é infinito

37) Seja $f(z)$ uma função holomorfa em $\{|z| < 1\}$.
Considere o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ na origem dado por

$$(*) \qquad f(z) = a_0 + a_1 z + \cdots a_h z^h + \cdots$$

Seja $\omega := \mathrm{e}^{2\pi i/n}$, uma enésima raiz da unidade. Defina

$$g(z) = \frac{1}{n}\big(f(\omega z) + f(\omega^2 z) + \cdots f(\omega^n z)\big)$$

a) Qual é o domínio de convergência absoluta da série $(*)$?

b) Em que domínio compacto $(*)$ converge uniformemente ? E normalmente ?

c) Escreva o desenvolvimento de Taylor na origem de $g(z)$. Qual é o raio de convergência da série ?

d) Calcule $g^{(k)}(0)$, $k \in \mathbb{N}$.

e) Mostre que a função $F(z) = g\left(\sqrt[n]{z}\right)$ é holomorfa ("single-value") em $\{|z| < 1\}$.

38) O que você pode dizer sobre um domínio no qual a série abaixo converge ?

$$f(z) = \sum \mathrm{e}^{-n^2} \sum_{m=1}^{n-1}{}' (z - m/n)^{-1}$$

onde a soma $\sum'$, se faz quando $(m,n) = 1$, i.e quando m, n são primos entre si.

O que você pode dizer sobre o domínio em que $f(z)$ é holomorfa ?

39) Sejam $p_0(z), \ldots, p_n(z)$, polinômios em $\mathbb{C}$. Considere a equação de diferenças

$$p_0(z)w(z+n) + +p_1(z)w(z+n-1) + \cdots + p_n(z)w(z) = 0$$

Assuma que $w(z)$ é holomorfa para $\Re z > b$ e que $p_n(z) \neq 0$ para $\Re z > 0$.

Será que $w(z)$ pode ser estendida a todo plano complexo $\mathbb{C}$ como função meromorfa ? No caso afirmativo. diga quais são os pólos de $f(z)$.

40) Considere $\{a_n\}$ uma seqüência satisfazendo a equação de diferenças de segunda ordem

$$a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}, \qquad n \geqslant 1$$

com condições iniciais $a_1 = 0, a_2 = 1$.

Considere a série de potências

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n z^n$$

a) Mostre que a série define uma função holomorfa $f(z)$ numa vizinhança da origem.

b) Determine $f(z)$ numa "closed form", i.e na forma de uma fração racional.

c) Calcule $f^{(n)}(0)$, $\quad n \geqslant 0$, e calcule o raio de convergência da série.

41) O que você pode dizer sobre o raio de convergência das séries $\sum a_n z^n$, onde os coeficientes a_n estão dados abaixo ?

a) $a_n = (\sin\alpha_1 + \cdots \sin\alpha_n)^2 + (\cos\beta_1 + \cdots + \cos\beta_n)^2$, onde os α_i e os β_j são reais.

b) $a_n = \dfrac{1^k}{n^{k+1}+1} + \cdots + \dfrac{n^k}{n^{k+1}+n}, \quad k > 0.$

c) $\sqrt[n]{a_n} = \displaystyle\sum_1^n \frac{3}{3n+3p+1}.$

d) $a_n = b_{n+1} - b_n$, onde $b_1 = 1, \quad b_{n+1} = \dfrac{1}{1+b_n}.$

e) $a_n = b_n^n$, onde b_n satisfaz a equação de diferenças

i) $b_{n+1} = b_n\left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right) n \geqslant 2, \quad b_0 = b_1 = b_2 = 1.$

ii) $b_{n+1} = b_n \dfrac{n^3-1}{n^3+1}, \quad n \geqslant 2, b_0 = b_1 = b_2 = 1.$

f) $a_n = \dfrac{b_n}{n^n}$, onde b_n b_n satisfaz a equação de diferenças

$$b_{n+1} - (n+1)b_n = 2^n(n+1)! \quad b_0 = 1$$

g) a_n satisfaz a equação de diferenças de primeira ordem

$$a_{n+1}(a + by_n) = cy_n, \qquad a, b, c > 0, \quad y_0 > 0$$

h) a_n satisfaz a equação de diferenças de segunda ordem

i) $a_{n+2} + a\,a_{n+1} - a_n = L,$

ii) $a_{n+2} - a_{n+1} + a_n = 0, \qquad a_0 = 1, a_1 = 1/2.$

42) Seja $0 < a < 1$. Considere o seguinte exemplo de Fredholm

$$g(z) = \sum_0^\infty a^n z^{n^2} = 1 + az + a^2z^4 + \cdots$$

Discuta o raio de convergência da série. Discuta a univalência de $g(z)$ e a regularidade das derivadas parciais de $g(z)$ até o bordo.

43) Mostre que podemos obter um desenvolvimento em potências de $\frac{1}{z}$, convergente para $\{|z| > 1\}$, da função

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\,\mathrm{e}^{1/z}$$

chamado de *série de Laurent* de g.

44) Neste exercício você precisará fazer uso de certas *desigualdades clássicas*. Sejam $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ duas seqüência de números reais positivos satisfazendo certas condições. Considere a série de potências

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

Discuta o raio de convergência da série sabendo que a_n, α_n, β_n satisfazem às seguintes condições abaixo.

a) $a_n := (\alpha_n + \beta_n)^{\alpha_n + \beta_n}$, onde

$$\alpha_n^{\alpha_n} \beta_n^{\beta_n} = O(2^n) \qquad (n \to \infty)$$

b) $a_{n+1} := \alpha_{n+1} \beta_{n+1}^n$, onde

$$\frac{\alpha_{n+1} + n\beta_{n+1}}{n+1} = O(1) \qquad (n \to \infty)$$

c) $a_n := \left(\sum \alpha_j \cdot \sum 1/\alpha_j\right)^{-1}$.

d) $a_n := \sum \dfrac{1+\alpha_n}{1-\alpha_n}$, onde

$$\sum |\alpha_n| < \infty$$

e) $a_n := \dfrac{1}{\left(\alpha_1 + \frac{1}{\alpha_1}\right)^2 + \cdots + \left(\alpha_n + \frac{1}{\alpha_n}\right)^2}$, onde

$$\sum_1^n \frac{\alpha_j}{n} \to A, \qquad (n \to \infty)$$

45) Escreva as funções abaixo num desenvolvimento de "série de potências "em z e $\dfrac{1}{z}$, convergentes paras $|z| > 0$, chamada de *série de Laurent*. Discuta a holomorfia de $f(z)$ e verifique o *grande teorema de Picard* em cada caso.

a) $f(z) = \cos\left(\sqrt{az}\right)\,\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{bz}}\right), \quad a, b \neq 0.$

b) $f(z) = \mathrm{e}^{1/(az)+bz}, \quad a, b \neq 0.$

c) $f(z) = \cosh\left(z + \dfrac{1}{z}\right).$

PARTE C: COMPLEMENTOS

1) Lembremos que uma função f que aplica o domínio Ω sobre G é chamada *univalente* se

i) f é holomorfa em Ω

ii) f é injetiva (um-a-um) (para o momento, considere que f' nunca se anula em Ω. Veremos mais tarde que injetividade de uma função holomorfa $f : \Omega \to \mathbb{C}$ *implica* que f' nunca se anula em Ω. Este é um fato notável das variáveis complexas).

Mostre o seguinte *critério de univalência*: Seja f uma função holomorfa num *domínio convexo* Ω satisfazendo a condição :

$$\mathrm{Re} f'(z) > 0, \qquad \forall z \in \Omega$$

Conclua que

a) f é univalente em Ω.

b) Se $\Omega = \{|z| < 1\}$ e f é contínua em $\overline{\Omega}$ então $f(\Omega)$ é um domínio de Jordan (i. e $\partial\Omega$ é uma curva de Jordan).

2) Seja f uma função holomorfa em um domínio Ω que seja localmente injetiva (leia-se: f' nunca se anula. Na verdade, esta propriedade é equivalente a ser localmente injetiva, como veremos posteriormente). A *derivada Schwarziana* de f denotada por S_f está definida por

$$S_f := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

a) Mostre que se $w = T(z)$ e $w = Q(z)$ são uma aplicações de Möbius então

$$S_{T\circ f\circ Q}(z) = S_f(Q(z))Q'(z)^2$$

e assim é invariante por aplicações de Möbius, isto é $S_{T\circ f}(z) = S_f(z)$. Conclua que a derivada Schwarziana de uma aplicação de Möbius é nula. Para um teorema de existência, envolvendo equações lineares complexas de segunda ordem, veja o livro de Hille, segundo volume. A derivada Schwarziana tem papel importante na Análise Complexa.

3) Considere a *série binomial*

$$b_\sigma(z) := \sum_0^\infty \binom{\sigma}{n} z^n$$

onde

$$\binom{\sigma}{0} := 1 \qquad \binom{\sigma}{n} := \frac{\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-n+1)}{n!}$$

ou seja

$$b_\sigma(z) = 1 + \sigma z + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2} + \cdots$$

a) Deduza que b_σ é holomorfa na bola unitária aberta centrada na origem, mostrando que o raio de convergência da série que define b_σ é igual a 1. Mostre que $b_{-1} = \dfrac{1}{1+z}$, $|z| < 1$.

b) Mostre a fórmula de multiplicação :

$$(1+z)b_{\sigma-1} = b_\sigma$$

Infira que

$$b'_\sigma(z) = \sigma b_\sigma/(1+z)$$

c) Seja $\lambda(z) := \sum_1^\infty \dfrac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$. Mostre que

$$b_\sigma(z) = \mathrm{e}^{\sigma\lambda(z)}, \qquad |z| < 1$$

Deduza a fórmula de Abel-Newton

$$(1+z)^\sigma = \sum_0^\infty \binom{\sigma}{n} z^n, \qquad \forall \sigma \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1.$$

4) Considere a equação de Legendre (integral elíptica (completa) de primeira ordem. Veja o livro de Gerretsen-Sansone.)

$$K(z) := \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1 - z\sin^2\theta}}$$

a) Mostre que $K(z)$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus [1, \infty)$.

b) Mostre que para

$$K(z) = \sum_0^{\infty} (-1)^n A_n \binom{-1/2}{n} z^n$$

onde

$$A_n = \int_0^{\pi/2} \sin^{2n}\theta \,\mathrm{d}\theta, \qquad n = 0.1, 2\ldots$$

c) Mostre que $K(z)$ e $\widetilde{K}(z) := K(1-z)$ são soluções da equação

$$z(1-z)w'' + (1-2z)w' - (1/4)w = 0$$

d) Mostre que $\widetilde{K}(z) = \dfrac{4\,c}{\pi^2} \ln z\, K(z) + \varphi(z)$ onde $\varphi(z)$ é holomorfa em $z = 0$.

5) Verifique se existem funções holomorfas definidas num domínio contendo a origem que satisfaçam a condição abaixo.

a) $f(\dfrac{1}{n^2}) = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$, onde $n \in \mathbb{N}^*$.

6) Seja Ω um domínio e sejam f e g duas funções holomorfas definidas em Ω.

a) Assuma que $f(z)g(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. O quê você pode dizer de f e de g ?

b) Suponha que $f^2(z) = z$ e que $g^2(z) = z$ para todo $z \in \Omega$. O quê você pode dizer de f e de g ?

7) Seja $u = u(x + iy)$ uma função harmônica definida num domínio Ω. O quê você pode dizer do conjunto $\mathcal{C} = \{u_x = u_y = 0\}$?

PARTE D: EXAME SIMULADO

Justifique rigorosamente todos os cálculos e afirmações

1ª Questão (3 pts):

a) (1 pt) Determine o raio de convergência da série $\sum_n n!/(n^n)z^n$.
Sugestão: Considere a fórmula de Stirling $n! = n^n \mathrm{e}^{-n} u_n$ com $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = 1$.

b) (1 pt) Considere f uma função analítica e univalente em $\triangle := \{|z| < 1\}$. Seja $\mathcal{S}$ o conjunto das funções da forma $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ que são analíticas e univalentes em $\triangle$. Seja $z_0 \in \triangle$. Considere a *transformação de Koebe* dada por

$$h(z) = \frac{f\left(\dfrac{z + z_0}{1 + \overline{z}_0 z}\right) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2)\, f'(z_0)}$$

Mostre que h pertence à $\mathcal{S}$ e calcule os três primeiros termos não nulos do desenvolvimento de Taylor de h na origem.
Conclua

c) (1 pt) Se f aplica $\triangle$ conformemente em $\mathbb{C}$ então

$$\left|(1 - |z|^2)\frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\overline{z}\right| \leqslant 4, \qquad \forall z \in \triangle.$$

2ª Questão (3 pts):

Considere $f(z) = z + \sum_2^\infty a_n z^n$. Assuma que

$$\sum_2^\infty n|a_n| \leqslant 1$$

a) (1 pt) Mostre que f é contínua em $\overline{\triangle} := \{|z| \leqslant 1\}$.
b) (1 pt) Mostre que f é holomorfa em $\triangle$.
c) (1 pt) Mostre que f aplica $\triangle$ conformemente num domínio de Jordan.

3ª Questão (2 pts):

a) Encontre explicitamente uma equivalência conforme entre o semi-disco aberto $\Omega = \{|z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$ e o disco unitário aberto $\triangle$.

4ª Questão (2 pts):

1) Seja f e g duas funções analíticas em um domínio Ω do plano complexo *que contém a origem* e que não se anulam em nenhum ponto de Ω. Seja $a_n = \dfrac{2^n}{n!}$. Suponha que

$$\frac{f^{'}(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g^{'}(a_n)}{g(a_n)} \ , \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

O que você pode dizer de $f(z)$ e $g(z)$? *Justifique sua resposta com base na teoria.*

BIBLIOGRAFIA

1. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variables.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
2. Christian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps.* Springer, 1992.
3. Einar Hille. *Analytic function theory.* Dois volumes, Chelsea, Nova York, 1982.
4. Georges Valiron. *Théorie des functions.* Troisième edition, Masson, 1966.
5. Henri Cartan. *Teoria elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas.* Selecciones Cientificas, Madrid, 1968.
6. Jean-Franois Pabion. *Éléments d'analyse complexe.* Edition Marketing, Paris, 1995.
7. John B. Conway. *Functions of one complex variable I.* Segunda edição Springer, 1995.
8. J. Gerretsen e G. Sansone. *Lectures on the theory of functions of complex variable.* Wolters-Noordhoff Publishing Goningen 1969 (dois volumes).
9. J. Rivaud. *Séries; équations différentielles.* Vuibert, 1973.
10. K. Knopp.*Elements of the theory of functions.* Dois volumes (com dois volumes de exercícios), Dover, Nova York, 1952.
11. Lars Ahlfors. *Complex analysis.* Mc Graw-Hill, 1996.
12. Norman Levinson e Raymond M. Redheffer. *Complex variables.* Holden-Day, SãoFrancisco, 1970.

13. Patrice Tauvel. *Analyse complexe*. Exercices corrigés. Dunod, 1999.

14. Peter Henrici. *Applied computational complex analysis*. Volume 2, John Wiley & Sons, 1991.

15. Rami Shakarchi. *Problems and solutions for complex analysis*. Springer, 1999.

16. Reinhold Remmert. *Theory of complex functions*. Springer, 1991 (*Readinds in Mathematics*). *Classical topics in function theory*, Springer, 1998.

17. R. E Greene e S. G. Krantz. *Function theory of one complex variables*. John Wiley and Sons, N. Y, 1997.

18. Sristi Chatterji. *Cours d'analyse 2, Analyse complexe*.Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Suiça, 1997.

19. Stephen D. Fisher. *Complex variables*. Second Edition. Dover Public., N. Y, 1999.

20. Steven G. Krantz. *Handbook of complex variables*. Birkäuser, Boston, 1999.

21. Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Mc Graw-Hill,1987.

22. Zeev Nehari. *Conformal mapping*. Dover, 1952.