VCOMPLEXAS- MAIO de 2003–Lista 3

Professor: Ricardo Sá Earp

PARTE A: TRANFORMAÇÕES CONFORMES I

1) Seja $\mathbb{C}_\infty := \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Sejam z_2, z_3, z_4 pontos de $\mathbb{C}_\infty$. Defina $S : \mathbb{C}_\infty \to \mathbb{C}_\infty$ por

$$
\begin{aligned}
S(z) &:= [z, z_2, z_3, z_4] := \frac{z - z_3}{z - z_4} \cdot \frac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3} \qquad \text{bi} - \text{razão, veja Lista 1} \\
S(z) &:= [z, z_2, z_3, z_4] := \frac{z - z_3}{z - z_4} \qquad \text{se} \quad z_2 = \infty \\
S(z) &:= [z, z_2, z_3, z_4] := \frac{z_2 - z_4}{z - z_4} \qquad \text{se} \quad z_3 = \infty \\
S(z) &:= [z, z_2, z_3, z_4] := \frac{z - z_3}{z_2 - z_3} \qquad \text{se} \quad z_4 = \infty
\end{aligned}
$$

Observe que em qualquer caso $S(z_2) = 1, S(z_3) = 0, S(z_4) = 1$. Se $z_1 \in \mathbb{C}_\infty$, então fica definida a bi-razão $[z_1, z_2, z_3, z_4]$.

a) Complete a demonstração do resultado parcialmente demonstrado em sala de aula que diz o seguinte: Se z_2, z_3, z_4 são pontos distintos de $\mathbb{C}_\infty$ e w_2, w_3, w_4 são também pontos distintos de $\mathbb{C}_\infty$ então existe uma e somente uma transformação de Möbius S levando z_2, z_3, z_4 em w_2, w_3, w_4, respectivamente.

b) Mostre que se z_1, z_2, z_3, z_4 são pontos distintos de $\mathbb{C}_\infty$ então $[z_1, z_2, z_3, z_4]$ é real $\Leftrightarrow$ todos os quatros pontos estiverem num mesmo círculo ou reta (lembrando o que foi dito em sala de aula que uma reta, sob o ponto de vista da geometria conforme, é um círculo em $\mathbb{C}_\infty$).

c) Encontre uma transformação conforme T que leva conformemente a faixa infinita $\mathcal{F} = \{z; |\operatorname{Im} z| < \pi/2\}$ no disco aberto unitário $\mathcal{D}$. Mostre que a equivalência conforme pode ser dada por uma função trigonométrica complexa.

Sugestão: Procure primeiro uma transformação de Möbius que dá uma equivalência conforme entre $\{z, \operatorname{Re} z > 0\}$ e $\mathcal{D}$.

2) Sejam $\mathcal{D} = \{z, |z| < 1\}$, $\mathcal{H} = \{z, \operatorname{Im} z > 0\}$, $\mathcal{H}_- = \{z, \operatorname{Im} z < 0\}$ e $I\!R_\infty = I\!R \cup \{\infty\}$.
   a) Determine explicitamente três aplicações de Möbius T_1, T_2, T_3 tal que

$$T_1\{1, i, -i\} = \{2, 0, \infty\},\ T_2\{\infty, 2, -1\} = \{1, 0, \infty\},\ T_3\{i, 1, -i\} = \{0, 1-i, 2(1-i)\}.$$

   São únicas ?
   b) Verifique que $\forall \alpha \in I\!R^* = I\!R \setminus \{0\}$,

$$f(z) = \frac{z - \alpha}{z + \alpha}$$

   determina uma transformação conforme satisfazendo $f(I\!R_\infty) = I\!R_\infty$, de maneira que $f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, se $\alpha > 0$ e $f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_-$, se $\alpha < 0$.
   c) Verifique que uma família de transformações conformes do disco aberto $|z| < r_1$ sobre o disco aberto aberto $|z| < r_2$ é dada por

$$f(z) = cr_2 \cdot \frac{z - \alpha r_1}{r_1 - \bar{\alpha} z}$$

   onde $|c| = 1, |\alpha| < 1$. Existem outras equivalências conformes entre $|z| < r_1$ e $|z| < r_2$?
   d) Com base no exercício 4, Parte A da Lista 1, exiba uma família de aplicações de Möbius que são transformações conformes de $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{D}$. Daí obtenha uma família de equivalências conformes entre $\mathcal{D}$ e $\{z \in \mathbb{C}_\infty, |z| > 1\}$. Idem entre $\mathcal{H}$ e $\{z \in \mathbb{C}_\infty, |z| > 1\}$, levando em conta o conhecimento dado em aula de uma equivalência conforme entre $\mathcal{H}$ e $\mathcal{D}$. Você terá obtido em cada caso *todas* as transformações conformes ?
   e) Dê uma família de transformações conformes do semi-plano $\operatorname{Re} z > 0$ sobre si mesmo. Idem para transformações conformes de $\operatorname{Re} z > 0$ sobre $\mathcal{D}$. Mostre que no primeiro problema basta conhecer uma família de transformações conformes de $\mathcal{H}$ sobre si mesmo. Quanto ao segundo problema, que conhecimento adquirido em aula que é suficiente para resolvê-lo ?

3) Mostre que a transformação $f(z) = z/(z + 1)$ dá uma equivalência conforme entre o primeiro quadrante $\operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0$ e o semi-disco aberto $\{w, \operatorname{Im} w > 0, |w - 1/2| < 1/2\}$.

4) Sejam p, q pontos no plano complexo $p \neq q$. Considere

$$f(z) = \frac{z-p}{z-q}, \qquad \Gamma_k = \left\{ z, \ \left| \frac{z-p}{z-q} \right| = k \right\}, \qquad k > 0$$

Fazendo desenhos responda as seguintes questões:

a) Se $\widetilde{\Gamma_k} = f(\Gamma_k), \ \Rightarrow \widetilde{\Gamma_k} = \{w, \ |w| = k\}$.

b) A aplicação inversa g de f é dada por $g(w) = (qw - p)/(w - 1)$.

c) Como $g(\widetilde{\Gamma_k}) = \Gamma_k$, concluir que Γ_k é um círculo se $k \neq 1$, e Γ_1 é uma reta.

d) Se Λ 'e um círculo passando por p e q, então $\widetilde{\Lambda} = f(\Lambda)$ é uma reta passando por $w = 0$. A reta Λ_0 passando por p e q dá $f(\Lambda_0) = I\!R_\infty$.

e) Se $k \neq 1, \ f^{-1}(\pm k) = g(\pm k)$ determina um diâmetro de Γ_k, daí deduza que o centro z_0 de Γ_k é dado por $1/2\{g(k) + g(-k)\}$ e seu raio R é dado por $1/2|g(k) - g(-k)|$.

f) Verifique que Γ_1 é uma reta de equação paramétrica $\dfrac{p+q}{2} + \dfrac{p-q}{2} it, \ t \in I\!R$, calculando $g(-1)$ e $g(i)$.

g) Verifique que, se $0 < k < 1, \ \Gamma_k$ é um círculo contendo p no interior do disco que delimita e se $k > 1$, Γ_k é um círculo contendo q no interior do disco que delimita. *Sugestão*: Mostre que em cada caso $|p - z_0| = kR$ e $|q - z_0| = R/k$, respectivamente.
Os círculos de equação $|(z-p)/(z-q)| = k$ são chamados de círculos de *Apollonius* determinados por p e q. Os sistemas ortogonais de coordenadas determinados pelos círculos ortogonais Λ e Γ são chamados de círculos de Steiner.
Por quê são ortogonais ?

5) Mostre que o ramo principal do logaritmo $z \mapsto w = \log z$ dá uma equivalência conforme entre $\mathcal{H} := \{z, \operatorname{Im} z > 0\}$ e a faixa $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$. Obtenha daí uma equivalência conforme entre uma faixa qualquer $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}$ e o disco aberto unitário $\mathcal{D}$.

6) Mostre que a exponencial envia conformemente uma faixa (aberta) sobre um setor.

7) Mostre que $z \mapsto z^{1/2}$ leva conformemente $\mathbb{C} \setminus I\!R^- \cup \{0\}$ sobre o semi-plano $\operatorname{Re} z > 0$, e leva conformemente o semi-plano superior (aberto) sobre o primeiro quadrante .

8) Considere a função $w = u+iv = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,\ z = x+iy$.
   a) Mostre que a imagem das retas $\{y = y_0 \neq 0\}$ e $\{x = x_0,\ \sin x_0 \neq 0,\ \cos x_0 \neq 0\}$ dão elipses e hipérboles ortogonais e confocais, respectivamente. Observando que $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$, $\cos(-z) = \cos(z)$, estude as imagens das retas quando $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$ e $-\pi < x < \pi$.
   b) Mostre que $z \mapsto w = \cos z$ leva conformemente a semi-faixa aberta $\{0 < x < \pi,\ y > 0\}$ sobre o semi-plano inferior $\{\operatorname{Im} z < 0\}$. Mostre ainda que $z \mapsto w = \cos z$ envia conformente a faixa $0 < x < \pi$ sobre o domínio $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$.
   c) Considere $g(w) = \dfrac{1}{i} \log\left(w + i\sqrt{1-w^2}\right)$. Mostre que $1 - w^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow w$ é real e $|w| \geqslant 1$. Mostre que $w + i\sqrt{1-w^2} \in \mathbb{C} \setminus IR_-$ para $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$. Conclua que $w \mapsto w + i\sqrt{1-w^2}$ é holomorfa para $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$. Mostre que $\arccos x = g(x),\ \forall x \in (-1,1)$. Conclua finalmente que a inversa de $z \mapsto \cos z$ (ramo principal de $w = \arccos z$) é dada por $\arccos w = g(w),\ \forall w \in \widetilde{\mathbb{C}}$ e que $\dfrac{d}{dw}(\arccos w) = -(1-w^2)^{-1/2},\ \forall w \in \widetilde{\mathbb{C}}$.

9) Considere a aplicação f dada por $z \longrightarrow z^2$.
   a) Seja H um semi-plano aberto determinado pela reta $e^{i\theta} IR$, para θ real qualquer. Mostre que $f(H) = \mathbb{C} \setminus L, \qquad L = e^{2i\theta} IR_+$ e que $f : H \longrightarrow f(H)$ é uma transformação conforme. Determine a inversa.
   b) Seja $w = u + iv = z^2,\ z = x + iy$. Mostre que $u = u_0$ e $v = v_0$ determina duas famílias de hipérboles ortogonais. Também mostre que $x = x_0$ e $y = y_0$ determina duas famílias de parábolas ortogonais.
   c) Mostre que a imagem por f do círculo $S = \{z,\ |z-1| = 1\}$ é um cardióide. Mostre que f fornece uma equivalência conforme entre o domínio aberto delimitado pelo cardióide e o disco aberto delimitado por S.

10) Considere a aplicação

$$g(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$$

   a) Mostre que g dá uma equivalência conforme entre o semi-disco aberto aberto $A = \{z,\ \operatorname{Im} z > 0,\ |z| < 1\}$ e o semi-plano aberto $\widetilde{A} = \{w,\ \operatorname{Im} w > 0\}$.

11) Elabore um estudo da função $f(w) = \arcsin w$ definida em

$\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \Big((-\infty, -1] \cup [1, \infty) \Big)$, nos moldes que foi feito no exercício 8) para $\arccos w$, onde f é a inversa da função $z \mapsto \sin z$ restrita à $-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2$ (ramo principal de $w = \arcsin z$). Mostre que $\arcsin w = \dfrac{1}{i} \log(iw + \sqrt{1 - w^2})$, $\forall w \in \widetilde{\mathbb{C}}$ e que $\dfrac{d}{dw}(\arcsin w) = (1 - w^2)^{-1/2}$, $\forall w \in \widetilde{\mathbb{C}}$.

Sugestão: $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$.

12) Mostre que $z \mapsto w = \tan z$ envia conformemente a faixa aberta $\{-\pi/2 < \operatorname{Re} z < \pi/2\}$ sobre $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$, onde $\mathcal{L} = \{it,\ t \in \operatorname{Re},\ |t| \geqslant 1\}$. Mostre que a função inversa (ramo principal de $w = \arctan z$) é dada por $\arctan w = \dfrac{1}{2i} \log\left(\dfrac{i - w}{i + w}\right)$ e que $\dfrac{d}{dw} \arctan w = \dfrac{1}{1 + w^2}$.

13) Estude *amplamente* a função de Zhukovsky dada por $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, seguindo as seguintes linhas:
   a) Mostre que nos abertos contendo $+1$ ou -1 f não pode ser injetiva.
   b) Mostre que o grau de f é 2. "Quais são os pontos de ramificação de f?"
   c) Mostre que f não pode ser injetiva num domínio que contenha z e $1/z$ simultâneamente. Reciprocamente num domínio que contenha no máximo um dos números z, $1/z$ $(z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, mostre que f restrita a este domínio injetiva. Mostre que f é injetiva nos seguintes domínios: $\mathcal{D} \setminus \{0\}$ $V = \{z;\ |z| > 1\}$ e $\mathbb{H}^2$ (Lembremos que $\mathcal{D}$ é a bola unitária aberta e que $\mathbb{H}^2$ é o semi-plano superior).
   d) Mostre que $f : \mathcal{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus L$, onde $L = [-1, 1]$, é uma equivalência conforme . Idem para $f : V \to \mathbb{C} \setminus L$, onde $L = [-1, 1]$,
   e) Mostre que $f : \mathbb{H}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus S$, onde $S =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$, é uma equivalência conforme.
   f) Considere $A = \{z;\ |z + x_0| < 1 + x_0\}$, $B = \{z;\ |z + x_0| > 1 + x_0\}$ e $C = \{z;\ |z + x_0| = 1 + x_0\}$, onde $0 < x_0 < 1$. Faça figuras !!
   i) Seja $\tilde{C} = f(C)$. Mostre que $\tilde{C}$ é uma curva simétrica com respeito ao eixo real passando por 1 e cortando ortogonalmente a reta real no ponto $f(-1 - 2x_0)$.
   ii) Mostre que f é injetiva em C e que a curva de Jordan $\tilde{C}$ é regular, exceto no ponto 1. Mostre que $\tilde{C}$ faz um ângulo tipo "quina" em $w = 1$.
   iii) Seja D_1 o domínio limitado cuja fronteira é $\tilde{C}$ e D_2 o domínio exterior $\tilde{C}$.

Mostre que f injetiva em $V \Rightarrow f(B) \subset D_2$, $f(A \setminus \mathcal{D}) \subset D_1$, concluindo assim que $f(B) = D_2$ e $f(A \setminus \mathcal{D}) = D_1$. *Sugestão*: Use a fórmula (de maneira apropriada)

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\tilde{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\,w}{w - w_0} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0}\,\mathrm{d}\,z$$

14) Mostre que existe uma função holomorfa $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{C}$ levando o semi-plano superior $\mathbb{H}^2$ no plano complexo *sobrejetivamente*.

15) Considere Ω o domínio contido no disco de centro 1 e raio $\sqrt{2}$ satisfazendo $\operatorname{Re} z < 0$ (faça um desenho). O objetivo deste item é determinar a imagem de Ω pela aplicação

$$g(z) = \frac{2z}{1 - z^2}$$

Considere a aplicação

$$f(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

a) Estabeleça uma relação funcional entre $f(z)$, $g(z)$ e a aplicação de Cayley $z \mapsto \dfrac{z-i}{z+i}$. Será que $g(z)$ tem alguma simetria ?

b) Mostre que $g(z)$ dá uma equivalência conforme, levando Ω num certo semi-disco, determinando tal disco.

c) Fazendo um cálculo simples, independente do item (b) acima, determine o efeito de g no ponto i no que concerne o *ângulo*, calculando explicitamente o ângulo da imagem de $\partial\Omega$ na imagem de i.

PARTE B: COMPLEMENTOS

1) Considere $\varphi(z) = u(z) + iv(z)$ uma função complexa de classe C^1 definida em um domínio Ω.

a) Mostre que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = \overline{\left(\dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{z}}\right)}$

2) Suponha agora que φ seja analítica em Ω. Suponha ainda que existe uma vizinhança aberta $V \subset \Omega$, tal que $\overline{\varphi(z)} \in \Omega$, $\forall z \in V$. Mostre que $w = \overline{\varphi\left(\bar{\varphi}(z)\right)}$ é uma função holomorfa num aberto de Ω. (*Sugestão*: use o fato que uma aplicação analítica é aberta e o item anterior). Considere o conjunto

$\mathcal{A} = \{z \in V,\ \bar{z} = \varphi(z)\}$. Suponha finalmente que $a \in \mathcal{A}$ seja um ponto de acumulação de $\mathcal{A}$. Mostre que $z \equiv \overline{\varphi\left(\bar{\varphi}(z)\right)}$ em V. Conclua que $|\varphi^{'}(a)| = 1$.

3) Dê um exemplo de uma função real suave, não identicamente nula, definida em toda reta que não admite continuação analítica à nenhuma vizinhança aberta de Re em $\mathbb{C}$.

4) Seja $f(z)$ uma função analítica definida numa vizinhança da origem. Mostre que se $f(z)$ satisfaz
$$f(2z) = 2f^{'}(z) \cdot f(z)$$
então $f(z)$ é uma função inteira. Dê exemplos de funções elementares que satisfazem a igualdade acima.

5) Considere $f(z)$ uma função analítica e univalente no disco aberto unitário $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$; isto é $f(z_1) \neq f(z_2)$ se $z_1 \neq z_2$. Seja $\mathcal{D}_r = \{|z| \leqslant r\},\ 0 < r < 1$.
   a) Calcule a área A_r da imagem por f do disco fechado $\mathcal{D}_r$.
   b) Mostre que $A_r \geqslant \pi r^2 |f^{'}(0)|^2$. *Sugestão*: Use coordenadas polares e aplique a desigualdade de Cauchy-Schwarz para integrais. Você precisa usar que uma função analítica tem a propriedade da "média".
   c) Dê condição necessária e suficiente para que a área A da imagem de $\mathcal{D}$ seja *finita*. Neste caso calcule esta área. *Resp*: $A = \pi \sum_{n=0}^{\infty} n|a_n|^2$, onde $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ em $\mathcal{D}$.

6) Considere f uma função holomorfa definida numa bola centrada na origem de raio r suficientemente pequeno e que $f(z) \neq \pm 1$ nesta bola. Assuma que $f(z)$ satisfaça
$$f(2z) = \frac{2f(z)}{1 - (f(z))^2}$$
   a) Mostre que f se estende a uma função meromorfa em todo o plano complexo.
   b) Dê um exemplo não trivial de uma tal função meromorfa.

7) Mostre que a *aplicação de Koebe* dada por $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ leva conformente a bola aberta unitária (centrada na origem) sobre $\mathbb{C} \setminus \left(-\infty, -\dfrac{1}{4}\right]$. Logo, note que a imagem da bola unitária contém uma bola de raio 1/4. Isto tem um significado mais geral ?

PARTE C: EXERCÍCIOS SUPLEMENTARES E DE PESQUISA

1) Para este exercício você vai precisar utilizar o chamado *teorema de convergência de Weierstrass* que diz o seguinte: *Seja U um aberto (não vazio) de $\mathbb{C}$, e seja $\{f_n(z),\ z \in U\}$ uma seqüência de funções holomorfas definidas em U. Se $\{f_n\}$ converge uniformemente localmente em U à uma função $f : U \to \mathbb{C}$, então $f(z)$ é holomorfa e*

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z), \qquad z \in U$$

sendo a convergência uniforme em compactos de U. Para demonstrar este resultado você terá que saber da teoria da integração complexa, incluindo a fórmula de Cauchy e variantes. Assumindo isto demonstre o seguinte:

a) Mostre que a série

$$\zeta(z) := \sum_{n\geqslant 1} n^{-z}$$

converge normalmente no semi-plano $\Re z \geqslant a > 1$, definindo uma função holomorfa $\zeta(z)$, chamada de *função zeta de Riemann* no semi-plano aberto $\Re z > 1$.

Nota: i) Existe uma relação entre os números de Bernouille (veja Lista 2, parte B, exerc. 23)) e a função zeta de Riemann

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!\,\zeta(2n)}{2^{2n-1}\pi^{2n}}$$

ii) A função zeta de Riemann admite um prolongamento analítico à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, sendo $z = 1$ um pólo simples de resíduo 1.

iii) A *hipótese de Riemann* é um dos *problemas do milênio* que diz o seguinte: "Os zeros de $\zeta(z)$ na faixa crítica $0 \leqslant \Re z \leqslant 1$ estão todos na reta $\Re z = \dfrac{1}{2}$ (já se sabe que existem uma infinidade de tais zeros)"

iv) A *função Gamma*, denotada por $\Gamma(z)$, (veja Lista 5, parte D, exerc. 5)d)) é uma função holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, sendo $-n$, $n \in \mathbb{N}$ um pólo simples com resíduo $(-1)^n/n!$. A função $\Gamma(z)$ é a única limitada na faixa $1 \leqslant \Re z < 2$ que satisfaz a seguinte relação funcional

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z), \qquad \Gamma(1) = 1$$

Note que a função $\Gamma(z)$ é a continuação analítica da função fatorial $\Gamma(n) = (n-1)!$

A relação de Riemann relaciona as funções Zeta e Gamma:

$$\zeta(z) = (2\pi)^z\,\Gamma(1-z)\,\frac{\sin(\pi z/2)}{\pi}\,\zeta(1-z)$$

b) Considere as chamadas *séries de Dirichlet* $\sum a_n\,\mathrm{e}^{-\lambda_n z}$, $a_n \in \mathbb{C}, \lambda_1 < \lambda_2 < \cdots \to \infty$. Dê condições suficientes sobre os coeficientes a_n e sobre λ_n para que a série convirja.

c) O quê você pode dizer sobre o domínio no qual as funções $f(z)$ e $g(z)$ abaixo são holomorfas ?

i)

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2} {\sum_{m=1}^{n-1}}' \left(z - \frac{m}{n}\right)^{-1}$$

ii)

$$g(z) = \sum_{n=2}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2} {\sum_{m=1}^{n-1}}' \left(z - \mathrm{e}^{2\pi i m/n}\right)^{-1}$$

onde o símblo ${\sum}'$ significa soma quando $(m,n) = 1$, ou seja m, n são primos entre si.

d) Sejam $f(z)$ e $g(z)$ duas funções inteiras. Mostre que existe uma seqüência $h_n(z)$ de funções holomorfas em $\mathbb{C} \setminus \{|z| = 1\}$ que converge uniformente em compactos à $f(z)$ para $|z| < 1$ e à $g(z)$ para $|z| > 1$.

e) Mostre que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} = \frac{z}{1-z}, \qquad |z| < 1$$

O quê acontece com a série acima para $|z| > 1$? E para $|z| = 1$?

f) O quê você pode dizer da convergência da série

$$\sum_{2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z - n\ln n}$$

entendendo que fixando um compacto $K \subset \mathbb{C}$ a convergência da série acima, significa a convergência da série obtida omitindo-se os termos com $\ln n \in K$.

2) (*singularidades de uma função analítica*) neste exercício você deve estar familiarizado com as noções de *pólos*, de funções meromorfas e de *singularidades essenciais*.
   a) Dê um exemplo de uma singularidade de uma fumção analítica definida num aberto do plano complexo que seja um ponto de acumulação de pólos.
   b) Idem para um ponto de acumulação de singularidades essenciais.
   c) Dê um exemplo de função meromorfa no plano complexo $\mathbb{C}$ que admita pólos simples nos pontos $\ln 2, \ln 3, \ldots$. Idem para os pontos $\ln(\ln 2), \ln(\ln 2), \ldots$
3) Considere a equação de diferenças

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad n \geqslant 2$$

satisfazendo as condições iniciais $a_0 = a_1 = 1$. Esta é uma equação linear de diferenças de segunda ordem com coeficientes constantes. Você deveria saber resolver isto com os métodos do Cálculo IV! Vamos propor outra solução via a teoria das funções analíticas. À propósito: Tal seqüência é chamada de *seqüência de Fibonacci*.
   a) Mostre que $A(z) := \sum a_n z^n$ tem raio de convergência $R > 0$.
   b) Mostre que $A(z) = \dfrac{1}{1 - z - z^2}$, concluindo que $A(z)$ tem raio de convergência $R = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.
   c) Mostre que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^{n+1}\right)$$

O número $\frac{1+\sqrt{5}}{2} =\approx 1,618\ldots$ é o número áureo dos gregos da antiguidade.
4) (*continuação analítica*) Exercício-pesquisa: Formule rigorosamente e demonstre a chamada *lei da permanência das equações funcionais*

$$F(z; f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z)) = 0$$

"Continuações analíticas de soluções de uma equação funcional são soluções da continuação analítica da equação "
Como aplicações demonstre o seguinte

a) Enuncie e demonstre o seguinte fato: "A derivada da continuação analítica de uma função é a continuação analítica da derivada da função "
b) Idem para o seguinte fato: "A inversa da continuação analítica é a continuação analítica da inversa"

5) (*domínio de holomorfia*). Para fazer este exercí cio você tem que está consciente do seguinte fato: Seja $f(z)$ uma função holomorfa num aberto U e seja $c \in U$. Considere $B_R(c)$ um disco aberto inteiramente contido em U. Segue que a série de Taylor de $f(z)$ em $z = c$, dada por $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n$, converge em todos os pontos de $B_R(c)$, ou seja o seu raio de convergência ρ, satisfaz $\rho \geqslant R$. Além disso

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(c)}{n!}(z-c)^n \qquad \forall z \in B_R(c)$$

Você também terá que conhecer as noções de *domínio de holomorfia* e *domínio máximo de existência*.

Por definição dizemos que um domínio Ω é o domínio de holomorfia de uma função holomorfa $f(z)$, se para todo ponto $c \in \Omega$, o disco de convergência da séria de Taylor de f está inteiramente contido em Ω. Por definição dizemos que Ω é o domínio máximo de existência de f, se f não pode ser prolongada analíticamente *para além de* Ω; ou seja, se não pode ser estendida à uma vizinhança de um ponto do bordo de Ω. Dado uma função holomorfa $f(z)$ num domínio Ω, dizemos que $\zeta \in \partial\Omega$ é um *ponto singular* de f se $f(z)$ não pode ser prolongada analíticamente à uma função holomorfa *para além de* ζ, ou seja se não pode ser prolongada analíticamente à uma vizinhança de ζ.

a) Mostre que se Ω é o domínio de holomorfia de f então Ω é o domínio máximo de existência de f.
b) Estude em todo o plano complexo $\mathbb{C}$ a convergência das séries, os pontos singulares e o domínio de holomorfia das funções $f(z)$ abaixo.
   i) $f(z) = \sum_{n\geqslant 0} z^n = \dfrac{1}{1-z}, \qquad |z| < 1$
   ii) $f(z) = \sum_{n\geqslant 1} \dfrac{z^n}{n} = -\ln(1-z), \qquad |z| < 1$
   iii) $f(z) = \sum_{n\geqslant 2} \dfrac{z^n}{n(n-1)} = (1-z)\left(\ln(1-z) - 1\right), \qquad |z| < 1$

c) Estudando as funções multivalentes $w = \log z$ e $w = \sqrt{z}$ mostre que existem domínios Ω que são o domínio máximo de existência , mas que não são o domínio de holomorfia. Verifique que tal conceito embute idéias finas de continuação analítica que levam naturalmente ao conceito de superfícies de Riemann.

d) Mostre que no bordo do disco de convergrñcia de uma série de potências $\sum a_n(z-c)^n$, existe pelo menos um ponto singular.

e) Mostre que para $\Omega = B_R(c)$ um disco aberto de raio R, os conceitos de domínio de holomorfia e domínio máximo de existência coincidem. Verifique que $B_1(0)$, é o domínio de holomorfia das funções holomorfas $f(z) = \sum z^{2^n}$, e $g(z) = \sum z^{n!}$.

f) (*construção de Goursat*). Seja dada uma seqüência $\{a_n\}$ de números complexos não nulos tais que $\sum |a_n| < \infty$, e seja dada uma outra seqüência composta de números dois a dois distintos $b_1, b_2 \ldots$. Seja K o fecho em $\mathbb{C}$ do conjunto $\{b_1, b_2, \ldots\}$.

i) Mostre que a série
$$f(z) = \sum\nolimits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{z-b_n}$$
converge normalmente em $\mathbb{C} \setminus K$.

ii) Seja B um disco inteiramante contido em $\mathbb{C} \setminus K$ tal que um elemento b_k da seqüência $\{b_n\}$ entá em ∂B. Mostre que $\lim_{w \to b_k} f(w) = \infty$, quando w se aproxima de b_k radialmente

iii) Seja a um número complexo $|a| > 1$. Seja $\omega \in I\!R \setminus \mathbb{Q}\pi$. Mostre que o domínio de holomorfia da série
$$f(z) := \sum\nolimits_{1}^{\infty} \frac{a^{-n}}{z - \mathrm{e}^{in\omega}}$$
é o disco $B_1(0)$.

iv) Mostre que o domínio de holomorfia de
$$f(z) = \sum\nolimits_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{\mathrm{e}^{1+in} - 1}$$
é o disco $B_1(0)$. *Sugestão* : Considere a série de Taylor da "série de Goursat" $\sum a_n/(z-b_n)$, em torno de $z = 0$, com $b_n = \mathrm{e}^{in}$ e $a_n = -\mathrm{e}^{-n+in}$.

g) Seja $\sum a_n z^n$, uma série de potências que tem raio de convergência $\rho > 0$. Assuma que todos, exceto possivelmente finitos coeficientes $a_n' s$ são reais não negativos. Mostre que $z = \rho$ é um ponto singular de $f(z)$. *Sugestão*: Considere a série de Taylor centrada em $z = 1/2$, e mostre que se, por absurdo $z = \rho$ não é ponto singular, então a série de Taylor centrada em $z = 1/2$ terá raio de convergência estritamente $> 1/2$, o que levará a uma contradição com o resultado obtido no item d).

Para fazer o próximo exercício, você vai ter que saber do *teorema de "gap" de Hadamard* sobre as séries lacunárias de Hadamard:

h) Exercício pesquisa (*Remmert*). Estude a série

$$f(z) = 1 + 2z + \sum 2^{-n^2} z^{2^n}, \qquad |z| < 1$$

6) Considere dois discos abertos $D_1 = B_r(a)$ e $D_2 = B_R(c)$. Suponha que tenham interseção não vazia, i.e $\Omega := D_1 \cap D_2 \neq \emptyset$. Exiba explicitamente uma equivalência conforme entre Ω e o disco aberto $B_1(0)$ de raio 1.
7) Reveja o conceito de *derivada Schwarziana* definido la lista 2, parte C) item 2). Vamos agora abordar o importante conceito da teoria de aplicações univalentes: A *transformação de Koebe h*. Seja f uma função holomorfa e univalente definida no disco unitário aberto $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$. Seja $z_0 \in \mathcal{D}$, então h está definida por

$$h(z) := \frac{f\left(\dfrac{z + z_0}{1 + \overline{z_0} z}\right) - f(z_0)}{(1 - |z_0|^2)\, f'(z_0)} = z + \left(\frac{1}{2}\left(1 - |z_0|^2\right) \frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \overline{z_0}\right) z^2 + \cdots$$

Note que f pertence a classe $\mathcal{S}$ (*schlicht functions*) consistindo das funções analíticas e univalentes em $\mathcal{D}$ da forma

$$f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$$

Lembremos ainda a conjectura de Bieberbach demonstrada por de Branges em 1985 que diz o seguinte

$$(B) \qquad |a_n| \leqslant n \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{S}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

a) Mostre que se f leva conformemente $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C}$ então

$$(*) \qquad \left|\left(1-|z|^2\right)\frac{f''(z)}{f'(z)}-2\overline{z}\right| \leqslant 4, \qquad \text{para} \;\; z \in \mathcal{D}$$

A classe Σ consiste das funções $g(z)$ definidas no disco perfurado $\mathcal{D}^*$ satisfazendo

$$g(\zeta)=\zeta+b_0+b_1\zeta^{-1}+\cdots (|\zeta|>1)$$

b) Mostre que a igualdade em (B) vale para a função de Koebe $f_0(z)=\dfrac{z}{(1-z)^2}$. Estude a função de Koebe f_0 mostrando que a imagem por f_0 de $\mathcal{D}$ contém a bola aberta $\mathcal{B}$ de raio $1/4$ centrada na origem (que você já deveria ter feito antes no exercício 7) da parte B) desta lista. Esta é uma propriedade satisfeita por todas as funções *schlicht*. No caso da função de Koebe $f_0(z)$ tal bola $\mathcal{B}$ é extremal ?

c) Mostre que se $f \in \mathcal{S}$ então $g(\zeta):=1/f(\zeta^{-1})$satisfaz

$$g(\zeta)=\zeta-a_2+(a_2^2-a_3)\zeta^{-1}+\cdots (|\zeta|>1)$$

concluindo que g pertence a Σ e que omite 0. Reciprocamente, mostre que se $g \in \Sigma$ e $g(\zeta)\neq 0$ para $\zeta \in \mathcal{D}^*$, então

$$f(z)=1/g(z^{-1})=z-b_0z^2+\left(b_0^2-b_1\right)z^3+\cdots (|z|<1)$$

pertence à $\mathcal{S}$.

d) Mostre o *teorema da área*

$$\operatorname{dist}\left(\mathbb{C}\setminus g(\mathcal{D}^*)\right)=\pi\left(1-\sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right) \qquad \text{para} \;\; g\in\Sigma$$

inferindo

$$|b_1| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqslant 1 \qquad \text{para} \;\; g \in \Sigma$$

Nota : Segue do teorema da área o caso particular do teorema de de Branges $|a_2|\leqslant 2$.

e) Mostre que se f é uma função schlicht então $|a_2^2-a_3|\leqslant 1$. Deduza daí que se f leva conformemente $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C}$, então a derivada Schwarziana S_f de f satisfaz

$$|S_f(z)| \leqslant 6\left(1-|z|^2\right)^{-2}$$

onde (repetimos) $S_f(z) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\dfrac{f''(z)}{f'(z)} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2.$

Nota: O *critério de univalência de Nehari diz o seguinte*

Seja f uma função meromorfa e localmente univalente em $B_1(0)$. Se

$$|S_f(z)| \leqslant \frac{2}{(1-|z|^2)^2} \qquad \forall z \in B_1(0)$$

então f é univalente em $B_1(0)$. A constante 2 é a melhor posível (exemplo de Hille). Se $f(0) \in \mathbb{C}$, e $f''(0) = 0$, então f não tem pólos.

Nota: O *teorema de distorção de Koebe* diz o seguinte: Seja $f : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ uma aplicação conforme que leva $\mathcal{D}$ no plano complexo $\mathbb{C}$. Para $z \in \mathcal{D}$ valem as seguinte desigualdades

$$|f'(0)|\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |f(z) - f(0)| \leqslant |f'(0)|\frac{|z|}{(1-|z|)^2} \tag{2}$$

$$|f'(0)|\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant |f'(0)|\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \tag{3}$$

Nota Dada uma função holomorfa $p(z)$, a função geral $f(z)$ com derivada Schwarziana $S_f(z) = 2p(z)$ tem a forma

$$f(z) = \frac{g_1(z)}{g_2(z)}$$

onde g_1 e g_2 são soluções linearmente independentes da equação diferencial ordinária linear de segunda ordem

$$g''(z) + p(z)g(z) = 0$$

e isto é um pouco surpreendente já que a equação da derivada Scwarziana é uma equacão não linear de terceira ordem. Você saberia demonstrar a afirmação acima que liga a derivada Scwarziana a uma equação linear ?

BIBLIOGRAFIA

1. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variables.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.

2. Christian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps.* Springer, 1992.

3. Einar Hille. *Analytic function theory.* Dois volumes, Chelsea, Nova York, 1982.

4. Georges Valiron. *Théorie des functions.* Troisième edition, Masson, 1966.

5. Henri Cartan. *Teoria elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas.* Selecciones Cientificas, Madrid, 1968.

6. Jean-Franois Pabion. *Éléments d'analyse complexe.* Edition Marketing, Paris, 1995.

7. John B. Conway. *Functions of one complex variable I.* Segunda edição Springer, 1995.

8. J. Gerretsen e G. Sansone. *Lectures on the theory of functions of complex variable.* Wolters-Noordhoff Publishing Goningen 1969 (dois volumes).

9. K. Knopp.*Elements of the theory of functions.* Dois volumes (com dois volumes de exercícios), Dover, Nova York, 1952.

10. Lars Ahlfors. *Complex analysis.* Mc Graw-Hill, 1996.

11. Norman Levinson e Raymond M. Redheffer. *Complex variables.* Holden-Day, São Francisco, 1970.

12. Patrice Tauvel. *Analyse complexe.* Exercices corrigés. Dunod, 1999.

13. Rami Shakarchi. *Problems and solutions for complex analysis.* Springer, 1999.

14. Reinhold Remmert. *Theory of complex functions.* Springer, 1991 (*Readinds in Mathematics*). *Classical topics in complex function theory*, Springer 1998.

15. R. E Greene e S. G. Krantz. *Function theory of one complex variables.* John Wiley and Sons, N. Y, 1997.

16. Sristi Chatterji. *Cours d'analyse 2, Analyse complexe.*Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Suiça, 1997.

17. Stephen D. Fisher. *Complex variables.* Second Edition. Dover Public., N. Y, 1999.

18. Steven G. Krantz. *Handbook of complex variables.* Birkäuser, Boston, 1999.

19. Walter Rudin. *Real and complex analysis.* Mc Graw-Hill,1987.