

VCOMPLEXAS- JULHO de 2003–Lista 4

Professor: Ricardo Sá Earp

PARTE A: INTEGRAÇÃO COMPLEXA

1) Calcular

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$

quando γ é um círculo orientado positivamente (e simplesmente) dado por

a) $|z| = 1/2$. *Resp:* $2\pi i$

b) $|z - 1| = 1/2$. *Resp:* $-i\pi e$

c) $|z| = 2$. Dê uma fórmula que relacione a integral do item c) com as integrais dos itens a) e b). Justifique sua resposta tanto geometricamente como analiticamente. *Resp:* $i\pi(2 - e)$

d) $2(\cos \theta)^n + i2(\sin \theta)^n$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

2) Suponha que $f(z)$ seja analítica num aberto contendo a curva fechada γ . Mostre que

$$\int_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz$$

é um número imaginário puro.

3) Suponha que $f(z)$ seja analítica e que satisfaça $|f(z) - 1| < 1$ em um domínio Ω . Mostre que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0,$$

para toda curva fechada, seccionalmente C^1 , em Ω .

4) Se $P(z)$ é um polinômio e C denota o círculo $|z - a| = R$, calcule $\int_C P(z) d\bar{z}$.
Resp: $-2i\pi R^2 P'(a)$.

5) Seja γ uma curva C^1 por partes e seja $\bar{\gamma}$ sua imagem obtida pela aplicação $z \rightarrow \bar{z}$. Suponha que $f(z)$ seja uma função contínua sobre γ .

a) Mostre que $z \rightarrow \overline{f(\bar{z})}$ é contínua sobre $\bar{\gamma}$ e tem-se que

$$\overline{\int_{\gamma} f(z) dz} = \int_{\bar{\gamma}} \overline{f(\bar{z})} dz = \int_{\gamma} \overline{f(z)} d\bar{z}$$

Se γ é uma curva simples fechada contida no disco aberto unitário \mathcal{D} e $f(z)$ é uma função analítica em \mathcal{D} , o que voce pode dizer da integral do meio ? Sempre se anula ? A função $z \rightarrow \overline{f(\bar{z})}$ é holomorfa em $\bar{\mathcal{D}}$? Compare com o exercício 1)d) Parte B, Lista 1!

- b) Em particular, se γ é o círculo unitário positivamente orientado, mostre que

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z) dz} = - \int_{|z|=1} \overline{f(z)} \frac{dz}{z^2}$$

Cuidado com a orientação ? Nas duas fórmulas acima o círculo γ está positivamente orientado!!

- 6) Considere a série dada por

$$f(z) := \sum_0^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} := \sum f_n(z)$$

- a) Mostre que $f(z)$ determina uma função holomorfa definida no disco unitário $B_1(0)$ mostrando que a série converge normalmente em compactos de $B_1(0)$.
- b) Mostre que $f(z) = \frac{z}{1-z}$.
- c) Determine a classe de curvas fechadas γ tais que o valor da integral $\int_{\gamma} f_n(z) dz$ é não nulo.
- 7) Seja f uma função contínua num domínio Ω . Seja γ uma curva regular (por partes) parametrizada pelo comprimento de arco s , cujo traço esteja contido em Ω . Seja \mathbf{T} o vetor velocidade de γ e seja \mathbf{n} um dado campo de vetores normal unitário ao longo de γ . Dizemos que o *fluxo* ou campo dado por $z \mapsto f(z)$ é nulo (f é então chamado de *fluxless*) se

$$\int_{\gamma} f \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

para toda curva simples (C^1 por partes) e fechada γ em Ω . Dizemos que o campo que $z \mapsto f(z)$ é conservativo (ou *irrotational*) se

$$\int_{\gamma} f \cdot \mathbf{T} ds = 0$$

para toda curva simples (C^1 por partes) e fechada γ em Ω . Mostre que se um fluxo (ou campo) $z \mapsto f(z)$ em um domínio Ω é simultaneamente *fluxless* e conservativo então $f(z)$ é uma função anti-holomorfa em Ω .

- 8) Seja $f(z)$ uma função holomorfa em $|z| < R$, $R > 1$. Calcule de duas maneiras distintas as integrais

$$\int_{|z|=1} \left[2 \pm \left(z + \frac{1}{z} \right) \right] \frac{f(z)}{z} dz,$$

obtendo as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2} d\theta &= 2f(0) + f'(0) \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \sin^2 \frac{\theta}{2} d\theta &= 2f(0) - f'(0) \end{aligned}$$

- 9) Mostre que se $f(z)$ é holomorfa em um aberto que contenha o disco fechado $|z| \leq 1$ então vale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\bar{f}(z)}{z-a} dz = \begin{cases} \bar{f}(0) & \text{se } |a| < 1, \\ \bar{f}(0) - \bar{f}(1/\bar{a}) & \text{se } |a| > 1, \end{cases}$$

Sugestão: Use o exercício 5 b) e a fórmula de Cauchy.

- 10) Verifique que

$$\int_a^b \frac{dt}{z-it} = i\{\log(z-ib) - \log(z-ia)\}$$

onde $-\infty < a < b < \infty$, $\Re z > 0$. Conclua que

$$\int_a^b \frac{x dt}{x^2 + (y-t)^2} = \arctan \left(\frac{y-a}{x} \right) - \arctan \left(\frac{y-b}{x} \right).$$

- 11) Calcular

- $\int_{\gamma} z dz$
- $\int_{\gamma} \bar{z} dz$
- $\int_{\gamma} \Re z dz$ onde γ é o caminho poligonal $0 \rightarrow (1+i) \rightarrow 2$.

- 12) Calcule a integral $\int_{\gamma} z^{\alpha} dz$, $\alpha \in \mathbb{C}$, nos seguintes casos:

- γ é o semi-círculo indo de 1 à -1 no semi-plano superior (ou $\text{Im } z \geq 0$).

- b) γ é o semi-círculo indo de 1 à -1 no semi-plano inferior.
 c) γ é o círculo de centro 0 e raio 1. *Resp:* $\frac{2i}{\alpha+1} \sin(\alpha+1)\pi$, se $\alpha \neq -1$, $2\pi i$, se $\alpha = -1$. Para qual ramo de z^α vale esta resposta? Para que valores de α temos o valor 0?

13) Mostre com todos os detalhes que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^4+1} \right| \leq \frac{2\pi R}{R^4-1}$$

onde γ é o círculo $|z| = R$, $R > 1$.

14) Sabendo-se que $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$, se γ é uma curva simples fechada positivamente orientada (e portanto de índice 1) verifique às seguintes fórmulas

a)
$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab},$$

onde o traço de γ é a elipse de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

b)
$$\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t \cos^2 t}{\cos^6 t + \sin^6 t} dt = \frac{2\pi}{3}$$

onde γ descreve o astróide dado por $t \mapsto \cos^3 t + i \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

15) Calcule

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)(z-1/a)}, \quad a \neq 0, |a| \neq 1.$$

Use o resultado acima para calcular

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos t + a^2}.$$

16) Seja $f(z)$ uma função holomorfa definida num disco de raio R , $R > 0$ centrado na origem. Suponha que $f(0)$ seja real. Mostre que para $0 < r < R$ e $|z| < r$ tem-se que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re f(re^{it}) \frac{r e^{it} + z}{r e^{it} - z} dt$$

a) Conclua que se $g = \Re f$ então vale a fórmula de Poisson

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{it}) \frac{r^2 - |z|^2}{|r e^{it} - z|^2} dt$$

- b) Escreva a função g do item a) como soma de uma função holomorfa e de uma função anti-holomorfa e re-obtenha que g é harmônica para $|z| < r$.
Sugestão : Escreva

$$\frac{r^2 - |z|^2}{|r e^{it} - z|^2} = \frac{r e^{it}}{r e^{it} - z} + \frac{r e^{-it}}{r e^{-it} - \bar{z}} - 1$$

- c) (*Desigualdade de Harnack*) Seja $g(z)$ uma função harmônica não negativa definida num disco de raio R , $R > 0$ centrado na origem. Mostre que para $0 < r < R$ e $|z| < r$ tem-se que

$$\frac{r - |z|}{r + |z|} \cdot g(0) \leq g(z) \leq \frac{r + |z|}{r - |z|} \cdot g(0)$$

- d) (*Princípio de Harnack*) Aplique a desigualdade de Harnack para demonstrar o princípio de Harnack: Seja $u_1 \leq u_2 \leq \dots$ uma seqüência crescente de funções harmônicas definidas num domínio Ω . Mostre que ou bem $u_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) uniformemente em compactos, ou bem existe uma função harmônica u em Ω tal que $u_n \rightarrow u$ ($n \rightarrow \infty$) uniformemente em compactos de Ω .
- e) Uma função real contínua f num aberto $U \subset \mathbb{C}$ é chamada de sub-harmônica se satisfaz a *desigualdade da média*, i. e se o fecho de um disco de raio R e centro p está inteiramente contido em U , então

$$f(p) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + e^{it}) dt$$

Nota: Uma função f de classe C^2 é sub-harmônica, sse $\Delta f \geq 0$.

- i) Mostre que se $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ é harmônica, então $f := |g|$ é sub-harmônica. Será $|g|$ harmônica ?
- ii) Mostre que se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica e se $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não decrescente e convexa então $\varphi \circ f$ é sub-harmônica. *Sugestão* : Aplique a desigualdade de Jensen (veja Rudin, ref. 20). Conclua que e^f é sub-harmônica e f^2 é sub-harmônica de f é não negativa em U .
- iii) Mostre que se f é holomorfa em U e $p > 0$ então $|f|^p$ é sub-harmônica. Agora suponha que f seja harmônica. Mostre que $|f|^p$ é sub-harmônica quando $p \geq 1$.

- 17) Seja $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$ uma série cujo raio de convergência é 1. Suponha que $|f(z)|(1 - |z|) \leq 1$ para todo z tal que $|z| < 1$. Mostre que para todo inteiro positivo tem-se que

$$|a_n| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) < e(n+1)$$

- 18) Seja \mathcal{D} a bola unitária aberta de raio 1 centrada na origem. Sejam $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$ e $g(z) = \sum_0^{\infty} b_n z^n$ duas funções holomorfas definidas em \mathcal{D} , satisfazendo $f(0) = g(0) = 0$.

a) Mostre que as séries

$$F(z) = \sum_0^{\infty} a_n g(z^n) \quad G(z) = \sum_0^{\infty} b_n f(z^n)$$

são normalmente convergentes em qualquer subconjunto compacto de \mathcal{D} . Estabeleça o desenvolvimento de F e G na origem e conclua que $F(z) = G(z)$ para todo $z \in \mathcal{D}$.

b) Seja \log a determinação principal do logaritmo. Estabeleça que

$$\sum_1^{\infty} \log(1 + z^n) = \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{z^n}{1 - z^n}, \quad \sum_1^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{z^n}{1 - z^n} = \sum_1^{\infty} \frac{z^n}{1 + z^n}$$

- 19) Mostre que $I(z) = \int_{|\zeta - z_0|=R} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$ satisfaz

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial I}{\partial z}(z) = 0$$

concluindo que $I(z)$ não depende de z e que $I(z) = 2\pi i$.

- 20) Seja f uma função contínua no círculo $S^1 = \{|z| = 1\}$. Defina

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } |z| = 1, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta & \text{se } |z| < 1 \end{cases}$$

Será F contínua em $\{|z| \leq 1\}$?

21) Neste exercício você vai trabalhar com ramos de funções multivalentes e integração complexa.

a) Considere a função *multivalente*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z(z-1)}}$$

- i) Mostre que pode-se definir um *ramo* de $f(z)$ no domínio $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$.
- ii) Usando um resultado dado em sala de aula, calcule a integral

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{\sqrt{z(z-1)}} dz$$

b) Idem para $f(z) = \frac{1}{\sqrt{21z^2 - 10z + 1}}$, e o contorno $|z| = 1$.

Para atingir o *rigor* matemático você precisará aplicar a fórmula de Newton -Abel, convenientemente. No mesmo espírito, calcule

$$\int_{|z|=R} \frac{z}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} dz$$

para $a, b \in \mathbb{C}$ e R suficientemente grande.

22)

a) Encontre os desenvolvimentos de Laurent e os resíduos das funções abaixo, numa vizinhança perfurada de cada singularidade.

i) $f(z) = \frac{1}{1 - \cos z}$.

ii) $= \frac{2 + 3z}{1 - e^z}$.

iii) $\frac{z-1}{z^5-1}$.

iv) $\frac{e^{iaz}}{4+z^2}$.

v) (neste exemplo restrinja-se às singularidades contidas no semi-plano superior)

$$\frac{\left(\log z - \log 2 - \frac{i\pi}{2}\right)^2}{4 + z^2}$$

onde o ramo do logaritmo está tomado retirando-se o semi-eixo imaginário negativo, com o argumento variando entre $-\pi/2$ e $3\pi/2$.

vi) (neste exemplo restrinja-se às singularidades contidas no semi-plano superior)

$$\frac{\log z - \log 2 - i\pi/2}{(z^2 + 4)^2}$$

onde tomamos o mesmo ramo do exemplo anterior.

b) Para cada um dos exemplos dado nos itens i) a vi) do item a) acima, calcule

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{z^{2003}} dz$$

onde γ é uma curva simples fechada positivamente orientada, em torno de uma singularidade de $f(z)$, sem passar por uma singularidade de $f(z)$, com γ bordando um domínio Ω , de maneira que $\bar{\Omega}$ contém apenas uma única singularidade de $f(z)$.

23) Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{1-z} e^{1/z}$$

- a) Obtenha o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no anel $|z| > 1$.
 b) Obtenha o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no anel $0 < |z| < 1$.
 Calcule o resíduo, e em seguida avalie a integral

$$\int_{|z|=1/2} \frac{f(z)}{z^{2003}} dz$$

24) Escreva o desenvolvimento de Laurent de

$$f(z) = e^{1/(z-1)}$$

para $|z| > 1$. Em seguida calcule

$$\int_{|z|=11^{10}10} \frac{e^{1/(z-1)}}{z^{11}} dz$$

Idem para

$$\int_{|z|=11^{10}10} e^{1/(z-1)} z^9 dz$$

25) Escreva o desenvolvimento de Laurent de

$$f(z) = \left(\log \frac{z}{z-1} \right)^2$$

para $|z| > 1$. Em seguida calcule

$$\int_{|z|=2} \left(\log \frac{z}{z-1} \right)^2 dz$$

PARTE B: FÓRMULA DE CAUCHY LOCAL - CONSEQÜÊNCIAS

1) Verifique (ou obtenha) os desenvolvimentos de Taylor das funções abaixo, justificando a convergência (raio e disco de convergência) em cada caso. Discuta convergência normal.

a) $(1+z)^\alpha = \sum_{n \geq 0} \binom{\alpha}{n} z^n$, $|z| < 1$ (esta é a chamada *série binomial*),

onde $\binom{\alpha}{0} = 1$ e $\binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$. Obtenha os desenvolvimentos, em particular, para $\alpha = -1, \pm 1/2$, $\zeta = -z$.

b) Seja $f(z) = 1/z(z-1)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Obtenha o desenvolvimento de $f(z)$ em $z = 2$, como segue

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z-2}{2} \right)^{-1} + (1 + (z-2)) \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{z-2}{2} + \left(\frac{z-2}{2} \right)^2 - \dots \right\} + \{ 1 - (z-2) + (z-2)^2 - \dots \} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - 1 \right) (z-2) + \dots + \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} + (-1)^n \right) (z-2)^n + \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}} \right) (z-2)^n \end{aligned}$$

Qual é o raio de convergência da série acima ? Discuta isto!

$$c) \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, \quad |z| < 1.$$

$$d) (1-z)^{m-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \cdots (n+m)}{m!} z^n, \quad |z| < 1, m \in \mathbb{N}.$$

$$e) \sin(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$f) \cos z^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$$

$$g) \frac{1}{z^2+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n+1) \frac{\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}} (z-1)^n, \quad |z-1| < \sqrt{2}.$$

$$h) \frac{1}{1-2z \cos \theta + z^2} = \sum_0^{\infty} \frac{e^{(n+1)i\theta} - e^{-(n+1)i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} z^n, \quad |z| < 1$$

i) Exiba as séries abaixo escrevendo uma expressão numa “forma fechada” ($s \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n \geq 0} z^n \cos ns$$

$$\sum_{n \geq 0} z^n \sin ns$$

j) Exiba o desenvolvimento de Taylor na origem das funções $f(z)$ abaixo, determinando o raio de convergência das respectivas séries

$$f(z) = \ln(1+z+z^2+z^3+z^4)$$

$$f(z) = \ln(1+2z+2z^2+2z^3+z^4)$$

k) Escreva a série abaixo como soma de duas funções elementares (“closed form”)

$$\sum_0^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}$$

i) Para cada função $f(z)$ dada nos itens de a) a k) acima calcule

$$\int_{|z|=1/2} \frac{f(z)}{z^n} dz$$

2) *Lema de Schwarz* Seja $f(z)$ uma função holomorfa no disco $|z| < 1$. Suponhamos que

$$f(0) = 0, \quad |f(z)| < 1 \quad \text{para } |z| < 1.$$

Mostre que

- i) $|f(z)| \leq |z|$ para $|z| < 1$.
- ii) Se vale a igualdade $|f(z_0)| = |z_0|$, para algum $z_0 \neq 0$, então $f(z) = \lambda z$, $\forall z$, $|z| < 1$ e $|\lambda| = 1$. O que você pode dizer sobre a derivada de $f(z)$ em $z = 0$?
- a) Mostre que uma equivalência conforme do disco aberto unitário \mathcal{D} sobre si mesmo que deixa fixa a origem é uma rotação. Quais destas transformações satisfaz $f(a) = 0$, para $|a| < 1$? Mostre que o conjunto de todas as equivalências conformes de \mathcal{D} é igual ao conjunto de todas as aplicações de Möbius que preservam \mathcal{D} . O que são estas (veja exercício 2) c), Lista 3) ?
- b) Mostre que o conjunto de todas as equivalências conforme do semi-plano superior aberto $\mathcal{H} = \{\text{Im } z > 0\}$ que deixa fixo o ponto i é dado pela família a 1-parâmetro

$$z \longrightarrow \frac{z + \tan \frac{\theta}{2}}{1 - z \tan \frac{\theta}{2}}$$

que dependem do parâmetro real θ . Este é na linguagem da teoria dos grupos o sub-grupo de isotropia do ponto $z = i$ do grupo das transformações de Möbius que preservam \mathcal{H} .

- c) *Problemas de extremo*: Sejam a e b números complexos tais que $|a| < 1$ e $|b| < 1$. Quão grande $|f'(a)|$ pode ser se f está sujeita às condições $f(z)$ é holomorfa, $\|f\|_\infty \leq 1$ e $f(a) = b$? *Resp* : $|f'(a)| \leq \frac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2}$. Quando é que vale a igualdade ?

Suponha também que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Maximize $\left|f\left(\frac{3}{4}\right)\right|$. Para quais funções f o máximo é atingido ? *Resp* : $\frac{2}{5}$. Agora dentre todas as funções holomorfas e limitadas por 1 no disco unitário aberto \mathcal{D} , mostre que $\max \left|f'\left(\frac{1}{3}\right)\right|$ é assumido quando $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$. Para que funções este máximo é assumido?

- 3) Seja \mathcal{A} um conjunto aberto em \mathbb{C} e seja γ uma curva seccionalmente C^1 em \mathbb{C} . Suponha que $\varphi : [\gamma] \times \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ é contínua e defina $g : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \int_{\gamma} \varphi(z, w) dw.$$

Mostre que

a) g é contínua.

b) Se $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ existe para cada $(w, z) \in [\gamma] \times \mathcal{A}$ e é contínua, então g é analítica e

$$g'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dw$$

c) Suponha que φ é contínua em $[\gamma]$. Use o exercício anterior para mostrar que

$$g(z) = \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{w - z} dw$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$ e que

$$g^{(n)}(z) = n! \int_{\gamma} \frac{\varphi(w)}{(w - z)^{n+1}} dw$$

- 4) Seja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

uma série de raio de convergência $R > 0$. Mostre a identidade de Parseval: Se $0 < r < R$ então

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + re^{i\theta})|^2 d\theta$$

Demonstre o teorema de Liouville, o princípio do máximo e as estimativas de Cauchy, *via* a identidade de Parseval. Demonstre o teorema fundamental da álgebra aplicando o princípio do máximo.

- 5) A idéia inicial é demonstrar o Teorema de Weierstrass refinado.

Suponha que $f_j \rightarrow f$ converge uniformemente em conjuntos compactos de Ω . Mostre que $f(z)$ é holomorfa em Ω e que $f'_j \rightarrow f'$ uniformemente em conjuntos

compactos de Ω . O que você pode dizer quanto a convergência das outras derivadas ?

Agora suponha que Ω é limitado e suponha que $f_j(z)$ seja uma seqüência de funções holomorfas em Ω e contínuas em $\bar{\Omega}$. Assuma que $f_j|_{\partial\Omega}$ converge uniformemente em $\partial\Omega$. Mostre que a seqüência $\{f_n\}$ converge uniformemente em $\bar{\Omega}$ à uma função limite f que é contínua em $\bar{\Omega}$ e holomorfa em Ω .

Sugestão: Aplique o teorema de Cauchy e o teorema de Morera. Em seguida aplique as estimativas de Cauchy (por quê f é contínua ?) Enuncie um resultado análogo para séries $\sum_n f_n$ normalmente *localmente* convergentes.

6) *Caracterizações das funções racionais*

- a) Seja f uma função inteira tal que para $r > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ e para $b \in \mathbb{R}^+$, apropriados tem-se que

$$|f(z)| \leq a + b|z|^\alpha, \quad \text{se } |z| > r$$

Mostre que f é uma constante

- b) Seja f uma função inteira tal que $\Re f \geq 0$. Mostre que f é uma função constante.
 c) Seja f uma função inteira. Suponha que existe $M \geq 0$, $\alpha \geq 0$, $r \geq 0$, tais que

$$|f(z)| \leq M|z|^\alpha, \quad |z| > r$$

Mostre que f é um polinômio de grau $N \leq \alpha$.

- d) (*Fazer após o estudo das singularidades isoladas de uma função holomorfa*) Seja f uma função inteira; se $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = L$ existe (finito ou infinito), mostre que f é um polinômio.
 e) (*Fazer após o estudo das singularidades isoladas de uma função holomorfa*) Seja f uma função meromorfa em \mathbb{C} tendo um número finito de polos. Se $\lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)| = L$ existe (finito ou infinito), então $f(z)$ é uma função racional de z (isto é quociente de dois polinômios). *Sugestão:* Considerar os casos $0 < L \leq \infty$ e $L = 0$, separadamente.

7) Seja f uma função inteira, verificar

$$f(z) - f(0) = \frac{z}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w(w-z)} dw \quad \text{se } |z| < R$$

onde $\gamma_R(t) = Re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$ e $R > 0$. Deduzir que, para $|z| < R$,

$$|f(z) - f(0)| \leq \frac{|z|R}{2\pi(R - |z|)} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})| dt$$

Concluir que se

$$\sup_{R>0} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})| dt < \infty$$

então f é uma constante. (Note que isto generaliza o teorema de Liouville; este raciocínio é devido a Cauchy e é anterior ao enunciado do teorema de Liouville).

8) Continuando o exercício precedente mostre que se f é uma função inteira e se

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})| dt = 0$$

então f é uma constante. O mesmo se

$$\limsup_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} |f(Re^{it})| dt < \infty$$

mostrar que $f(z)$ é da forma $a + bz$, onde a, b são constantes complexas.

9) Seja f uma função inteira; se

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x + iy)| dx dy < \infty$$

mostrar que $f \equiv 0$, utilizando os seguintes raciocínios:

a) $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x + iy)| dx dy = 2\pi \int_0^\infty r M_1(r) dr$ onde

$$M_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})| dt.$$

b) Se $\inf_t |re^{it} - z| \geq 1$, $|z| < r$, $r > 1$ então obtém-se $|f(z)| \leq r M_1(r)$, escrevendo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} dw$$

onde $\gamma_r(t) = re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

- c) Do item b) deduzir que se $\liminf_{r \rightarrow \infty} r M_1(r) = 0$ então $f \equiv 0$.
 d) Do item a) deduzir que $\lim_{r \rightarrow \infty} r M_1(r) = 0$ se $I < \infty$.
- 10) Seja f uma função holomorfa definida num domínio Ω que contém o disco unitário fechado, isto é, $\{|z| \leq 1\} \subset \Omega$. O que você pode dizer de f se f satisfaz: $|f(z)| = 1$, se $|z| = 1$? (*Observação* : Não darei sugestões neste exercício de propósito para você testar a sua força!).
- 11) Seja $f(z) = z(z - 1)(z - 2)$. Mostre que o máximo de f em $|z| \leq 1$ é atingido no círculo $|z| = 1$ e vale 6.
- 12) Mostre que $\sup \{|\sin z|; |\Re z| \leq \pi, |\Im z| \leq \pi\} = \sqrt{1 + \sinh^2 \pi}$. Em que pontos este máximo é atingido?
- 13) Seja f uma função holomorfa não constante definida em $|z| < R$; coloquemos $M(r) = \sup_{|z|=r} |f(z)|$ com $0 \leq r < R$. Mostre que $M : [0, R) \rightarrow [0, \infty)$ é estritamente crescente.
- 14) Seja f uma função holomorfa não constante definida que está para $|z| > R$ ($R \geq 0$) tal que $c = \lim_{|z| \rightarrow \infty} |f(z)|$ existe; para $r > R$ define-se $M(r)$ como no exercício precedente. Mostre que

$$M(r) = \sup_{|z| \geq r} |f(z)|$$

e $M : [R, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ é estritamente decrescente.

- 15) Seja f um polinômio de grau n ; seja $M(r)$ como no exercício 13). Mostre que para $0 < r < s$

$$\frac{M(r)}{r^n} \geq \frac{M(s)}{s^n}$$

sendo que a igualdade vale $\Leftrightarrow f(z)$ é da forma az^n . *Sugestão*: Aplique o exercício anterior na função g dada por $g(z) = f(z)/z^n$.

- 16) Seja $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $|z| < R$. Coloquemos $u = \Re f$, $v = \Im f$. Mostre que para $0 < r < R$, $n = 1, 2, \dots$

$$c_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} u(r e^{it}) e^{-int} dt = \frac{i}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} v(r e^{it}) e^{-int} dt.$$

Deduzir que se f é real sobre o círculo $|z| = r$, $0 < r < R$, então f é uma constante real em $|z| < R$. *Observação* : Para ser lida após o princípio de reflexão de Schwarz. Tente dar outra demonstração mais elegante utilizando o princípio de reflexão de Schwarz, combinado com o teorema de Liouville ou o princípio do máximo!!

17) (*Generalização do Teorema de Liouville.*) Continuação do exercício anterior: Seja $A(r) = \sup_{|z|=r} \{\Re f(z)\}$.

a) Estabeleça que

$$\Re c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r e^{it}) dt,$$

deduza do exercício anterior que para $n = 1, 2, \dots, 0 < r < R$,

b)

$$|c_n| r^n + 2\Re c_0 \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{|u(r e^{it})| + u(r e^{it})\} dt.$$

c) Conclua que para $n = 1, 2, \dots, 0 < r < R$,

$$|c_n| r^n \leq \max\{4A(r), 0\} - 2\Re f(0).$$

d) Use o que foi feito antes para mostrar o seguinte: se f é uma função inteira e se $A(r) < Mr^\alpha$, para $r > R$ e $M, \alpha > 0$ dados então f é um polinômio de grau $n \leq \alpha$. Em particular, mostre que se $A(r)$ é limitada superiormente então f é constante (Veja o ex. 6).

e) (*Funções inteiras de ordem finita*). Seja $f(z)$ uma função inteira. Dizemos que $f(z)$ tem *ordem finita* se existe $R > 0$ e algum inteiro positivo k tal que $|f(z)| \leq e^{|z|^k}$, $\forall z$ satisfazendo $|z| \geq R$.

i) Mostre que se $f(z)$ é uma função inteira sem zeros de ordem finita, então

$$f(z) = e^{p(z)}$$

onde $p(z)$ é um polinômio.

ii) nas mesmas hipóteses acima, exceto que $f(z)$ tem *finitos zeros*, mostre que

$$f(z) = q(z) e^{p(z)}$$

onde $q(z)$ e $p(z)$ são polinômios.

- iii) Mostre que $f(z) = e^z - \frac{z^n}{a}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a > e$ tem infinitos zeros em \mathbb{C} mas não tem nenhum zero no disco unitário $B_1(0)$.
- iv) Mostre que $f(z) = e^z - az^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $a > e$ tem infinitos zeros em \mathbb{C} mas tem exatamente n zeros simples no disco unitário $B_1(0)$.
Sugestão: Para a última conclusão você vai precisar do teorema de Rouché.
- v) Mostre que $e^{az} - p(z)$, onde $p(z)$ é um polinômio e $a \in \mathbb{C}$ tem infinitos zeros em \mathbb{C} .
- 18) Seja X um conjunto do plano complexo \mathbb{C} . Seja f_n uma seqüência de funções complexas definidas em X que converge uniformemente em X à uma função $f : X \rightarrow \mathbb{C}$. Suponha que

$$\inf_X \{|f_n(x)|; n \in \mathbb{N}\} > 0.$$

Mostre que a seqüência $\{1/f_n\}$ converge uniformemente em X a $1/f$.

- 19) Seja K um conjunto compacto de \mathbb{C} , seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções complexas contínuas definidas em K que converge uniformemente em K à uma função contínua $f : K \rightarrow \mathbb{C}$. Suponha que $f_n(z) \neq 0$ e que $f(z) \neq 0$, $\forall z \in K$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\inf\{|f_n(z)|, n \in \mathbb{N}, z \in K\} > 0$. Agora com a ajuda do exercício anterior deduzza que $\{1/f_n\}$ converge uniformemente em K à $1/f$.
- 20) Seja f uma função holomorfa na bola aberta $B_R(0)$ de raio R . Suponha que $f^{(n)}(z) \rightarrow g(z)$ ($n \rightarrow \infty$), uniformemente, localmente em $z \in B_R(0)$. Mostre *com todos os detalhes, refazendo todos os teoremas necessários para o estabelecimento do fato* que $g(z) = ce^z$, onde c é uma constante.
- 21) Seja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} z^n, \quad |z| < R.$$

Suponha que a série $f(0) + f'(0) + \dots$ converge. Mostre *com todos os detalhes, refazendo todos os teoremas envolvidos* que

- a) A função f é uma função inteira (isto é, analítica em todo o plano complexo).

- b) A série $\sum_{n \geq 0} f^{(n)}(z)$ converge uniformemente, localmente em \mathbb{C} .
- c) Seja $g(z) = \sum_{n \geq 0} f^{(n)}(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Mostre que $g'(z) = g(z) - f(z)$, $z \in \mathbb{C}$. Conclua que $g(z) = e^z(g(0) - \varphi(z))$, $z \in \mathbb{C}$, onde φ é uma primitiva em \mathbb{C} da função $z \mapsto e^{-z}f(z)$, tal que $\varphi(0) = 0$. Justifique rigorosamente todos os passos do seu raciocínio, inclusive a existência de tal primitiva em todo o plano complexo.
- 22) Seja $s = \sigma + it$, $\sigma = \Re s, t = \Im s$. Demonstre que a série $\sum_{n \geq 1} n^{-s}$, converge no semi-plano $\sigma \geq \sigma_0$, para cada $\sigma_0 > 1$. Conclua que a função $\zeta(s) = \sum_{n \geq 1} n^{-s}$ define uma função holomorfa (*função zeta de Riemann*) no semi-plano aberto $\sigma > 1$. O que você pode dizer das séries de Dirichlet $\sum_{n \geq 1} a_n n^{-s}$, ($a_n \in \mathbb{C}$, $n \geq 1$, $s \in \mathbb{C}$)?
- 23) Seja U um aberto de \mathbb{C} e seja K um subconjunto compacto de U . Mostre que existe uma constante C dependendo apenas de K e de U tal que se f é uma função holomorfa em U , então

$$\sup_K |f| \leq C \cdot \left(\int_U |f(x, y)|^2 dx dy \right)^{1/2}$$

Sugestão : Use Parseval.

- 24) (*Estimativas de Cauchy para derivadas em conjuntos compactos*) Seja Ω um domínio de \mathbb{C} , $K \subset \Omega$ um compacto contido em Ω , e \tilde{K} uma vizinhança compacta de K em Ω . Mostre que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe uma constante positiva M_k , dependendo apenas de Ω, K, \tilde{K} tal que

$$\sup_K |f^{(k)}(z)| \leq M_k \sup_{\tilde{K}} |f(z)|, \quad \forall f \text{ holomorfa em } \Omega$$

- 25) Considere U um aberto do plano complexo. Fixe um ponto $p \in U$. Seja \mathcal{F} uma família de funções holomorfas definidas em U cujas imagens estão contidas no disco unitário \mathcal{D} , levando p em 0. Mostre que existe uma seqüência $\{f_n\}$, $f_n \in \mathcal{F}$ que convergem uniformemente em compactos de U à uma função holomorfa $g : U \rightarrow \mathcal{D}$ satisfazendo

$$|g'(p)| \geq |f'(p)|$$

para toda $f \in \mathcal{F}$. *Sugestão* : Aplique a estimativa de Cauchy, o teorema de Montel e o princípio do máximo.

26) O seguinte problema para equações diferenciais ordinárias holomorfas de primeira ordem é fundamental

Considere $f(z, w)$ uma função holomorfa nas variáveis z, w , para z numa vizinhança de a e w numa vizinhança de b . Considere o seguinte problema com condição inicial

$$\begin{cases} \frac{dw}{dz} = f(z, w) \\ w(a) = b \end{cases} \quad (*)$$

O seguinte resultado é fundamental: O problema acima (*) possui uma e apenas uma solução.

O mesmo resultado vale para equações diferenciais ordinárias holomorfas de ordem superior:

$$\begin{cases} \frac{d^n w}{dz^n} = f(z, w, w', \dots, w^{(n-1)}) \\ w(a) = b \\ w'(a) = b_1 \\ w''(a) = b_2 \\ \dots \\ w^{(n-1)}(a) = b_{n-1} \end{cases} \quad (**)$$

Quando a equação é linear um pouco mais pode ser dito: Considere

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad (**)$$

onde $p(z)$ e $q(z)$ são holomorfas para $|z - a| < R$, $R > 0$. Segue então que a solução geral de (**) é combinação linear de duas soluções linearmente independentes holomorfas para $|z - a| < R$. Veja refs. 1), 3), 5) e 8).

a) Considere a equação diferencial abaixo

$$w'(z) + 2zw(z) = z^2 \quad (*)$$

- i) Mostre que toda solução de (*) é inteira e que sempre existe tal solução.
- ii) Seja $w(z) = \sum a_n z^n$, uma solução de (*). Mostre que os coeficientes a_n satisfazem uma equação de diferenças linear de segunda ordem,

usualmente chamada de *relação de recorrência*. Resolva esta equação calculando os coeficientes. Determine a solução geral da equação.

b) Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} w'(z) = \frac{z^2}{w} - 1 \\ w(0) = 0 \end{cases} \quad (*)$$

i) Assuma que existe uma solução de (*) da forma

$$w(z) = -z + a_2 z^2 + \dots$$

numa vizinhança de 0. Mostre que $a_2 = -1/2$, $a_3 = 1/6$ e que os coeficientes a_n satisfazem a seguinte relação de recorrência para $n \geq 4$:

$$-na_n + \sum_{k=1}^{n-2} (k+1) a_{n-k} a_{k+1} = 0$$

c) Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} (z^2 - 2z - 3) \frac{d^2 w}{dz^2} + 3(z-1) \frac{dw}{dz} + w = 0 \\ w(1) = 4 \\ w'(1) = 1 \end{cases} \quad (*)$$

- i) Dê um argumento, sem fazer conta, que (*) possui uma solução que é dada por uma série de potências $f(z) = \sum a_n (z-1)^n$, de raio de convergência R igual a 2.
- ii) Encontre a equação de diferenças satisfeita pelos coeficientes a_n , referidos no item i).
- iii) Encontre uma fórmula para os coeficientes a_n em função de n .
- iv) Fazendo obrigatoriamente dois cálculos distintos, calcule de duas maneiras distintas explicitamente o raio de convergência da série.
- v) Calcule $f^{(2003)}(1)$.

vi) Calcule a integral

$$\int_{|\zeta-1|=1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-1)^{2004}} d\zeta$$

vii) Encontre a solução da equação diferencial

$$\begin{cases} (z^2 - 2z - 3) \frac{d^2 w}{dz^2} + 3(z - 1) \frac{dw}{dz} + w = 1 + z + z^2 \\ w(1) = 4 \\ w'(1) = 1 \end{cases}$$

27) (*Equações singulares regulares de segunda ordem*)

Vamos fazer uma incursão na teoria das equações diferenciais complexas lineares de segunda ordem *singulares regulares*. Vamos considerar uma equação da forma

$$w''(z) + a(z)w'(z) + b(z)w(z) = 0 \tag{*}$$

onde $a(z), b(z)$ são funções holomorfas num disco perfurado $0 < |z - z_0| < r$. Se pelo menos uma das funções $a(z), b(z)$, não é holomorfa numa vizinhança de z_0 , dizemos que z_0 é um *ponto singular* de (*). Caso contrário, dizemos que z_0 é um ponto regular. Neste caso, o teoria geral de sistemas holomorfos pode ser aplicada para garantir a existência de duas soluções holomorfas linearmente independentes $w_1(z)$ e $w_2(z)$ que geram o espaço de soluções de (*). Uma demonstração usando a teoria de *séries majorantes* pode ser encontrada na ref. 11). Vamos nos interessar doravante no caso singular.

Caso z_0 não seja um ponto regular e $a(z)$ tenha no máximo um pólo de primeira ordem (em z_0) e $b(z)$ tenha no máximo um pólo de segunda ordem, dizemos que z_0 é um *ponto singular regular*. Um ponto singular que não é um ponto singular regular é chamado de *ponto irregular*.

A definição para $z = \infty$ é feita de maneira análoga fazendo a substituição $\zeta = \frac{1}{z}$. Com efeito: O resultado desta mudança de variáveis é a seguinte equação

$$\frac{d^2 v(\zeta)}{d\zeta^2} + \frac{dv(\zeta)}{d\zeta} \left(\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2} a \left(\frac{1}{\zeta} \right) \right) + \frac{1}{\zeta^4} b \left(\frac{1}{\zeta} \right) v(\zeta) = 0 \tag{**}$$

onde $v(\zeta) := w(1/\zeta)$. O ponto $z = \infty$ é chamado de regular ou singular regular consoante que o ponto $\zeta = 0$ é um ponto regular ou singular regular para a equação (**).

- a) Sejam $a(z)$ e $b(z)$ funções holomorfas para $|z| > r$. Mostre que o ponto $z = \infty$ é um ponto singular regular de (*), se e somente se $a(z)$ tem um zero e $b(z)$ tem um zero múltiplo em $z = \infty$ (ou equivalentemente, $za(z)$ e $z^2a(z)$ tem limites finitos em $z = \infty$). Em particular, conclua que o ponto é regular, se e somente se o coeficiente a_{-1} da série de Laurent de $a(z)$ em $|z| > r$ é $a_{-1} = 2$, e os coeficientes b_{-2}, b_{-3} da série de Laurent de $b(z)$ são nulos.

Suponha que $z = 0$ é um ponto singular da equação (*) e considere os desenvolvimentos de Laurent em $z = 0$

$$a(z) = \frac{1}{z} \sum_0^{\infty} a_k z^k, \quad b(z) = \frac{1}{z^2} \sum_0^{\infty} b_k z^k, \quad 0 < |z| < \epsilon$$

Considere a chamada *equação indicial*

$$\rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0 = 0 \tag{I}$$

- b) Sabendo que $z = 0$ é uma singularidade regular da equação (*) mostre que sempre existe uma solução $u(z)$ de (*) da forma (*método de Frobenius*)

$$u(z) = z^r \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r) z^n \right)$$

onde r é uma raiz da equação indicial (I), e os coeficientes $\alpha_n(r)$ são obtidos por uma certa relação de recorrência que você deve explicitar; sendo a série a esquerda da igualdade acima convergente numa vizinhança da origem.

Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação indicial, com $\Re r_1 \geq \Re r_2$.

- c) Mostre que quando $r_1 - r_2$ não é um inteiro podemos encontrar uma soluções $u_1(z)$ e $u_2(z)$ linearmente independentes de (*) pelo método do item b).
- d) Mostre que quando as raízes da equação indicial são iguais a $r = r_1$, obtemos uma segunda solução $v(z)$ independente da solução $u(z)$ encontrada

no item b) pela fórmula

$$v(z) = u(z) \log z + z^{r_1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d\alpha_n(r_1)}{dr} z^n \right)$$

onde os coeficientes α_n são obtidos no item b) e a série a esquerda da igualdade converge numa vizinhança da origem.

Sugestão : Olhe como é feita a demonstração da obtenção das soluções fundamentais da Equação de Euler : $z^2 w'' + azw' + bw = 0, a, b \in \mathbb{C}$, no caso que as raízes são iguais.

- e) Considere o caso que $r_1 - r_2 = N > 0$, é um inteiro. Mostre que uma segunda solução $v(z)$ independente de $u(z)$ pode ser obtida pela fórmula

$$v(z) = cu(z) \log z + z^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d}{dr} ((r - r_2)\alpha_n(r)) \Big|_{r=r_2} z^n$$

onde $c = \lim_{r \rightarrow r_2} (r - r_2)\alpha_N(r)$.

- e) Considere a equação de Bessel de ordem α

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - \alpha^2)w(z) = 0$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma constante com $\Re\alpha \geq 0$.

- i) Mostre que $z = 0$ é um ponto singular regular e $z = \infty$ é um ponto irregular para a equação de Bessel.
 ii) Mostre que as raízes da equação indicial são $\rho = \alpha$ e $\rho = -\alpha$.

Considere as funções de Bessel

$$J_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \alpha + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\alpha}$$

onde Γ é a função Gamma. Para $\alpha \neq -1, -2, \dots$, são chamadas *funções de Bessel de primeiro tipo e índice n* (quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$).

Considere as funções de Bessel

$$Y_n(z) = -\frac{2}{\pi} \log \frac{z}{2} J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m (n-1)!}{m! (1-n) \cdots (1-n+m-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}$$

para $n = 0, 1, 2, \dots$, são chamadas de *funções de Bessel de segundo tipo e índice n* .

- iii) Mostre que quando α não é um inteiro tem-se que $J_\alpha(z)$ e $J_{-\alpha}(z)$ são soluções linearmente independentes da equação de Bessel.
- iv) Mostre que quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, um par de soluções independentes é dado por $J_n(z)$ e $Y_n(z)$.
- iv) Encontre as soluções explícitas da equação de Bessel de ordem zero, mostrando que $J_0(z)$ é inteira e estude o comportamento da solução geral quando $z \rightarrow 0$.
- v) Estude a equação de Bessel de ordem meio e mostre explicitamente que a segunda solução *não possui termo logarítmico* embora a diferença das raízes seja um inteiro.
- vi) Encontre as soluções explícitas da equação de Bessel de ordem um, mostrando que $J_1(z)$ é inteira e estude o comportamento da solução geral quando $z \rightarrow 0$.
- vii) Exercício-pesquisa: Mostre que as funções de Bessel $J_n(z)$ tem um número infinito de zeros na semi-reta real positiva. Mostre também que as funções de Bessel $Y_n(z)$ são ilimitadas na origem.

Dizemos que a equação (*) é *Fuchsiana*, se esta possui um número finito de singularidades em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, sendo todas as singularidades regulares.

e) Considere a equação de Legendre

$$(z^2 - 1)w''(z) + 2zw'(z) - \alpha(\alpha + 1)w(z) = 0, \quad \alpha \in \mathbb{C}$$

- i) Mostre que a equação de Legendre é Fuchsiana.
- ii) Mostre que quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, existe um polinômio $P_n(z)$ que é solução da equação de Legendre. Mostre que $P_n(1) = 1$, $P_n(-z) = (-1)^n P_n(z)$. Além disso, mostre a *fórmula de Rodrigues*

$$P_n(z) = \frac{1}{n!2^n} \frac{d^n}{dz^n} (z^2 - 1)^n$$

calculando $P_0(z), P_1(z), P_2(z), P_3(z)$.

f) Estude a *série hipergeométrica*

$$z(1 - z)w''(z) + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)w'(z) - \alpha\beta w(z) = 0$$

Nota: A teoria das equações singulares regulares de segunda ordem, aparece em várias áreas da Matemática Pura e Aplicada:

- Teoria das Transformações Conformes. A série hipergeométrica aparece na construção de uma transformação conforme explícita do disco unitário aberto $|z| < 1$ sobre o interior de um triângulo geodésico Δ no disco hiperbólico.
- Na Análise Harmônica (análise de Fourier, séries de Fourier-Bessel, problemas de Sturm-Liouville singular).
- na Física Matemática e Mecânica (eq. da membrana oscilante, temperatura de um cilindro longo).
- Equações Diferenciais Parciais (problemas de Dirichlet em regiões esféricas)
- Teoria das superfícies de curvatura média 1 no espaço hiperbólico (que são “primas ” das mínimas de \mathbb{R}^3).

g) Faça o exercício 4) da parte C da lista 2.

BIBLIOGRAFIA

1. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variables*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
2. Anthony D. Osborne. *Complex variables and their applications*. Addison-Wesley, 1999
3. Christian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps*. Springer, 1992.
4. Einar Hille. *Analytic function theory*. Dois volumes, Chelsea, Nova York, 1982.
5. Georges Valiron. *Théorie des fonctions*. Troisième edition, Masson, 1966.
6. Henri Cartan. *Teoria elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas*. Selecciones Científicas, Madrid, 1968.
7. Jean-François Pabion. *Éléments d'analyse complexe*. Edition Marketing, Paris, 1995.
8. John B. Conway. *Functions of one complex variable I*. Segunda edição Springer, 1995.
9. J. Gerretsen e G. Sansone. *Lectures on the theory of functions of complex*

- variable*. Wolters-Noordhoff Publishing Groningen 1969 (dois volumes).
10. J. Rivaud. *Exercices d'Analyse*. Vuibert, Paris, 1981.
 11. Joseph Bak e Donald J. Newman. *Complex Analysis*. Second edition, Springer, 1997.
 12. K. Knopp. *Elements of the theory of functions*. Dois volumes (com dois volumes de exercícios), Dover, Nova York, 1952.
 13. Lars Ahlfors. *Complex analysis*. Mc Graw-Hill, 1996.
 14. Norman Levinson e Raymond M. Redheffer. *Complex variables*. Holden-Day, SãoFrancisco, 1970.
 15. Patrice Tauvel. *Analyse complexe. Exercices corrigés*. Dunod, 1999.
 16. Rami Shakarchi. *Problems and solutions for complex analysis*. Springer, 1999.
 17. Reinhold Remmert. *Theory of complex functions*. Springer, 1991 (*Readings in Mathematics*).
 18. R. E Greene e S. G. Krantz. *Function theory of one complex variables*. John Wiley and Sons, N. Y, 1997.
 19. Serge Lang. *Complex analysis*. Quarta edição, 1999.
 20. Sristi Chatterji. *Cours d'analyse 2, Analyse complexe*. Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Suíça, 1997.
 21. Stephen D. Fisher. *Complex variables*. Second Edition. Dover Public., N. Y, 1999.
 22. Steven G. Krantz. *Handbook of complex variables*. Birkäuser, Boston, 1999.
 23. Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Mc Graw-Hill,1987.
 24. William E. Boyce e Richard C. Di Prima. *Equações diferenciais elementares e problemas de contorno*. LTC Livros técnicos e científicos.
 25. Wolfgang Walter. *Ordinary differential equations*. Readings in mathematics, Springer, 1998.
 26. Zeev Nehari. *Conformal mapping*. Dover, 1952