# VCOMPLEXAS- JULHO de 2003–Lista 4

*Professor: Ricardo Sá Earp*

### PARTE A: INTEGRAÇÃO COMPLEXA

1) Calcular

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3}\,d\,z$$

quando $\gamma$ é um círculo orientado positivamente (e simplesmente) dado por

a) $|z| = 1/2$. *Resp*:$2\pi i$

b) $|z-1| = 1/2$. *Resp*:$-i\pi$e

c) $|z| = 2$. Dê uma fórmula que relacione a integral do item c) com as integrais dos itens a) e b). Justifique sua resposta tanto geometricamente como analiticamente. *Resp*:$i\pi(2-$e$)$

d) $2\,(\cos\theta)^n + i2\,(\operatorname{sen}\theta)^n\,, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad n \in \mathbb{N}$.

2) Suponha que $f(z)$ seja analítica num aberto contendo a curva fechada $\gamma$. Mostre que

$$\int_\gamma \overline{f(z)} f^{'}(z)\,d\,z$$

é um número imaginário puro.

3) Suponha que $f(z)$ seja analítica e que satisfaça $|f(z)-1| < 1$ em um domínio $\Omega$. Mostre que

$$\int_\gamma \frac{f^{'}(z)}{f(z)}\,d\,z = 0,$$

para toda curva fechada, seccionalmente $C^1$, em $\Omega$.

4) Se $P(z)$ é um polinômio e $C$ denota o círculo $|z-a| = R$, calcule $\int_C P(z)\,d\,\overline{z}$. *Resp*:$-2i\pi R^2 P^{'}(a)$.

5) Seja $\gamma$ uma curva $C^1$ por partes e seja $\bar{\gamma}$ sua imagem obtida pela aplicação $z \to \bar{z}$. Suponha que $f(z)$ seja uma função contínua sobre $\gamma$.

a) Mostre que $z \to \overline{f(\bar{z})}$ é contínua sobre $\bar{\gamma}$ e tem-se que

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,d\,z} = \int_{\bar{\gamma}} \overline{f(\bar{z})}\,d\,z = \int_\gamma \overline{f(z)}\,d\,\bar{z}$$

Se $\gamma$ é uma curva simples fechada contida no disco aberto unitário $\mathcal{D}$ e $f(z)$ é uma função analítica em $\mathcal{D}$, o que voce pode dizer da integral do meio ? Sempre se anula ? A função$z \to \overline{f(\bar{z})}$ é holomorfa em $\bar{\mathcal{D}}$? Compare com o exercício 1)d) Parte B, Lista 1!

b) Em particular, se $\gamma$ é o círculo unitário positivamente orientado, mostre que

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z)\,d\,z} = -\int_{|z|=1} \overline{f(z)}\,\frac{d\,z}{z^2}$$

Cuidado com a orientação ? Nas duas fórmulas acima o círculo $\gamma$ está positivamente orientado!!

6) Considere a série dada por

$$f(z) := \sum_0^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} := \sum f_n(z)$$

a) Mostre que $f(z)$ determina uma função holomorfa definida no disco unitário $B_1(0)$ mostrando que a série converge normalmente em compactos de $B_1(0)$.
b) Mostre que $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$.
c) Determine a classe de curvas fechadas $\gamma$ tais que o valor da integral $\int_\gamma f_n(z)\,\mathrm{d}z$ é não nulo.

7) Seja $f$ uma função contínua num domínio $\Omega$. Seja $\gamma$ uma curva regular (por partes) parametrizada pelo comprimento de arco $s$, cujo traço esteja contido em $\Omega$. Seja $\boldsymbol{T}$ o vetor velocidade de $\gamma$ e seja $\boldsymbol{n}$ um dado campo de vetores normal unitário ao longo de $\gamma$. Dizemos que o *fluxo* ou campo dado por $z \mapsto f(z)$ é nulo ($f$ é então chamado de *fluxless*) se

$$\int_\gamma f \cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$$

para toda curva simples ($C^1$ por partes) e fechada $\gamma$ em $\Omega$. Dizemos que o campo que $z \mapsto f(z)$ é conservativo (ou *irrotational*) se

$$\int_\gamma f \cdot \boldsymbol{T}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$$

para toda curva simples ($C^1$ por partes) e fechada $\gamma$ em $\Omega$. Mostre que se um fluxo ( ou campo) $z \mapsto f(z)$ em um domínio $\Omega$ é simultaneamente *fluxless* e conservativo então $f(z)$ é uma função anti-holomorfa em $\Omega$.

8) Seja $f(z)$ uma função holomorfa em $|z| < R,\ R > 1$. Calcule de duas maneiras distintas as integrais

$$\int_{|z|=1} \left[2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right] \frac{f(z)}{z} d\,z,$$

obtendo as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{i\theta}) \cos^2\frac{\theta}{2}\, d\,\theta =& 2f(0) + f^{'}(0)\\ \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \sin^2\frac{\theta}{2}\, d\,\theta =& 2f(0) - f^{'}(0)\end{aligned}$$

9) Mostre que se $f(z)$ é holomorfa em um aberto que contenha o disco fechado $|z| \leqslant 1$ então vale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\bar{f}(z)}{z-a}\, d\,z = \begin{cases} \bar{f}(0) & \text{se } |a| < 1,\\ \bar{f}(0) - \bar{f}(1/\bar{a}) & \text{se } |a| > 1,\end{cases}$$

*Sugestão*: Use o exercício 5 b) e a fórmula de Cauchy.

10) Verifique que

$$\int_a^b \frac{d\,t}{z - it} = i\{\log(z - ib) - \log(z - ia)\}$$

onde $-\infty < a < b < \infty,\ \Re z > 0$. Conclua que

$$\int_a^b \frac{x\, d\,t}{x^2 + (y-t)^2} = \arctan\left(\frac{y-a}{x}\right) - \arctan\left(\frac{y-b}{x}\right).$$

11) Calcular
   a) $\int_\gamma z\, d\,z$
   b) $\int_\gamma \bar{z} d\,z$
   c) $\int_\gamma \Re z\, d\,z$ onde $\gamma$ é o caminho poligonal $0 \to (1+i) \to 2$.

12) Calcule a integral $\displaystyle\int_\gamma z^\alpha\, d\,z,\ \alpha \in \mathbb{C}$, nos seguintes casos:
   a) $\gamma$ é o semi-círculo indo de 1 à $-1$ no semi-plano superior (ou $\mathrm{Im}\, z \geqslant 0$).

b) $\gamma$ é o semi-círculo indo de 1 à $-1$ no semi-plano inferior.

c) $\gamma$ é o círculo de centro 0 e raio 1. *Resp*: $\dfrac{2i}{\alpha+1}\sin(\alpha+1)\pi$, se $\alpha \neq -1$, $2\pi i$, se $\alpha = -1$. Para qual ramo de $z^\alpha$ vale esta resposta ? Para que valores de $\alpha$ temos o valor 0 ?

13) Mostre com todos os detalhes que

$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1}\right| \leqslant \frac{2\pi R}{R^4-1}$$

onde $\gamma$ é o círculo $|z| = R,\ R > 1$.

14) Sabendo-se que $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$, se $\gamma$ é uma curva simples fechada positivamente orientada ( e portanto de índice 1) verifique às seguintes fórmulas

a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2\sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$,
onde o traço de $\gamma$ é a elipse de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t\cos^2 t}{\cos^6 t + \sin^6 t}dt = \frac{2\pi}{3}$
onde $\gamma$ descreve o astróide dado por $t \mapsto \cos^3 t + i\sin^3 t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

15) Calcule

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)(z-1/a)}, \qquad a \neq 0,\ |a| \neq 1.$$

Use o resultado acima para calcular

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1-2a\cos t + a^2}.$$

16) Seja $f(z)$ uma função holomorfa definida num disco de raio $R,\ R > 0$ centrado na origem. Suponha que $f(0)$ seja real. Mostre que para $0 < r < R$ e $|z| < r$ tem-se que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re f(r\,\mathrm{e}^{it})\frac{r\,\mathrm{e}^{it}+z}{r\,\mathrm{e}^{it}-z}\ \mathrm{d}t$$

a) Conclua que se $g = \Re f$ então vale a fórmula de Poisson

$$g(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} g(r\,\mathrm{e}^{it})\frac{r^2-|z|^2}{|r\,\mathrm{e}^{it}-z|^2}\ \mathrm{d}t$$

b) Escreva a função $g$ do item a) como soma de uma função holomorfa e de uma função anti-holomorfa e re-obtenha que $g$ é harmônica para $|z| < r$. *Sugestão* : Escreva

$$\frac{r^2 - |z|^2}{|r\,e^{it} - z|^2} = \frac{r\,e^{it}}{r\,e^{it} - z} + \frac{r\,e^{-it}}{r\,e^{-it} - \overline{z}} - 1$$

c) (*Desigualdade de Harnack*) Seja $g(z)$ uma função harmônica não negativa definida num disco de raio $R$, $R > 0$ centrado na origem. Mostre que para $0 < r < R$ e $|z| < r$ tem-se que

$$\frac{r - |z|}{r + |z|} \cdot g(0) \leqslant g(z) \leqslant \frac{r + |z|}{r - |z|} \cdot g(0)$$

d) (*Princípio de Harnack*) Aplique a desigualdade de Harnack para demonstrar o princípio de Harnack: Seja $u_1 \leqslant u_2 \leqslant \cdots$ uma seqüência crescente de funções harmônicas definidas num domínio $\Omega$. Mostre que ou bem $u_n \to \infty$ $(n \to \infty)$ uniformemente em compactos, ou bem existe uma função harmônica $u$ em $\Omega$ tal que $u_n \to u$ $(n \to \infty)$ uniformemente em compactos de $\Omega$.

e) Uma função real contínua $f$ num aberto $U \subset \mathbb{C}$ é chamada de sub-harmônica se satisfaz a *desiguladade da média*, i. e se o fecho de um disco de raio $R$ e centro $p$ está inteiramente contido em $U$, então

$$f(p) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + e^{it})\,dt$$

Nota: Uma função $f$ de classe $C^2$ é sub-harmônica, sse $\triangle f \geqslant 0$.

i) Mostre que se $g : U \to \mathbb{C}$ é harmônica, então $f := |g|$ é sub-harmônica. Será $|g|$ harmônica ?

ii) Mostre que se $f : U \to \mathbb{R}$ é harmônica e se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função não decrescente e convexa então $\varphi \circ f$ é sub-harmônica. *Sugestão* : Aplique a desigualdade de Jensen (veja Rudin, ref. 20). Conclua que $e^f$ é sub-harmônica e $f^2$ é sub-harmônica de $f$ é não negativa em $U$.

iii) Mostre que se $f$ é holomorfa em $U$ e $p > 0$ então $|f|^p$ é sub-harmônica. Agora suponha que $f$ seja harmônica. Mostre que $|f|^p$ é sub-harmônica quando $p \geqslant 1$.

17) Seja $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ uma série cujo raio de convergência é 1. Suponha que $|f(z)|(1-|z|) \leqslant 1$ para todo $z$ tal que $|z| < 1$. Mostre que para todo inteiro positivo tem-se que

$$|a_n| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) < e(n+1)$$

18) Seja $\mathcal{D}$ a bola unitária aberta de raio 1 centrada na origem. Sejam $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ e $g(z) = \sum_0^\infty b_n z^n$ duas funções holomorfas definidas em $\mathcal{D}$, satisfazendo $f(0) = g(0) = 0$.

a) Mostre que as séries

$$F(z) = \sum_0^\infty a_n g(z^n) \qquad G(z) = \sum_0^\infty b_n f(z^n)$$

são normalmente convergentes em qualquer subconjunto compacto de $\mathcal{D}$. Estaleleça o desenvolvimento de $F$ e $G$ na origem e conclua que $F(z) = G(z)$ para todo $z \in \mathcal{D}$.

b) Seja log a determinação principal do logaritmo. Estabeleça que

$$\sum_1^\infty \log(1+z^n) = \sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1}}{n} \frac{z^n}{1-z^n}, \quad \sum_1^\infty (-1)^{n-1} \frac{z^n}{1-z^n} = \sum_1^\infty \frac{z^n}{1+z^n}$$

19) Mostre que $I(z) = \displaystyle\int_{|\zeta - z_0| = R} \frac{1}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta$ satisfaz

$$\frac{\partial I}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial I}{\partial z}(z) = 0$$

concluindo que $I(z)$ não depende de $z$ e que $I(z) = 2\pi i$.

20) Seja $f$ uma função contínua no círculo $S^1 = \{|z| = 1\}$. Defina

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } |z| = 1, \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\zeta & \text{se } |z| < 1 \end{cases}$$

Será $F$ contínua em $\{|z| \leqslant 1\}$ ?

21) Neste exercício você vai trabalhar com ramos de funções multivalentes e integração complexa.

a) Considere a função *multivalente*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z(z-1)}}$$

i) Mostre que pode-se definir um *ramo* de $f(z)$ no domínio $\mathbb{C} \setminus [0,1]$.

ii) Usando um resultado dado em sala de aula, calcule a integral

$$\int\limits_{|z|=2} \frac{1}{\sqrt{z(z-1)}} \, \mathrm{d}z$$

b) Idem para $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{21z^2 - 10z + 1}}$, e o contorno $|z| = 1$.

Para atingir o *rigor* matemático você precisará aplicar a fórmula de Newton -Abel, convenientemente. No mesmo espírito, calcule

$$\int\limits_{|z|=R} \frac{z}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} \, \mathrm{d}z$$

para $a, b \in \mathbb{C}$ e $R$ suficientemente grande.

22)

a) Encontre os desenvolvimentos de Laurent e os resíduos das funções abaixo, numa vizinhança perfurada de cada singularidade.

i) $f(z) = \dfrac{1}{1 - \cos z}$.

ii) $= \dfrac{2+3z}{1 - \mathrm{e}^z}$.

iii) $\dfrac{z-1}{z^5 - 1}$.

iv) $\dfrac{\mathrm{e}^{iaz}}{4 + z^2}$.

v) (neste exemplo restrinja-se às singularidades contidas no semi-plano superior)

$$\frac{\left(\log z - \log 2 - \dfrac{i\pi}{2}\right)^2}{4 + z^2}$$

onde o ramo do logaritmo está tomado retirando-se o semi-eixo imaginário negativo, com o argumento variando entre $-\pi/2$ e $3\pi/2$.

vi) (neste exemplo restrinja-se às singularidades contidas no semi-plano superior)

$$\frac{\log z - \log 2 - i\pi/2}{(z^2+4)^2}$$

onde tomamos o mesmo ramo do exemplo anterior.

b) Para cada um dos exemplos dado nos itens *i*) a *vi*) do item *a*) acima, calcule
$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{2003}}\,\mathrm{d}z$$
onde $\gamma$ é uma curva simples fechada positivamente orientada, em torno de uma singularidade de $f(z)$, sem passar por uma singularidade de $f(z)$, com $\gamma$ bordando um domínio $\Omega$, de maneira que $\overline{\Omega}$ contém apenas uma única singularidade de $f(z)$.

23) Considere a função
$$f(z) = \frac{1}{1-z}\,\mathrm{e}^{1/z}$$

a) Obtenha o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no anel $|z| > 1$.

b) Obtenha o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no anel $0 < |z| < 1$. Calcule o resíduo, e em seguida avalie a integral
$$\int\limits_{|z|=1/2} \frac{f(z)}{z^{2003}}\,\mathrm{d}z$$

24) Escreva o desenvolvimento de Laurent de
$$f(z) = \mathrm{e}^{1/(z-1)}$$
para $|z| > 1$. Em seguida calcule
$$\int_{|z|=11^{10^{10}}} \frac{\mathrm{e}^{1/(z-1)}}{z^{11}}\,\mathrm{d}z$$
Idem para
$$\int_{|z|=11^{10^{10}}} \mathrm{e}^{1/(z-1)}\,z^9\,\mathrm{d}z$$

25) Escreva o desenvolvimento de Laurent de

$$f(z) = \left(\log \frac{z}{z-1}\right)^2$$

para $|z| > 1$. Em seguida calcule

$$\int_{|z|=2} \left(\log \frac{z}{z-1}\right)^2 \mathrm{d}z$$

## PARTE B: FÓRMULA DE CAUCHY LOCAL - CONSEQÜÊNCIAS

1) Verifique (ou obtenha) os desenvolvimentos de Taylor das funções abaixo , justificando a convergência ( raio e disco de convergência) em cada caso. Discuta convergência normal.

a) $(1+z)^\alpha = \sum_{n \geqslant 0} \binom{\alpha}{n} z^n, \qquad |z| < 1$ ( esta é a chamada *série binomial* ),

onde $\binom{\alpha}{0} = 1$ e $\binom{\alpha}{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$. Obtenha os desenvolvimentos, em particular, para $\alpha = -1, \pm 1/2,\ \zeta = -z$.

b) Seja $f(z) = 1/z(z-1), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Obtenha o desenvolvimento de $f(z)$ em $z = 2$, como segue

$$\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\Big(1 + \frac{z-2}{2}\Big)^{-1} + (1 + (z-2)) \\
&= -\frac{1}{2}\Big\{1 - \frac{z-2}{2} + \left(\frac{z-2}{2}\right)^2 - \cdots\Big\} + \big\{1 - (z-2) + (z-2)^2 - \cdots\big\} \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - 1\right)(z-2) + \cdots + \Big(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} + (-1)^n\Big)(z-2)^n + \cdots \\
&= \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-2)^n
\end{aligned}$$

.

Qual é o raio de convergência da série acima ? Discuta isto!

c) $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n, \qquad |z| < 1.$

d) $(1-z)^{m-1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\cdots(n+m)}{m!} z^n, \qquad |z| < 1,\ m \in \mathbb{N}.$

e) $\sin(\alpha z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$

f) $\cos z^{1/2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}, \qquad z \in \mathbb{C}.$

g) $\dfrac{1}{z^2+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n+1)\frac{\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}} (z-1)^n, \qquad |z-1| < \sqrt{2}.$

h) $\dfrac{1}{1 - 2z\cos\theta + z^2} = \displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{(n+1)i\theta} - \mathrm{e}^{-(n+1)i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta} - \mathrm{e}^{-i\theta}} z^n, \qquad |z| < 1$

i) Exiba as séries abaixo escrevendo uma expressão numa "forma fechada" ($s \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n \cos ns$$
$$\sum_{n\geqslant 0} z^n \sin ns$$

j) Exiba o desenvolvimento de Taylor na origem das funções $f(z)$ abaixo, determinando o raio de convergência das respectivas séries

$$f(z) = \ln(1 + z + z^2 + z^3 + z^4)$$
$$f(z) = \ln(1 + 2z + 2z^2 + 2z^3 + z^4)$$

k) Escreva a série abaixo como soma de duas funções elementares ("closed form")

$$\sum_{0}^{\infty} \frac{z^{4n}}{(4n)!}$$

i) Para cada função $f(z)$ dada nos itens de $a$) a $k$) acima calcule

$$\int_{|z|=1/2} \frac{f(z)}{z^n}\, \mathrm{d}z$$

2) *Lema de Schwarz* Seja $f(z)$ uma função holomorfa no disco $|z| < 1$. Suponhamos que

$$f(0) = 0, \qquad |f(z)| < 1 \qquad \text{para } |z| < 1.$$

Mostre que

i) $|f(z)| \leqslant |z|$ para $|z| < 1$.

ii) Se vale a igualdade $|f(z_0)| = |z_0|$, para algum $z_0 \neq 0$, então $f(z) = \lambda z$, $\forall z$, $|z| < 1$ e $|\lambda| = 1$. O que você pode dizer sobre a derivada de $f(z)$ em $z = 0$?.

a) Mostre que uma equivalência conforme do disco aberto unitário $\mathcal{D}$ sobre si mesmo que deixa fixa a origem é uma rotação . Quais destas transformações satisfaz $f(a) = 0$, para $|a| < 1$? Mostre que o conjunto de todas as equivalências conformes de $\mathcal{D}$ é igual ao conjunto de todas as aplicações de Möbius que preservam $\mathcal{D}$. O quê são estas ( veja exercício 2) c), Lista 3) ?

b) Mostre que o conjunto de todas as equivalências conforme do semi-plano superior aberto $\mathcal{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ que deixa fixo o ponto $i$ é dado pela família a 1-parâmetro

$$z \longrightarrow \frac{z + \tan\dfrac{\theta}{2}}{1 - z\tan\dfrac{\theta}{2}}$$

que dependem do parâmetro real $\theta$. Este é na linguagem da teoria dos grupos o sub-grupo de isotropia do ponto $z = i$ do grupo das transformações de Möbius que preservam $\mathcal{H}$.

c) *Problemas de extremo*: Sejam $a$ e $b$ números complexos tais que $|a| < 1$ e $|b| < 1$. Quão grande $|f^{'}(a)|$ pode ser se $f$ está sujeita às condições $f(z)$ é holomorfa, $\|f\|_\infty \leqslant 1$ e $f(a) = b$? *Resp* :$|f^{'}(a)| \leqslant \dfrac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2}$. Quando é que vale a igualdade ?

Suponha também que $f\left(\dfrac{1}{2}\right) = 0$. Maximize $\left|f\left(\dfrac{3}{4}\right)\right|$. Para quais funções $f$ o máximo é atingido ? *Resp* :$\dfrac{2}{5}$. Agora dentre todas as funções holomorfas e limitadas por 1 no disco unitário aberto $\mathcal{D}$, mostre que max $\left|f^{'}\left(\dfrac{1}{3}\right)\right|$ é assumido quando $f\left(\dfrac{1}{3}\right) = 0$. Para que funções este máximo é assumido?

3) Seja $\mathcal{A}$ um conjunto aberto em $\mathbb{C}$ e seja $\gamma$ uma curva seccionalmente $C^1$ em $\mathbb{C}$. Suponha que $\varphi : [\gamma] \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é contínua e defina $g : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \int_\gamma \varphi(z, w)\mathrm{d}w.$$

Mostre que

a) $g$ é contínua.

b) Se $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$ existe para cada $(w, z) \in [\gamma] \times \mathcal{A}$ e é contínua, então $g$ é analítica e

$$g^{'}(z) = \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathrm{d}w$$

c) Suponha que $\varphi$ é contínua em $[\gamma]$. Use o exercício anterior para mostrar que

$$g(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z}\mathrm{d}w$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$ e que

$$g^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - z)^{n+1}}\mathrm{d}w$$

4) Seja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

uma série de raio de convergência $R > 0$. Mostre a identidade de *Parseval*: Se $0 < r < R$ então

$$\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(a + r\mathrm{e}^{i\theta})|^2 \mathrm{d}\theta$$

Demonstre o teorema de Liouville, o princípio do máximo e as estimativas de Cauchy, *via* a identidade de Parseval. Demonstre o teorema fundamental da álgebra aplicando o princípio do máximo.

5) A idéia inicial é demonstrar o Teorema de Weierstrass refinado.

Suponha que $f_j \to f$ converge uniformemente em conjuntos compactos de $\Omega$. Mostre que $f(z)$ é holomorfa em $\Omega$ e que $f_j^{'} \to f^{'}$ uniformemente em conjuntos compactos de $\Omega$. O que você pode dizer quanto a convergência das outras derivadas ?

Agora suponha que $\Omega$ é limitado e suponha que $f_j(z)$ seja uma seqüência de funções holomorfas em $\Omega$ e contínuas em $\overline{\Omega}$. Assuma que $f_j \mid_{\partial\Omega}$ converge uniformemente em $\partial\Omega$. Mostre que a seqüência $\{f_n\}$ converge uniformemente em $\overline{\Omega}$ à uma função limite $f$ que é contínua em $\overline{\Omega}$ e holomorfa em $\Omega$.

*Sugestão*: Aplique o teorema de Cauchy e o teorema de Morera. Em seguida aplique as estimativas de Cauchy (por quê $f$ é contínua ?) Enuncie um resultado análogo para séries $\displaystyle\sum_n f_n$ normalmente *localmente* convergentes.

6) *Caracterizações das funções racionais*
   a) Seja $f$ uma função inteira tal que para $r > 0$, $\alpha \in (0,1)$ e para $b \in \mathbb{R}^+$, apropriados tem-se que
   $$|f(z)| \leqslant a + b|z|^\alpha, \qquad \text{se } |z| > r$$
   Mostre que $f$ é uma constante
   b) Seja $f$ uma função inteira tal que $\Re f \geqslant 0$. Mostre que $f$ é uma função constante.
   c) Seja $f$ uma função inteira. Suponha que existe $M \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, tais que
   $$|f(z)| \leqslant M|z|^\alpha, \qquad |z| > r$$
   Mostre que $f$ é um polinômio de grau $N \leqslant \alpha$.
   d) (*Fazer após o estudo das singularidades isoladas de uma função holomorfa*) Seja $f$ uma função inteira; se $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = L$ existe (finito ou infinito), mostre que $f$ é um polinômio.
   e) (*Fazer após o estudo das singularidades isoladas de uma função holomorfa*) Seja $f$ uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ tendo um número finito de polos. Se $\displaystyle\lim_{|z|\to\infty} |f(z)| = L$ existe (finito ou infinito), então $f(z)$ é uma função racional de $z$ (isto é quociente de dois polinômios). *Sugestão*: Considerar os casos $0 < L \leqslant \infty$ e $L = 0$, separadamente.
7) Seja $f$ uma função inteira, verificar
   $$f(z) - f(0) = \frac{z}{2\pi i} \int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w(w-z)}\, \mathrm{d}w \qquad \text{se } |z| < R$$

onde $\gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{it},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ e $R > 0$. Deduzir que, para $|z| < R$,

$$|f(z) - f(0)| \leqslant \frac{|z|R}{2\pi(R - |z|)} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} |f(R\mathrm{e}^{it})| \,\mathrm{d}t$$

Concluir que se

$$\sup_{R>0} \int_0^{2\pi} |f(R\mathrm{e}^{it})| \,\mathrm{d}t < \infty$$

então $f$ é uma constante. ( Note que isto generaliza o teorema de Liouville; este raciocínio é devido a Cauchy e é anterior ao enunciado do teorema de Liouville).

8) Continuando o exercício precedente mostre que se $f$ é uma função inteira e se

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} |f(R\mathrm{e}^{it})| \,\mathrm{d}t = 0$$

entâo $f$ é uma constante. O mesmo se

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} |f(R\mathrm{e}^{it})| \,\mathrm{d}t < \infty$$

mostrar que $f(z)$ é da forma $a + bz$, onde $a, b$ são constantes complexas.

9) Seja $f$ uma função inteira; se

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x + iy)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$$

mostrar que $f \equiv 0$, utilizando os seguintes raciocínios:

a) $\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x + iy)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi \int_0^{\infty} r\, M_1(r) \mathrm{d}r$ onde

$$M_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{it})| \mathrm{d}t.$$

b) Se $\inf_t |r\mathrm{e}^{it} - z| \geqslant 1,\ |z| < r,\ r > 1$ então obtém-se $|f(z)| \leqslant r\, M_1(r)$, escrevendo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w$$

onde $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{it},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

c) Do item b) deduzir que se $\liminf_{r\to\infty} r\, M_1(r) = 0$ então $f \equiv 0$.

d) Do item a) deduzir que $\lim_{r\to\infty} r\, M_1(r) = 0$ se $I < \infty$.

10) Seja $f$ uma função holomorfa definida num domínio $\Omega$ que contém o disco unitário fechado, isto é, $\{|z| \leqslant 1\} \subset \Omega$. O que você pode dizer de $f$ se $f$ satisfaz: $|f(z)| = 1$, se $|z| = 1$? (*Observação* : Não darei sugestões neste exercício de propósito para você testar a sua força!).

11) Seja $f(z) = z(z-1)(z-2)$. Mostre que o máximo de $f$ em $|z| \leqslant 1$ é atingido no círculo $|z| = 1$ e vale 6.

12) Mostre que $\sup\{|\sin z|;\ |\Re z| \leqslant \pi, |\operatorname{Im} z| \leqslant \pi\} = \sqrt{1 + \sinh^2 \pi}$. Em que pontos este máximo é atingido?

13) Seja $f$ uma função holomorfa não constante definida em $|z| < R$; coloquemos $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$ com $0 \leqslant r < R$. Mostre que $M : [0,R) \to [0,\infty)$ é estritamente crescente.

14) Seja $f$ uma função holomorfa não constante definida que está para $|z| > R$ $(R \geqslant 0)$ tal que $c = \lim_{|z|\to\infty} |f(z)|$ existe; para $r > R$ define-de $M(r)$ como no exercício precedente. Mostre que

$$M(r) = \sup_{|z|\geqslant r} |f(z)|$$

e $M : [R,\infty) \to [0,\infty)$ é estritamente decrescente.

15) Seja $f$ um polinômio de grau $n$; seja $M(r)$ como no exercıcio 13). Mostre que para $0 < r < s$

$$\frac{M(r)}{r^n} \geqslant \frac{M(s)}{s^n}$$

sendo que a igualdade vale $\Leftrightarrow$ $f(z)$ é da forma $a\, z^n$. *Sugestão*: Aplique o exercício anterior na função $g$ dada por $g(z) = f(z)/z^n$.

16) Seja $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $|z| < R$. Coloquemos $u = \Re f$, $v = \operatorname{Im} f$. Mostre que para $0 < r < R$, $n = 1, 2, \ldots$

$$c_n = \frac{1}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} u(r\,\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{i}{\pi r^n} \int_0^{2\pi} v(r\,\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

Deduzir que se $f$ é real sobre o círculo $|z| = r,\ 0 < r < R$, então $f$ é uma constante real em $|z| < R$. *Observação : Para ser lida após o princípio de reflexão de Schwarz.* Tente dar outra demonstração mais elegante utilizando o princípio de reflexão de Schwarz, combinado com o teorema de Liouville ou o princípio do máximo!!

17) (*Generalização do Teorema de Liouville.*) Continuação do exercício anterior: Seja $A(r) = \sup_{|z|=r}\{\Re f(z)\}$.

a) Estabeleça que

$$\Re c_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t,$$

deduza do exercício anterior que para $n = 1, 2, \ldots, 0 < r < R$,

b)

$$|c_n|r^n + 2\Re c_0 \leqslant \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\left|u(r\,\mathrm{e}^{it})\right| + u(r\,\mathrm{e}^{it})\right\}\mathrm{d}t.$$

c) Conclua que para $n = 1, 2, \ldots, 0 < r < R$,

$$|c_n|r^n \leqslant \max\{4A(r), 0\} - 2\Re f(0).$$

d) Use o que foi feito antes para mostrar o seguinte: se $f$ é uma função inteira e se $A(r) < Mr^{\alpha}$, para $r > R$ e $M, \alpha > 0$ dados então $f$ é um polinômio de grau $n \leqslant \alpha$. Em particular, mostre que se $A(r)$ é limitada superiormente então $f$ é constante (Veja o ex. 6) ).

e) (*Funções inteiras de ordem finita*). Seja $f(z)$ uma função inteira. Dizemos que $f(z)$ tem *ordem finita* se existe $R > 0$ e algum inteiro positivo $k$ tal que $|f(z)| \leqslant \mathrm{e}^{|z|^k}, \quad \forall z$ satisfazendo $|z| \geqslant R$.

i) Mostre que se $f(z)$ é uma função inteira sem zeros de ordem finita, então

$$f(z) = \mathrm{e}^{p(z)}$$

onde $p(z)$ é um polinômio.

ii) nas mesmas hipóteses acima, exceto que $f(z)$ *tem finitos zeros*, mostre que

$$f(z) = q(z)\,\mathrm{e}^{p(z)}$$

onde $q(z)$ e $p(z)$ são polinômios.

iii) Mostre que $f(z) = e^z - \dfrac{z^n}{a}$, $n \in \mathbb{N}$ e $a > e$ tem infinitos zeros em $\mathbb{C}$ mas não tem nenhum zero no disco unitário $B_1(0)$.

iv) Mostre que $f(z) = e^z - az^n$, $n \in \mathbb{N}$ e $a > e$ tem infinitos zeros em $\mathbb{C}$ mas tem exatamente $n$ zeros simples no disco unitário $B_1(0)$. *Sugestão*: Para a última conclusão você vai precisar do teorema de Rouché.

v) Mostre que $\mathrm{e}^{az} - p(z)$, onde $p(z)$ é um polinômio e $a \in \mathbb{C}$ tem infinitos zeros em $\mathbb{C}$.

18) Seja $X$ um conjunto do plano complexo $\mathbb{C}$. Seja $f_n$ uma seqüência de funções complexas definidas em $X$ que converge uniformemente em $X$ à uma função $f : X \to \mathbb{C}$. Suponha que

$$\inf_X \{|f_n(x)|;\ n \in \mathbb{N}\} > 0.$$

Mostre que a seqüência $\{1/f_n\}$ converge uniformemente em $X$ a $1/f$.

19) Seja $K$ um conjunto compacto de $\mathbb{C}$, seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções complexas contínuas definidas em $K$ que converge uniformemente em $K$ à uma função contínua $f : K \to \mathbb{C}$. Suponha que $f_n(z) \neq 0$ e que $f(z) \neq 0$, $\forall z \in K,\ n \in \mathbb{N}$. Mostre que $\inf\{|f_n(z)|,\ n \in \mathbb{N},\ z \in K\} > 0$. Agora com a ajuda do exercício anterior deduza que $\{1/f_n\}$ converge uniformemente em $K$ à $1/f$.

20) Seja $f$ uma função holomorfa na bola aberta $B_R(0)$ de raio $R$. Suponha que $f^{(n)}(z) \longrightarrow g(z)$ $(n \to \infty)$, uniformemente, localmente em $z \in B_R(0)$. Mostre *com todos os detalhes, refazendo todos os teoremas necessários para o estabelecimento do fato* que $g(z) = c\,\mathrm{e}^z$, onde $c$ é uma contante.

21) Seja

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}\, z^n, \quad |z| < R.$$

Suponha que a série $f(0) + f'(0) + \cdots$ converge. Mostre *com todos os detalhes, refazendo todos os teoremas envolvidos* que

a) A função $f$ é uma função inteira (isto é, analítica em todo o plano complexo).

b) A série $\sum_{n\geqslant 0} f^{(n)}(z)$ converge uniformemente, localmente em $\mathbb{C}$.
c) Seja $g(z) = \sum_{n\geqslant 0} f^{(n)}(z),\ z \in \mathbb{C}$. Mostre que $g^{'}(z) = g(z) - f(z),\ z \in \mathbb{C}$. Conclua que $g(z) = \mathrm{e}^{z}(g(0) - \varphi(z)),\ z \in \mathbb{C}$, onde $\varphi$ é uma primitiva em $\mathbb{C}$ da função $z \mapsto \mathrm{e}^{-z} f(z)$, tal que $\varphi(0) = 0$. Justifique rigorosamente todos os passos do seu raciocínio, inclusive a existência de tal primitiva em todo o plano complexo.

22) Seja $s = \sigma + it,\ \sigma = \Re s, t = \operatorname{Im} s$. Demonstre que a série $\sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$, converge no semi-plano $\sigma \geqslant \sigma_0$, para cada $\sigma_0 > 1$. Conclua que a função $\zeta(s) = \sum_{n\geqslant 1} n^{-s}$ define uma função holomorfa (*função zeta de Riemann*) no semi-plano aberto $\sigma > 1$. O que você pode dizer das séries de Dirichlet $\sum\limits_{n\geqslant 1} a_n\, n^{-s},\ (a_n \in \mathbb{C},\ n \geqslant 1,\ s \in \mathbb{C})$?

23) Seja $U$ um aberto de $\mathbb{C}$ e seja $K$ um subconjunto compacto de $U$. Mostre que existe uma constante $C$ dependendo apenas de $K$ e de $U$ tal que se $f$ é uma função holomorfa em $U$, então

$$\sup_K |f| \leqslant C \cdot \left( \int_U |f(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \right)^{1/2}$$

*Sugestão* : Use Parseval.

24) (*Estimativas de Cauchy para derivadas em conjuntos compactos*) Seja $\Omega$ um domínio de $\mathbb{C}$, $K \subset \Omega$ um compacto contido em $\Omega$, e $\tilde{K}$ uma vizinhança compacta de $K$ em $\Omega$. Mostre que para todo $k \in \mathbb{N}$ existe uma constante positiva $M_k$, dependendo apenas de $\Omega, K, \tilde{K}$ tal que

$$\sup_K |f^{(k)}(z)| \leqslant M_k \sup_{\tilde{K}} |f(z)|, \qquad \forall f \text{ holomorfa em } \Omega$$

25) Considere $U$ um aberto do plano complexo. Fixe um ponto $p \in U$. Seja $\mathcal{F}$ uma família de funções holomorfas definidas em $U$ cujas imagens estão contidas no disco unitário $\mathcal{D}$, levando $p$ em 0. Mostre que existe uma seqüência $\{f_n\},\ f_n \in \mathcal{F}$ que convergem uniformente em compactos de $U$ à uma função holomorfa $g : U \to \mathcal{D}$ satisfazendo

$$|g'(p)| \geqslant |f'(p)|$$

para toda $f \in \mathcal{F}$. *Sugestão* : Aplique a estimativa de Cauchy, o teorema de Montel e o princípio do máximo.

26) O seguinte problema para equações diferenciais ordinárias holomorfas de primeira ordem é fundamental

Considere $f(z,w)$ uma função holomorfa nas variáveis $z, w$, para $z$ numa vizinhança de $a$ e $w$ numa vizinhança de $b$. Considere o seguinte problema com condição inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = f(z,w) \\ w(a) = b \end{cases} \qquad (*)$$

O seguinte resultado é fundamental: O problema acima $(*)$ possui uma e apenas uma solução.

O mesmo resultado vale para equações diferenciais ordinárias holomorfas de ordem superior:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^n w}{\mathrm{d}z^n} = f(z, w, w', \dots, w^{(n-1)}) \\ w(a) = b \\ w'(a) = b_1 \\ w''(a) = b_2 \\ \dots \\ w^{(n-1)}(a) = b_{n-1} \end{cases} \qquad (**)$$

Quando a equação é linear um pouco mais pode ser dito: Considere

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \qquad (**)$$

onde $p(z)$ e $q(z)$ são holomorfas para $|z-a| < R, \quad R > 0$. Segue então que a solução geral de $(**)$ é combinação linear de duas soluções linearmente independentes holomorfas para $|z-a| < R$. Veja refs. 1), 3), 5) e 8).

a) Considere a equação diferencial abaixo

$$w'(z) + 2zw(z) = z^2 \qquad (*)$$

i) Mostre que toda solução de $(*)$ é inteira e que sempre existe tal solução.
ii) Seja $w(z) = \sum a_n z^n$, uma solução de $(*)$. Mostre que os coeficientes $a_n$ satisfazem uma *equação de diferenças linear de segunda ordem*,

usualmente chamada de *relação de recorrência*. Resolva esta equação calculando os coeficientes. Determine a solução geral da equação.

b) Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} w'(z) = \dfrac{z^2}{w} - 1 \\ w(0) = 0 \end{cases} \tag{$*$}$$

i) Assuma que existe uma solução de $(*)$ da forma

$$w(z) = -z + a_2 z^2 + \cdots$$

numa vizinhança de 0. Mostre que $a_2 = -1/2$, $a_3 = 1/6$ e que os coeficientes $a_n$ satisfazem a seguinte relação de recorrência para $n \geqslant 4$ :

$$-na_n + \sum_{k=1}^{n-2} (k+1)\, a_{n-k} a_{k+1} = 0$$

c) Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} (z^2 - 2z - 3)\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d} z^2} + 3(z-1)\dfrac{\mathrm{d} w}{\mathrm{d} z} + w = 0 \\ w(1) = 4 \\ w'(1) = 1 \end{cases} \tag{$*$}$$

i) Dê uma argumento, sem fazer conta, que $(*)$ possui uma solução que é dada por uma série de potências $f(z) = \sum a_n (z-1)^n$, de raio de convergência $R$ igual a 2.

ii) Encontre a equação de diferenças satisfeita pelos coeficientes $a_n$, referidos no item *i*).

iii) Encontre uma fórmula para os coeficientes $a_n$ em função de $n$.

iv) Fazendo obrigatoriamente dois cálculos distintos, calcule de duas maneiras distintas explicitamente o raio de convergência da série.

v) Calcule $f^{(2003)}(1)$.

vi) Calcule a integral

$$\int_{|\zeta-1|=1} \frac{f(\zeta)}{(\zeta-1)^{2004}}\,\mathrm{d}\zeta$$

vii) Encontre a solução da equação diferencial

$$\begin{cases} (z^2-2z-3)\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2} + 3(z-1)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} + w = 1+z+z^2 \\ \qquad w(1) = 4 \\ \qquad w'(1) = 1 \end{cases}$$

27) (*Equações singulares regulares de segunda ordem*)

Vamos fazer uma incursão na teoria das equações diferenciais complexas lineares de segunda ordem *singulares regulares*. Vamos considerar uma equação da forma

$$w''(z) + a(z)w'(z) + b(z)w(z) = 0 \tag{$*$}$$

onde $a(z), b(z)$ são funções holomorfas num disco perfurado $0 < |z-z_0| < r$. Se pelo menos uma das funções $a(z), b(z)$, não é holomorfa numa vizinhança de $z_0$, dizemos que $z_0$ é um *ponto singular* de $(*)$. Caso contrário, dizemos que $z_0$ é um ponto regular. Neste caso, o teoria geral de sistemas holomorfos pode ser aplicada para garantir a existência de duas soluções holomorfas linearmente independentes $w_1(z)$ e $w_2(z)$ que geram o espaço de soluções de $(*)$. Uma demonstração usando a teoria de *séries majorantes* pode ser encontrada na ref. 11). Vamos nos interessar doravante no caso singular.

Caso $z_0$ não seja um ponto regular e $a(z)$ tenha no máximo um pólo de primeira ordem (em $z_0$) e $b(z)$ tenha no máximo um pólo de segunda ordem, dizemos que $z_0$ é um *ponto singular regular*. Um ponto singular que não é um ponto singular regular é chamado de *ponto irregular*.

A definição para $z = \infty$ é feita de maneira análoga fazendo a substituição $\zeta = \dfrac{1}{z}$. Com efeito: O resultado desta mudança de variáveis é a seguinte equação

$$\frac{\mathrm{d}^2 v(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^2} + \frac{\mathrm{d}v(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\left(\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2}\,a\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right) + \frac{1}{\zeta^4}\,b\left(\frac{1}{\zeta}\right)v(\zeta) = 0 \tag{$**$}$$

onde $v(\zeta) := w(1/z)$. O ponto $z = \infty$ é chamado de regular ou singular regular consoante que o ponto $\zeta = 0$ é um ponto regular ou singular regular para a equação $(**)$.

a) Sejam $a(z)$ e $b(z)$ funções holomorfas para $|z| > r$. Mostre que o ponto $z = \infty$ é um ponto singular regular de $(*)$, se e somente se $a(z)$ tem um zero e $b(z)$ tem um zero múltiplo em $z = \infty$ (ou equivalentemente, $za(z)$ e $z^2 a(z)$ tem limites finitos em $z = \infty$). Em particular, conclua que o ponto é regular, se e somente se o coeficiente $a_{-1}$ da série de Laurent de $a(z)$ em $|z| > r$ é $a_{-1} = 2$, e os coeficientes $b_{-2}, b_{-3}$ da série de Laurent de $b(z)$ são nulos.

Suponha que $z = 0$ é um ponto singular da equação $(*)$ e considere os desenvolvimentos de Laurent em $z = 0$

$$a(z) = \frac{1}{z}\sum_{0}^{\infty} a_k z^k, \qquad b(z) = \frac{1}{z^2}\sum_{0}^{\infty} b_k z^k, \qquad 0 < |z| < \epsilon$$

Considere a chamada *equação indicial*

$$\rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0 = 0 \tag{I}$$

b) Sabendo que $z = 0$ é uma singularidade regular da equação $(*)$ mostre que sempre existe uma solução $u(z)$ de $(*)$ da forma (*método de Frobenius*)

$$u(z) = z^r\left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n(r) z^n\right)$$

onde $r$ é uma raíz da equação indicial $(I)$, e os coeficientes $\alpha_n(r)$ são obtidos por uma certa relação de recorrência que você deve explicitar; sendo a série a esquerda da igualdade acima convergente numa vizinhança da origem.

Sejam $r_1$ e $r_2$ as raízes da equação indicial, com $\Re r_1 \geqslant \Re r_2$.

c) Mostre que quando $r_1 - r_2$ *não é um inteiro* podemos encontrar uma soluções $u_1(z)$ e $u_2(z)$ linearmente independentes de $(*)$ pelo método do item b).

d) Mostre que quando as raízes da equação indicial são iguais a $r = r_1$, obtemos uma segunda solução $v(z)$ independente da solução $u(z)$ encontrada no item b) pela fórmula

$$v(z) = u(z) \log z + z^{r_1} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha_n(r_1)}{\mathrm{d}r} z^n \right)$$

onde os coeficientes $\alpha_n$ são obtidos no item b) e a série a esquerda da igualdade converge numa vizinhança da origem.

*Sugestão* : Olhe como é feita a demonstração da obtenção das soluções fundamentais da Equação de Euler : $z^2 w'' + azw' + bw = 0, a, b \in \mathbb{C}$, no caso que as raízes são iguais.

e) Considere o caso que $r_1 - r_2 = N > 0$, é um inteiro. Mostre que uma segunda solução $v(z)$ independente de $u(z)$ pode ser obtida pela fórmula

$$v(z) = cu(z) \log z + z^{r_2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left((r - r_2)\alpha_n(r)\right) \Big|_{r=r_2} z^n$$

onde $c = \lim_{r \to r_2} (r - r_2) a_N(r)$.

e) Considere a equação de Bessel de *ordem* $\alpha$

$$z^2 w''(z) + zw'(z) + (z^2 - \alpha^2) w(z) = 0$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma constante com $\Re\alpha \geqslant 0$.

i) Mostre que $z = 0$ é um ponto singular regular e $z = \infty$ é um ponto irregular para a equação de Bessel.

ii) Mostre que as raízes da equação indicial são $\rho = \alpha$ e $\rho = -\alpha$.

Considere as funções de Bessel

$$J_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n! \Gamma(n + \alpha + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\alpha}$$

onde $\Gamma$ é a função Gamma. Para $\alpha \neq -1, -2, \ldots$, são chamadas *funções de Bessel de primeiro tipo e índice* $n$ *(quando* $\alpha = n \in \mathbb{N}$*)*.

Considere as funções de Bessel

$$Y_n(z) = -\frac{2}{\pi} \log \frac{z}{2} J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m (n-1)!}{m! (1-n) \cdots (1-n+m-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$, são chamadas de *funções de Bessel de segundo tipo e índice* $n$ .

iii) Mostre que quando $\alpha$ não é um inteiro tem-se que $J_\alpha(z)$ e $J_{-\alpha}(z)$ são soluções linearmente independentes da equação de Bessel.

iv) Mostre que quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, um par de soluções independentes é dado por $J_n(z)$ e $Y_n(z)$.

iv) Encontre as soluções explícitas da equação de Bessel de ordem zero, mostrando que $J_0(z)$ é inteira e estude o comportamento da solução geral quando $z \to 0$.

v) Estude a equação de Bessel de ordem meio e mostre explícitamente que a segunda solução *não possui termo logarítmico* embora a diferença das raízes seja um inteiro.

vi) Encontre as soluções explícitas da equação de Bessel de ordem um, mostrando que $J_1(z)$ é inteira e estude o comportamento da solução geral quando $z \to 0$.

vii) Exercício-pesquisa: Mostre que as funções de Bessel $J_n(z)$ tem um número infinito de zeros na semi-reta real positiva. Mostre também que as funções de Bessel $Y_n(z)$ são ilimitadas na origem.

Dizemos que a equação $(*)$ é *Fuchsiana*, se esta possui um número finito de singularidades em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, sendo todas as singularidades regulares.

e) Considere a equação de Legendre

$$(z^2 - 1)w''(z) + 2zw'(z) - \alpha(\alpha + 1)w(z) = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

i) Mostre que a equação de Legendre é Fuchsiana.

ii) Mostre que quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, existe um polinômio $P_n(z)$ que é solução da equação de Legendre. Mostre que $P_n(1) = 1$, $P_n(-z) = (-1)^n P_n(z)$. Além disso, mostre a *fórmula de Rodrigues*

$$P_n(z) = \frac{1}{n!2^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, z^n} (z^2 - 1)^n$$

calculando $P_0(z), P_1(z), P_2(z), P_3(z)$.

f) Estude a *série hipergeométrica*

$$z(1 - z)w''(z) + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)z)\, w'(z) - \alpha\beta w(z) = 0$$

Nota: A teoria das equações singulares regulares de segunda ordem, aparece em várias áreas da Matemática Pura e Aplicada:

- Teoria das Transformações Conformes. A série hipergeométrica aparece na construção de uma transformação conforme explícita do disco unitário aberto $|z| < 1$ sobre o interior de um triângulo geodésico $\triangle$ no disco hiperbólico.
- Na Análise Harmônica ( análise de Fourier, séries de Fourier-Bessel, problemas de Sturm-Liouville singular).
- na Física Matemática e Mecânica (eq. da membrana oscilante, temperatura de um cilindro longo).
- Equações Diferenciais Parciais (problemas de Dirichlet em regiões esféricas)
- Teoria das superfícies de curvatura média 1 no espaço hiperbólico (que são "primas " das mínimas de $\mathbb{R}^3$).

g) Faça o exercício 4) da parte C da lista 2.

## BIBLIOGRAFIA

1. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variables.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.

2. Anthony D. Osborne.*Complex variables and their applications.* Addison-Wesley, 1999

3. Christian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps.* Springer, 1992.

4. Einar Hille. *Analytic function theory.* Dois volumes, Chelsea, Nova York, 1982.

5. Georges Valiron. *Théorie des functions.* Troisième edition, Masson, 1966.

6. Henri Cartan. *Teoria elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas.* Selecciones Cientificas, Madrid, 1968.

7. Jean-François Pabion. *Éléments d'analyse complexe.* Edition Marketing, Paris, 1995.

8. John B. Conway. *Functions of one complex variable I.* Segunda edição Springer, 1995.

9. J. Gerretsen e G. Sansone. *Lectures on the theory of functions of complex*

*variable.* Wolters-Noordhoff Publishing Goningen 1969 ( dois volumes).

10. J. Rivaud. *Exercices d' Analyse.* Vuibert, Paris, 1981.
11. Joseph Bak e Donald J. Newman. *Complex Analysis.* Second edition, Springer, 1997.
12. K. Knopp. *Elements of the theory of functions.* Dois volumes (com dois volumes de exercícios), Dover, Nova York, 1952.
13. Lars Ahlfors. *Complex analysis.* Mc Graw-Hill, 1996.
14. Norman Levinson e Raymond M. Redheffer. *Complex variables.* Holden-Day, SãoFrancisco, 1970.
15. Patrice Tauvel. *Analyse complexe.* Exercices corrigés. Dunod, 1999.
16. Rami Shakarchi. *Problems and solutions for complex analysis.* Springer, 1999.
17. Reinhold Remmert. *Theory of complex functions.* Springer, 1991 ( *Readinds in Mathematics*).
18. R. E Greene e S. G. Krantz. *Function theory of one complex variables.* John Wiley and Sons, N. Y, 1997.
19. Serge Lang. *Complex analysis.* Quarta edição, 1999.
20. Sristi Chatterji. *Cours d'analyse 2, Analyse complexe.* Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Suiça, 1997.
21. Stephen D. Fisher. *Complex variables.* Second Edition. Dover Public., N. Y, 1999.
22. Steven G. Krantz. *Handbook of complex variables.* Birkäuser, Boston, 1999.
23. Walter Rudin. *Real and complex analysis.* Mc Graw-Hill,1987.
24. William E. Boyce e Richard C. Di Prima. *Equações diferenciais elementares e problemas de contorno.* LTC Livros técnicos e científicos.
25. Wolfgang Walter. *Ordinary differential equations.* Readings in mathematics, Springer, 1998.
26. Zeev Nehari. *Conformal mapping.* Dover, 1952