

VCOMPLEXAS-JULHO de 2003–Lista 5

Professor: Ricardo Sá Earp

PARTE A: FÓRMULA DE CAUCHY - CONSEQÜÊNCIAS II

1) Considere uma função holomorfa $f(z)$ numa vizinhança da origem que satisfaz $f(2z) = f(z)$ sobre um intervalo do eixo real. O que você pode dizer sobre f ? *Sugestão:* Mostre primeiramente que $f(z)$ é inteira. Em seguida aplique o princípio do máximo ou o teorema de Liouville para completar a demonstração. Você saberia dar uma outra dedução baseada em continuação analítica?

2) Mostre a seguinte versão do teorema de Cauchy: Seja $f(z)$ uma função contínua definida em um aberto $A \subset \mathbb{C}$ e holomorfa em todo ponto de A , exceto quiza em pontos de uma reta L paralela ao eixo real. Mostre que a forma $f(z) dz$ é localmente exata, isto é, $f(z)$ admite localmente uma primitiva. Conclua que $f(z)$ é holomorfa em todos os pontos de A , sem exceção. Em particular, conclua que se $f(z)$ é holomorfa em todos os pontos de A exceto, possivelmente, em pontos isolados, então $f(z)$ é holomorfa em A .

Sugestão: Mostre que a integral $\int_{\gamma} f(z) dz$ é nula para o bordo γ de todo retângulo R contido em A . Os dois casos não evidentes são quando um dos lados do retângulo se apoia sobre L , ou quando L corta R . Use a continuidade da integral acima para perfazer os detalhes.

3) (*Princípio de reflexão de Schwarz*) O princípio de reflexão de Schwarz tem muitas aplicações na teoria das transformações conformes, como por exemplo na *fórmula de Schwarz-Christoffel*. Demonstre com todos os detalhes a versão do *princípio de reflexão de Schwarz* quando o círculo $|z| = 1$ substitue \mathbb{R} . Faça o mesmo para círculos quaisquer. *Sugestão:* Use uma transformação de Möbius conveniente.

a) Mostre que se $f(z)$ é inteira e real no eixo real, imaginário puro no eixo imaginário, então $f(z)$ é impar.

b) Se $f(z)$ é inteira e satisfaz $|f(z)| = 1$, para $|z| = 1$, o que você pode dizer sobre f ? Por outro lado, se f leva o disc unitário $B_1(0)$ em si mesmo e satisfaz $|f(z)| = 1$, para $|z| = 1$, o que você pode dizer sobre f ?

- c) Mostre que uma *transformação conforme* $w = f(z)$ que leva o disco unitário $B_1(0)$ sobre a esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, *cortada ao longo do raio* $-\infty \leq w \leq \frac{-1}{4}$, pode ser estendida para além do círculo $|z| = 1$, satisfazendo a relação

$$f(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}$$

além disso, mostre que $w = f(z)$ leva a esfera de Riemann sobre a esfera de Riemann recoberta duas vezes (de grau 2); logo conclua que deve ser uma função racional com dois pólos. Com a normalização $f(0) = 0$ e $f'(0) > 0$, mostre que $f(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$ é a função de Koebe.

- d) Mostre que uma função holomorfa $w = f(z)$ que leva a bola $|z| < 1$, sobre a bola $|w| < 1$, recoberta n vezes tem que ser uma função racional com n pólos.
- 4) Seja f e g duas funções holomorfas em um domínio Ω do plano complexo que não se anulam em nenhum ponto de Ω . Suponha que existe uma seqüência $\{a_n\}$ de pontos de Ω , tais que $\lim a_n = a$, se $n \rightarrow \infty$, $a \in \Omega$ e $a_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Suponha ainda que

$$\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

O que você pode dizer de $f(z)$ e $g(z)$?

- 5) Seja f uma função holomorfa em um aberto A e seja g definida em $A \times A$ por

$$g(z, w) = \begin{cases} \frac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{se } w \neq z \\ f'(z) & \text{se } w = z. \end{cases}$$

Mostre que g é contínua em $A \times A$. *Sugestão:* É claro que os únicos pontos que podem gerar dúvidas estão na diagonal $z = w$. Fixe $a \in A$. Seja $B(a, r)$ um disco aberto de centro a e raio r inteiramente contido em A , r suficientemente pequeno. Se z, w estão em $B(a, r)$ e se $\gamma(t) = (1-t)z + tw$, então $\gamma(t) \in B(a, r)$, $0 \leq t \leq 1$. Mostre que vale

$$g(z, w) - g(a, a) = \int_0^1 [f'(\gamma(t)) - f'(a)] dt$$

Use a continuidade de $f'(z)$ para concluir o argumento.

- 6) Suponha que Ω seja um domínio e que $f(z)$ seja uma função holomorfa em Ω , *univalente*, isto é um a um. Mostre que $f(z)$ dá uma equivalência conforme entre Ω e sua imagem.
- 7) Mostre que $e^{z+a} = e^z e^a$ usando um argumento baseado em prolongamento analítico.
- 8) Usando a fórmula de Cauchy local calcule diretamente as seguintes integrais:
- $\int_{\gamma} \frac{\sin z}{z^3} dz, \quad \gamma(t) = e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi.$
 - $\int_{\gamma} \frac{\log z}{z^n} dz, \quad \gamma(t) = 1 + 1/2e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi, n > 0.$
 - $\int_{\gamma} \frac{e^z - e^{-z}}{z^n} dz, \quad \gamma(t) = 10^{-100}e^{-3it}, 0 \leq t \leq 2\pi, n > 0.$
 - $\int_{\gamma} \frac{dz}{z^2 + 1}, \quad \gamma(t) = 2e^{it}.$
- 9) Calcule a integral $\int_{\gamma} \frac{z^2 + 1}{z(z^2 + 4)} dz$ onde $\gamma(t) = re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$, para todos os valores possíveis de $r, 0 < r < 2$ e $2 < r < \infty$.
- 10) Seja Ω um domínio simplesmente conexo e seja $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ uma função analítica tal que $f(z) \neq 0$ para todo z em Ω . Mostre que existe uma função analítica $g : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $f(z) = e^{g(z)}$. Se $z_0 \in \Omega$ e $w_0 = f(z_0)$, pode-se escolher g tal que $g(z_0) = w_0$.
- 11) Dê um exemplo de uma curva em $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}, a \neq b$ tal que γ seja “homologicamente” trivial (i.e *winding number* $n(\gamma, a) = n(\gamma, b) = 0$), mas que não seja homotopicamente trivial em $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$.
- 12) Calcule $\int_{\gamma} \frac{e^z - e^{-z}}{z^4} dz$ para uma curva que faz “ n ” voltas em torno da origem.
- 13) Neste exercício vamos fazer algumas aplicações do *teorema de convergência de Weierstrass*.
- (*Teorema da série dupla de Weierstrass*) Seja $f(z) = \sum f_n(z)$, onde cada função é holomorfa no disco $|z - a| < R$, e a série converge uniformemente para $|z - a| \leq \rho R$, para cada ρ , com $0 < \rho < 1$. Além disso suponha que $f_n(z) = \sum a_{k,n}(z - a)^k$. Mostre que

$$\sum a_{k,n} := A_k, \quad k = 0, \dots$$

converge, e , para $|z - a| < R$,

$$f(z) = \sum A_k(z - a)^k$$

ou seja
$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n}(z - a)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n} \right) (z - a)^k.$$

- i) Obtenha o desenvolvimento de Taylor da série de funções holomorfas abaixo na origem, justificando rigorosamente os detalhes de seu argumento:

$$\sum_1^{\infty} \frac{z^n}{1 - z^n}$$

- b) (*Forma fraca do teorema de Mittag-Leffler*) O teorema de Mittag-Leffler é um dos mais profundos e importantes teoremas da Análise complexa. Se $\{c_1, c_2 \dots\}$, é uma seqüência localmente finita de pontos num domínio Ω , que está de algum modo associada uma “parte principal ” $p_k(z) := \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}(z - c_k)^{-j} \neq 0$; então é possível encontrar uma função meromorfa em Ω cujos pólos são exatamente os pontos $c_1, c_2 \dots$ e cuja parte principal é exatamente $p_k(z)$. Vamos demonstrar diretamente algumas versões fracas deste resultado.

Considere $\{a_n\}$, uma seqüência de números complexos não nulos, dois a dois distintos que não possui ponto de acumulação em \mathbb{C} . Suponha que $\{b_n\}$ seja uma seqüência de números complexos não nulos.

- i) Mostre que se $\sum \frac{|b_n|}{|a_n|^2} < \infty$, então é possível encontrar imediatamente uma função meromorfa em \mathbb{C} , possuindo apenas pólos simples, tal que os a_n são exatamente os pólos de $f(z)$ (com resíduo b_n).
- ii) Mostre que em geral é possível encontrar uma função meromorfa em \mathbb{C} , cujos únicos pólos são os a_n que são pólos simples (com resíduo b_n). *Sugestão* : Considere $\sum \frac{b_n z^{r_n}}{a_n^{r_n} (z - a_n)}$, e encontre condições suficientes sobre r_n para que a série convirja uniformemente em compactos de \mathbb{C} no sentido de séries de funções meromorfas.
- iii) Suponha que

$$\sum \frac{1}{|a_n|^k} = \infty \quad \text{e} \quad \sum \frac{1}{|a_n|^{k+1}} < \infty, \quad k > 0 \quad (n \geq 1)$$

Mostre que

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \dots + \frac{z^{k-1}}{z_n^k} \right)$$

é uma função meromorfa em \mathbb{C} cujos pólos são os pontos a_n ($a_0 := 0$) todos sendo pólos simples. Mostre que quando os a_n são dois a dois distintos em cada pólo o resíduo é 1.

iv) (*Funções elípticas*). Funções elípticas são funções meromorfas duplamente periódicas e estão sempre associadas a um reticulado Γ de \mathbb{C} . Considere o reticulado standard Γ determinado pelo conjunto $\Gamma = \{m + in, m, n \in \mathbb{N}\}$. Considere $\omega_{mn} = m + in$. Mostre que $\sum \frac{1}{|\omega_{mn}|^\alpha} < \infty$ para $\alpha > 2$, e $\sum \frac{1}{|\omega_{mn}|^\alpha} = \infty$ para $\alpha = 2$. Conclua do exercício anterior que a *função zeta de Riemann* dada por

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum \left(\frac{1}{z - \omega_{mn}} + \frac{1}{\omega_{mn}} + \frac{z}{\omega_{mn}^2} \right)$$

é uma função meromorfa em \mathbb{C} . A função

$$\wp(z) = -\zeta'(z) = \frac{1}{z^2} + \sum \left(\frac{1}{(z - \omega_{mn})^2} - \frac{1}{\omega_{mn}^2} \right)$$

é a famosa função \wp de Weierstrass. Mostre que \wp é uma função elíptica de grau 2 cujos pólos (duplos) são exatamente os pontos do reticulado. Você agora está convidado a fazer um estudo de funções elípticas por exemplo nas refs. 4), 5), 9) ou 10).

- 14) (*Teorema de Montel e teorema de Vitali*) O Teorema de Montel é um teorema fundamental da Análise Complexa que tem várias aplicações importantes: Pode-se mostrar, por exemplo, o *grande teorema de Picard*, usando a versão do teorema de Montel para funções meromorfas que diz que uma família de funções meromorfas omitindo três pontos fixados da esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é *normal*, veja ref. 4), 9), ou 12).

a) Discuta amplamente o conceito de *família normal* das Variáveis Complexas, relacionando com o teorema de Arzelà-Ascoli e com o *teorema de Montel para funções meromorfas*. Discuta o *princípio de Bolzano-Weierstrass* neste contexto. Além disso, discuta como o *princípio de*

compacidade interfere na demonstração do *teorema de uniformização de Riemann*.

- b) Seja \mathcal{F} a família de funções holomorfas $\{f : B_1(0) \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}\}$, definidas no disco unitário satisfazendo

$$|f(z)| \leq \frac{c_0|z|}{(1-|z|)^2}$$

$$c_0 > 0$$

Mostre que toda seqüência $\{f_n\}$ de funções em \mathcal{F} , contém uma subseqüência $\{f_{n_j}\}$ uniformemente convergente em todo compacto $K \subset B_1(0)$, à uma função $f \in \mathcal{F}$. Agora suponha que os elementos $f \in \mathcal{F}$ da família \mathcal{F} sejam *funções univalentes* no disco, satisfazendo $f'(0) = 1$. Será que \mathcal{F} é compacta ?

- c) Seja u_n uma seqüência de funções harmônicas definidas num domínio Ω . Assuma que em todo compacto $K \subset \Omega$, u_n é uma seqüência de funções uniformemente limitada. Assuma que as derivadas parciais de cada u_n dependem em todo ponto $p \in \Omega$ - em valor absoluto- apenas da limitação da altura de cada u_n e da distância de p ao bordo de Ω . Mostre que existe uma subseqüência u_{n_j} que é uniformemente em todo compacto $K \subset \Omega$, convergindo à uma função harmônicas u em Ω .
- d) Sabe-se que se $f(z) \not\equiv 0$ é uma função holomorfa limitada definida no disco unitário aberto $B_1(0)$, e se a_1, a_2, \dots é a seqüência de zeros de $f(z)$ então tal seqüência satisfaz a condição de Blaschke

$$\sum (1 - |a_n|) < \infty$$

Tal resultado pode ser demonstrado a partir da *fórmula de Jensen*, veja o exercício 15) c) logo adiante veja também lista 6. Usando este fato e o teorema de Montel, mostre o seguinte: Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções holomorfas limitadas definidas em $B_1(0)$. Seja $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \dots\}$, um conjunto enumerável em $B_1(0)$, satisfazendo

$\sum (1 - |a_n|) = \infty$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(a_j)$, existe para todo $a_j \in \mathcal{A}$. Então a seqüência $\{f_n\}$ converge uniformemente em compactos de $B_1(0)$.

- e) Considere \mathcal{F}_M a família de funções holomorfas $f(z) = \sum a_n z^n$, definidas em $B_1(0)$ satisfazendo $|a_n| \leq M$, para alguma constante $M > 0$. Mostre

que \mathcal{F}_M é normal. Mostre que $\mathcal{F}_M^k = \{f^{(k)}(z); f \in \mathcal{F}_M\}$ também é uma família normal.

- f) Considere o conjunto (“espaço de Bergman”) $H(\Omega)$ de funções holomorfas num domínio Ω que satisfazem

$$\int_{\Omega} |f(z)|^2 dx dy < \infty$$

Tal conjunto tem uma estrutura natural de espaço de Hilbert e é um subespaço de $L^2(\Omega)$. Mostre que a bola B de raio r , dada por

$$B = \{f \in H(\Omega); \int_{\Omega} |f(z)|^2 dx dy < r\}$$
 é uma família normal.

- g) Seja Ω um aberto não vazio de \mathbb{C} , $I = [a, b]$ um intervalo qualquer de \mathbb{R} . Seja $\gamma : [a, b] \rightarrow \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva C^1 ($[\gamma] := \gamma([a, b]) \subset \Omega$). Seja $g(z, \zeta) : \Omega \times [\gamma] \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua, tal que $z \mapsto g(z, \zeta)$ é holomorfa em Ω para cada $\zeta \in [\gamma]$. Mostre, usando o teorema de Vitali que a função f definida por

$$f(z) = \int_{\gamma} g(z, \zeta) d\zeta, \quad z \in \Omega \quad (*)$$

é holomorfa em Ω ; além disto mostre que

$$f'(z) = \int_{\gamma} \frac{\partial g}{\partial z}(z, \zeta) d\zeta \quad \forall z \in \Omega \quad (**)$$

sendo a existência da integral a esquerda da igualdade acima parte da pergunta a ser respondida.

Nota: O resultado acima pode, por exemplo, ser aplicado para mostrar a existência da função Gamma, na sua representação integral, veja na parte D) desta lista.

- 15) (*O lema de Schwarz*) O lema de Schwarz tem muitas aplicações na teoria de aplicações conformes. Também tem aplicações na moderna teoria da Dinâmica Complexa, veja ref. 23).

- a) Seja $f(z)$ uma função holomorfa no disco aberto $B_1(0)$, satisfazendo $\Re f(z) > 0$, e $f(0) = 1$. Mostre que

$$\frac{1 - |z|}{1 + |z|} \leq |f(z)| \leq \frac{1 + |z|}{1 - |z|}$$

Dê exemplos explícitos de tais $f(z)$. O que você pode dizer da família \mathcal{F} de funções que satisfazem as hipóteses acima, \mathcal{F} é *normal*? O que acontece se relaxamos nas hipóteses acima, colocando $\Re f(z) \geq 0$?

b) Seja $f(z)$ uma função limitada no disco $B_1(0)$. Suponha que $|f(z)| \leq 1, \forall z \in B_1(0)$. Mostre que

$$\frac{|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leq \frac{1}{1 - |z|^2}$$

c) Seja $f(z)$ uma função limitada no disco $B_1(0)$. Suponha que $|f(z)| \leq 1, \forall z \in B_1(0)$. Suponha que a_1, a_2, \dots, a_n , sejam zeros de $f(z)$. Mostre que

$$|f(z)| \leq \prod_{k=1}^n \left| \frac{z - a_k}{1 - \overline{a_k}z} \right|$$

em particular conclua um caso particular da fórmula de Jensen

$$|f(0)| \leq \prod_{k=1}^n |a_k|$$

Nota: Usando a teoria de *produtos infinitos* (veja na lista 6)) é possível mostrar a partir da desigualdade acima que se $f(z) \not\equiv 0$ é uma função holomorfa limitada definida no disco unitário aberto $B_1(0)$, e se a_1, a_2, \dots é a seqüência de zeros de $f(z)$ então tal seqüência satisfaz a condição de Blaschke

$$\sum (1 - |a_n|) < \infty$$

d) (*Princípio de subordinação*). Mostre as seguintes aplicações do princípio de subordinação que, essencialmente, é uma forma do Lema de Schwarz (assim, se você conhece bem o Lema de Schwarz, deverá poder fazer os exercícios abaixo).

i) Mostre que se $f(z)$ é holomorfa no disco aberto $B_1(0)$, e satisfaz $-1 < \Re f(z) < 1$, então se $f(0) = 0$, segue que $f(z)$ satisfaz

$$|f'(0)| \leq \frac{4}{\pi}$$

sendo a igualdade satisfeita apenas pela função $\frac{4}{\pi} \arctan(\lambda z)$, onde $|\lambda| = 1$. Além disso, mostre que

$$|f(z)| \leq \frac{2}{\pi} \log \frac{1+r}{1-r}, \quad |z| = r < 1$$

ii) Seja $F(z)$ uma função meromorfa univalente no disco $B_1(0)$, com seguinte expansão

$$F(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \dots$$

em $B_1(0)$. Suponha que $F(z)$ leva $B_1(0)$ num *certo domínio* Ω . Seja $f(z)$ uma função holomorfa no disco perfurado $B_1(0) \setminus \{0\}$, com expansão

$$f(z) = \frac{\alpha}{z} + b_0 + b_1 z + \dots$$

em $B_1(0) \setminus \{0\}$.

Mostre que se $f(z)$ leva $B_1(0)$ em Ω , então $|\alpha| \geq 1$.

iii) Seja $f(z)$ uma função holomorfa no disco perfurado $B_1(0) \setminus \{0\}$, com expansão

$$f(z) = \frac{\alpha}{z} + b_0 + b_1 z + \dots$$

Mostre que se $f(z)$ leva $B_1(0)$ em $\mathbb{C} \setminus (a, b)$, (com a, b reais e $a < b$) então $|\alpha| \geq \frac{b-a}{4}$. *Sugestão*: Você terá que encontrar uma função meromorfa univalente que leva o disco $B_1(0)$ conformemente sobre a esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ cortada ao longo do segmento $[a, b]$.

PARTE B: DESENVOLVIMENTO DE LAURENT, SINGULARIDADES

1) Expanda as funções abaixo em suas séries de Laurent, justificando todos os passos.

a) $e^{\frac{1}{z-1}}$ para $|z| > 1$. *Sugestão*: Escreva (fazendo $\frac{1}{z} = z'$)

$$e^{\frac{1}{z-1}} = e^{\frac{z'}{1-z'}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z'^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

onde

$$c_n = \sum_{k=1}^n \frac{\binom{n-1}{k-1}}{k!}$$

- b) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$, para $|z| > 2$. Onde o ramo da raiz quadrada está escolhido de forma que seja positivo para $z = x$ real $x > 2$. *Resp.:*

$$\left[c_0 z - c_1 + \frac{c_2}{z} - \frac{c_3}{z^2} + \dots \right],$$

Onde (colocando $\alpha = 1/2$)

$$c_n = \binom{\alpha}{n} + 2 \binom{\alpha}{n-1} \binom{\alpha}{1} + 2^2 \binom{\alpha}{n-2} \binom{\alpha}{2} + \dots + 2^n \binom{\alpha}{n}.$$

Sugestão: Use o desenvolvimento binomial.

- c) $\frac{1}{(z-a)(z-b)}$, para $0 < |a| < |z| < |b|$. *Resp. :*

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b} \left[\dots + \frac{a^2}{z^3} + \frac{a}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{b} + \frac{z}{b^2} + \frac{z^2}{b^3} + \dots \right]$$

- d) A mesma função para $|z| > b$.

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{b-a} \left[\frac{b-a}{z^2} + \frac{b^2-a^2}{z^3} + \frac{b^3-a^3}{z^4} + \dots \right]$$

- e) $\frac{e^z}{(1-z)}$, para $|z| < 1$. *Sugestão:* Seja $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ o desenvolvimento de Laurent (Taylor) da função dada (por quê?). Use a fórmula de multiplicação de séries para calcular a_n mostre que

$$a_n = \left(1 + \dots + \frac{1}{n!} \right), \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1$$

- f) $\frac{1}{z^2+1}$, para $0 < |z-i| < 2$. *Resp.*

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{-i/2}{(z-i)} + \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4} \left(\frac{i}{2} \right)^n (z-i)^n$$

g) Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{1-z} e^{1/z}$$

- i) Escreva o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ em $\{|z| > 1\}$, justificando cada passo de seus cálculos. Encontre o resíduo de $f(z)$ no ∞ .
- ii) Idem para o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no anel $\{0 < |z| < 1\}$.
- h) Para cada uma das funções $f(z)$ dada nos itens a) a g) acima calcule

$$\int_{\gamma} \frac{f(z)}{(z-a)^n} dz$$

onde a é uma singularidade isolada de $f(z)$ e γ é uma curva simples fechada envolvendo tal singularidade de $f(z)$ (e não envolvendo outra singularidade de $f(z)$)

2)

a) Seja $f(z) = \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$. Justifique o fato que f é uma função meromorfa e que tem polo duplo em $z = i$. Escreva o desenvolvimento de Laurent de f numa vizinhança de $z = i$. Mostre que $\text{Res}(f, i) = \frac{-3}{4e}$.

b) Calcule os resíduos de $f(z) = \frac{1}{z^6+1}$ em cada um de seus polos.

3) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e mostre que

$$\exp \left\{ \frac{1}{2} \lambda \left(z + \frac{1}{z} \right) \right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n} \right)$$

para $0 < |z| < \infty$, onde para $n \geq 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{\lambda \cos t} \cos nt \, dt.$$

4) Dizemos que uma função $f(z)$ definida no anel $|z| > r$, $r > 0$ é “holomorfa no infinito” se, fazendo uma mudança de variáveis $z = 1/z'$ a função se expressa como uma função holomorfa em z' para $|z'| < 1/r$. Da mesma maneira uma

função $f(z)$ será *meromorfa no infinito* se esta pode se expressar como uma função meromorfa de z' numa vizinhança de $z' = 0$. Finalmente uma função holomorfa para $|z| > r$, $r > 0$ admite o ponto do infinito como singularidade essencial se a função $f(1/z')$ tem uma singularidade essencial na origem.

Determine o tipo de singularidade das funções abaixo e escreva o desenvolvimento de Laurent em torno de cada singularidade.

- a) $\frac{z^2 + 4}{e^z}$, em $z = \infty$. *Resp.* Singularidade essencial.
 - b) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$, em $z = \infty$. *Resp.* Os dois ramos têm um polo simples.
 - c) $\cos z - \sin z$, em $z = \infty$.
 - d) $\sin \frac{1}{1-z}$, em $z = \infty$. *Resp.* A função é regular e tem um zero simples lá.
 - e) Dê exemplos de funções meromorfas em $\{|z| > r, r > 0\}$ que possuem o infinito como ponto limite (de acumulação) de polos simples.
 - f) $\sin \frac{1}{1-z}$, em $z = 1$. *Resp.* Singularidade essencial.
 - g) $\frac{1}{1-e^z}$, em $z = 2\pi i$. *Resp.* Polo simples com resíduo -1 .
 - h) $\frac{1}{\sin z - \cos z}$ em $z = \frac{\pi}{4}$. *Resp.* Polo simples com resíduo $\frac{1}{2}\sqrt{2}$.
- 5) Suponha que no ponto z_0 , a função $f_1(z)$ tem um zero de ordem α , e que a função $f_2(z)$ tem um polo de ordem β ($\alpha > 0, \beta > 0$). Que tipo de ponto é z_0 para
- a) $f_1 \pm f_2$
 - b) $f_1 \cdot f_2$
 - c) $\frac{f_1}{f_2}$
 - d) $\frac{f_2}{f_1}$
- 6) Determine os resíduos das funções abaixo e encontre a parte principal da série de Laurent em torno de cada singularidade.
- a) $\frac{1}{\sin z}$ em $z = k\pi$, $k = 0 \pm 1 \pm 2, \dots$. *Resp.* $(-1)^k$
 - b) $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ em $z = +1$ e em $z = +2$. *Resp.* $\text{Res}(f, 1) = 1$, $\text{Res}(f, 2) = -1$.
 - c) $\frac{a}{(z-z_1)^m(z-z_2)}$ em z_1 e z_2 , $z_1 \neq z_2$ ($a \neq 0, m \in \mathbb{N}$) *Resp.* $\text{Res}(f, z_1) = \frac{-a}{(z_2 - z_1)^m}$, $\text{Res}(f, z_2) = \frac{a}{(z_2 - z_1)^m}$.

d) $(1 - e^{-z})^{-n}$, em $z = 0$.

e) $\frac{1+z}{(1+z+z^2)^2}$.

7) Suponha que $f(z)$ tenha uma singularidade isolada em $z = a$ e suponha que $f(z) \not\equiv 0$. Suponha que exista $s \in \mathbb{R}$ tal que uma das seguintes equações vale

$$\lim_{z \rightarrow a} |z - a|^s |f(z)| = 0$$

$$\lim_{z \rightarrow a} |z - a|^s |f(z)| = \infty$$

a) Mostre que existe um inteiro m tal que a primeira equação vale se $s > m$, e a segunda equação vale se $s < m$.

b) $m = 0$, se $z = a$ é uma singularidade artificial e $f(a) \neq 0$.

c) $m < 0$, se $z = a$ é uma singularidade artificial e f tem um zero em $z = a$ de ordem $-m$.

d) $m > 0$, se $z = a$ é um polo de f de ordem m .

e) Se $z = a$ é uma singularidade essencial de f então nenhuma das equações acima vale para algum $s \in \mathbb{R}$.

8) Seja f uma função holomorfa definida em um domínio perfurado (“punctured”) $\Omega^* := \Omega \setminus \{p\}$, onde Ω é um domínio e $p \in \Omega$. A finalidade deste exercício é mostrar que se

$$(*) \quad \int_{\Omega^*} |f(z)|^2 dx dy < \infty$$

então f se estende holomorficamente a todo Ω .

a) Mostre de duas maneiras distintas que, supondo $p = 0$ (sem perda de generalidade), se g é holomorfa em Ω e B_r , a bola de raio r e centro 0, satisfaz $\overline{B_r} \subset \Omega$, então

$$|g(0)|^2 \leq \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r} |g(z)|^2 dx dy$$

Sugestão : A primeira maneira de demonstrar a desigualdade acima é aplicar diretamente a identidade de Parseval (veja Lista4, Parte B, exerc. 4)). A segunda maneira usa apenas a fórmula de Cauchy aplicada à função $g^2(z)$.

b) Use a estrutura da demonstração do item a) para mostrar que f no enunciado, i. e satisfazendo (*) não tem singularidade essencial na origem.

c) Mostre que $\int_{\Omega^*} |f(z)|^2 dx dy = \infty$, se f tem um pólo na origem.

9) Seja f uma função holomorfa no disco perfurado $\mathcal{D}^* = \{|z| < 1\} \setminus \{0\}$. Mostre que a função

$$M(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(re^{it}) dt \quad 0 < r < 1$$

é uma constante que não depende de r . *Sugestão* : Use o desenvolvimento de Laurent na origem.

10) O que você pode dizer de uma função holomorfa $f(z)$ num perfurado centrado na origem e que satisfaz uma das condições abaixo.

a) $|f(z)| \geq c \frac{e^{a/|z|}}{|z|^n}$, $n \in \mathbb{N}$, $c > 0$, $a \geq 0$

b) $|f(z)| \leq \frac{1}{|z|^{7/2}}$.

11) Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{(1-az)(1-bz)(1-cz)}$$

onde a, b, c são números reais distintos e não nulos. Usando obrigatoriamente o teorema dos resíduos calcule o desenvolvimento em somas parciais de f . Em seguida calcule o desenvolvimento de Taylor na origem de f . Calcule o desenvolvimento de Taylor, por outro método efetuando logo o produto. Compare os resultados e obtenha uma fórmula algébrica.

12) Considere

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{n}{z(z+1)} + \frac{n(n-1)}{z(z+1)(z+2)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{z(z+1)(z+2)(z+3)} \\ + \dots + \frac{(-1)^{k+1} n(n-1)(n-2) \dots (n-k)}{z(z+1)(z+2)(z+3) \dots (z+k+1)} + \dots + \frac{(-1)^n n!}{(z(z+1)(z+2) \dots (z+n))}$$

a) Calcule os resíduos de $f(z)$.

b) Encontre o desenvolvimento de Laurent, *sem usar decomposição em frações parciais*. Conferir usando tal decomposição. Reveja o exec. B 29) da lista 2.

13) Sejam $f(z)$ e $g(z)$ funções meromorfas em \mathbb{C} . Suponha que tanto f como g admitem pólos simples nos inteiros, com mesmo resíduo (e não possuem outros pólos). Suponha ainda que $\lim_{z \rightarrow \infty} (f(z) - g(z)) = 0$. O quê você pode dizer ?

14) Escreva os desenvolvimentos de Laurent das funções abaixo para $\{|z| > 0\}$, verificando o *grande teorema de Picard*.

a) $f(z) = \cos(\sqrt{az}) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{bz}}\right), \quad a, b \neq 0.$

b) $f(z) = e^{1/(az)+bz}, \quad a, b \neq 0.$

c) $f(z) = \cosh\left(z + \frac{1}{z}\right).$

15) O que você pode dizer sobre uma função harmônica u definida num disco perfurado \mathcal{D}^* ?

Em particular, discuta detalhadamente o caso em que u está limitada em \mathcal{D}^* .

16) Considere

$$f(z) = \frac{1}{(z^n - 1)^2}$$

a) Calcule os resíduos de $f(z)$ nas singularidades.

b) Seja γ uma curva simples fechada contida no exterior do disco fechado de raio 1, i.e $[\gamma] \subset \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$. Mostre que

$$\int_{\gamma} f(z) dz = 0$$

Deduz a integrabilidade de $f(z)$ no domínio $\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$. Deduz uma outra alternativa demonstração deste fato.

c) Seja $h(z)$ uma função inteira. Calcule

$$\int_{|z-z_k|=\epsilon} \frac{h(z)}{(z^n - 1)^2} dz$$

onde z_k é uma singularidade de $f(z)$ e ϵ é tomado suficientemente pequeno.

d) Escreva a série de Taylor de $f(z)$ em $z = 0$.

e) Escreva a série de Laurent de $f(z)$ em $z = 1$.

17) Considere a função $f(z) = \frac{\sin(\pi z) e^{\pi z}}{\pi z(1-z)(1-z/2) \cdots (1-z/n)}$.

a) Mostre que existe um bem definido ramo de $\sqrt[n]{f(z)}$ na faixa $-1 < \Re z < n + 1$.

b) Calcule os resíduos da função $\frac{\sqrt[n]{f(z)}}{\sin(\pi z)}$ na faixa dada no item a).

PARTE C: PRINCÍPIO DO ARGUMENTO E TEOREMA DE ROUCHÉ

(*Interpretação geométrica do princípio do argumento*). Seja f uma função meromorfa em um aberto A . Seja γ uma curva fechada C^1 por partes que não passa pelos zeros ou polos de f . O princípio do argumento sugere que fazendo z percorrer γ , $\log f(z)$ muda por um múltiplo de $2\pi iK$, onde K é um inteiro que mede o “número de voltas” que a imagem de γ faz em torno da origem, ou equivalentemente, $2\pi K$ mede a “variação” de $\arg f(z)$ quando z percorre γ . A dificuldade com este raciocínio é que não se pode definir sempre $\log f(z)$ (caso isto seja possível $\int_{\gamma} f'/f = 0$). Mas, esta discussão pode ser colocada em bases rigorosas da seguinte maneira:

Como nenhum zero ou polo de f está em γ existe um disco aberto $B(a, r)$ para cada $a \in [\gamma]$, tal que um ramo de $\log f(z)$ pode ser definido. Usando o lema de Lebesgue existe um número positivo $\epsilon > 0$ tal que para todo $a \in [\gamma]$ pode-se definir um ramo de $\log f(z)$ em $B(a, \epsilon)$. Usando continuidade uniforme de γ (suponhamos que γ está definida em $[0, 1]$) existe uma partição $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ tal que $\gamma(t) \in B(\gamma(t_{j-1}), \epsilon)$ para $t_{j-1} \leq t \leq t_j$ e $1 \leq j \leq k$ (por quê?). Seja ℓ_j o ramo de $\log f$ definida em $B(\gamma(t_{j-1}), \epsilon)$ para $1 \leq j \leq k$. Como tanto o j -ésimo disco quanto o $j+1$ -ésimo disco contém $\gamma(t_j)$ podemos escolher ℓ_1, \dots, ℓ_k de forma que $\ell_1(\gamma(t_1)) = \ell_2(\gamma(t_1)), \ell_2(\gamma(t_2)) = \ell_3(\gamma(t_2)), \dots, \ell_{k-1}(\gamma(t_{k-1})) = \ell_k(\gamma(t_{k-1}))$. Se γ_j é a restrição da curva γ ao intervalo $[t_{j-1}, t_j]$ como $\ell_j = f'/f$, temos que

$$\int_{\gamma_j} \frac{f'}{f} = \ell_j(\gamma(t_j)) - \ell_j(\gamma(t_{j-1}))$$

para $1 \leq j \leq k$. Somando ambos os lados desta equação obtém-se

$$\int_{\gamma} \frac{f'}{f} = \ell_k(\gamma(1)) - \ell_1(\gamma(0)).$$

Mas, γ é fechada, i.e $a := \gamma(1) = \gamma(0)$. Logo, $\ell_k(a) - \ell_1(a) = 2\pi iK$ onde K é um inteiro (já que são determinações do logaritmo). Isto conclui nossa interpretação de que quando z percorre γ , $\arg f(z)$ muda por $2\pi K$.

- 1) Mostre que o número de zeros de $P(z) = z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 4$ no primeiro quadrante é zero. E no quarto quadrante? Isto pode ser deduzido imediatamente do resultado no primeiro quadrante por *simetria*?

- i) Mostre que em $\text{Im } z = 0, 0 \leq \Re z \leq R$, a variação do argumento $\arg P(x)$, $x = \Re z$, é evidentemente nula já que $P(x) > 0$.
- ii) Fazendo $z = Re^{i\theta}$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$ e R grande tem-se que a variação do argumento é da ordem

$$\arg P(Re^{i\theta}) = 2\pi + \delta$$

onde $\delta \rightarrow 0$, quando $R \rightarrow \infty$.

- ii) Analise a variação do argumento quando $x = 0$ e $0 < y < R$, analisando os zeros e o sinal das partes reais e imaginárias do polinômio $P(iy)$ no intervalo considerado. Conclua que a variação de $\arg P(iy)$ é $-2\pi + \delta_1$ onde $\delta_1 \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$. Finalmente, infira a nulidade da variação total do argumento ao longo de C , já que C é fechada e o argumento deve ser um inteiro.
- 2) Pela mesma técnica do exercício anterior mostre que as seguintes equações têm apenas um zero no primeiro quadrante:

$$z^3 - z^2 + 2 = 0, \quad z^4 + z^2 = 2z - 6, \quad z^4 + z^3 = 2z^2 - 2z - 4.$$

- 3) Mostre que $e^z = -2z + 1$ tem exatamente um zero em $|z| < 1$. *Sugestão:* Considere $f(z) = -2z$, $g(z) = e^z - 1 = \int_0^z e^\zeta d\zeta$. Mostre que pela última expressão obtém-se a estimativa: $|g(z)| \leq 2$, se $|z| \leq 1$. Aplique o teorema de Rouché.
- 4) Considere a equação $2z^5 + 8z - 1 = 0$.
- a) Mostre que a equação não tem zeros em $|z| > 2$, por um raciocínio elementar direto ($64 > 17$). Confirme isto mostrando via o teorema de Rouché que existem 5 zeros em $|z| < 2$.
 - b) Mostre que a equação tem exatamente um zero em $|z| < 1$ e que este zero é real e positivo.
 - c) Mostre que a equação não tem zeros em $|z| = 1$; logo conclua que tem exatamente 4 zeros no anel $1 < |z| < 2$.

- 5) Considere a equação

$$f(z) = e^{-z} + z = a$$

com $\Re a > 1$.

- a) Usando o princípio do argumento, nos moldes do exerc. 1) acima, mostre que a equação possui uma e apenas uma solução no semi-plano $\Re z > 0$.
- b) Usando o teorema de Rouché, mostre que a equação tem apenas uma solução para $\Re z > 0$.
- 6) A finalidade deste exercício é “localizar” os zeros da equação

$$\tan z = a(z - \alpha)$$

onde $a \neq 0$ e α são números complexos.

- a) Pretende-se sugerir uma “comparação” com os zeros da equação

$$a(z - \alpha) \cos z = 0.$$

Estes são conhecidos: $z = \alpha + (2n + 1)\pi/2$.

- a) Considere o retângulo cujo bordo γ positivamente orientado é dado pela justaposição de quatro caminhos (faça uma figura):

$$\gamma_1 : t \rightarrow n\pi + it, \quad -n\pi \leq t \leq n\pi$$

$$\gamma_2 : t \rightarrow ni\pi - t, \quad -n\pi \leq t \leq n\pi$$

$$\gamma_3 : t \rightarrow -n\pi - it, \quad -n\pi \leq t \leq n\pi$$

$$\gamma_4 : t \rightarrow -ni\pi + t, \quad -n\pi \leq t \leq n\pi$$

Mostre que para n suficientemente grande, $\frac{1}{|a(z - \alpha)|}$ é arbitrariamente pequeno sobre $[\gamma]$. Considerando a periodicidade da função $\tan z$ e das escolhas dos caminhos γ_1 e γ_3 , mostre que $\tan z$ é limitada por um número independente de n em $[\gamma]$.

Sugestão: Use a fórmula $\tan z = \frac{1}{i} \frac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \frac{2i}{1 + e^{2iz}} - i$, e mostre que para todo

$\delta > 0$, a função $\frac{1}{1 + e^{iz}}$ é limitada no semi-plano $\text{Im } z \geq \delta$.

Aplice o teorema de Rouché para mostrar que a equação tem exatamente $2n + 1$ zeros tais que $|\Re z| < n$ e $|\text{Im } z| < n$, desde que n seja suficientemente grande. Agora considere um quadrado Q_n de lados paralelos aos eixos e iguais a um número arbitrário δ tal que $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$, com centro $(2n + 1)\frac{\pi}{2}$. Mostre que sobre o perímetro deste quadrado o máximo $M(\delta)$ dos valores de $|\tan z|$ é independente de n , por periodicidade. Mostre que para n suficientemente grande

$$\frac{M(\delta)}{|a| (|2n + 1|\pi/2 - |\alpha|)} < 1.$$

Conclua que a equação tem exatamente um zero em Q_n .

- 7) Deduza o teorema fundamental da álgebra aplicando o teorema de Rouché.
- 8) Suponha que $f(z)$ é analítica em um domínio contendo o disco unitário fechado centrado na origem. Se $|f(z)| < 1$ para $|z| = 1$, mostre que existe apenas um único z com $|z| < 1$ satisfazendo $f(z) = z$. Se $|f(z)| \leq 1$ para $|z| = 1$, o que você pode dizer ?
- 9) Suponha que a, b, c sejam números complexos tais que $|b| - |c| > |a| > 0$; mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ a equação

$$az^n + bz + c = 0$$

possui exatamente um zero em $|z| < 1$.

- 10) Mostre que para todo número complexo a e todo inteiro $n \geq 2$, a equação $az^n + z + 1 = 0$ possui ao menos um zero em $|z| \leq 2$. *Sugestão:* Mostre que se $|a| < 2^{-n}$ há exatamente um zero pelo teorema de Rouché. Se $|a| \geq 2^{-n}$, então o resultado é uma consequência do fato que $|z_1 \cdots z_n| = |1/a|$, onde as z_j são os zeros da equação, com multiplicidades. Por quê ?
- 11) Mostre que para λ real, $\lambda > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a equação $z^n e^{\lambda-z} = 1$, possui n zeros (contando as multiplicidades) em $|z| < 1$.
- 12) *Os zeros de um polinômio variam continuamente com os coeficientes do polinômio.* Sejam z_1, z_2, \dots, z_k o conjunto dos zeros do polinômio $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$, z_j sendo um zero de ordem m_j ; seja $\rho = \min_{i \neq j} |z_i - z_j|$. Mostre que para todo $\epsilon \in (0, \rho)$ existe um $\delta > 0$ tal que todo polinômio

$$q(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n$$

com $\max_{1 \leq i \leq n} |b_i - a_i| < \delta$ possui exatamente m_j zeros (contando as multiplicidades) no disco aberto $B(z_j, \epsilon)$, $j = 1, 2, \dots, k$. *Sugestão:* Sabe-se que

$$P(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_k)^{m_k}$$

Mostre que sobre o círculo de equação $|z - z_j| = \epsilon$, tem-se que $|P(z)| \geq \epsilon^{m_j} (\rho - \epsilon)^{n-m_j}$. Mostre que

$$|q(z) - P(z)| \leq \delta \sum_{t=0}^{n-1} |z|^t \leq \delta \sum_{t=0}^{n-1} (|z_j| + \epsilon)^t.$$

Logo considerando

$$0 < \delta < \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{\epsilon^{m_j} (\rho - \epsilon)^{n-m_j}}{\sum_{t=0}^{n-1} (|z_j| + \epsilon)^t} \right\}$$

conclua o resultado, aplicando o teorema de Rouché.

- 13) Mostre que a equação $z(e^z - 1) = w$ para $|w| < 1/6$ tem exatamente duas soluções na bola aberta de raio $R = 1/2$ centrada na origem. *Sugestão:* Mostre que se $|z| = r < 1$ então

$$|e^z - 1| \geq r - \frac{r^2}{2 - r}$$

- 14) Encontre o número de zeros do polinômio $p(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ contidos dentro da bola unitária aberta de raio 1 centrada na origem. Idem para o anel $\{1 < |z| < 2\}$. *Sugestão:* Mostre usando o algoritmo de Euclides que p e p' são primos entre si, concluindo que todas os zeros de p são simples.
- 15) Seja $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$. Mostre que existe um único número complexo $z = f(w)$ tal que $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$ com $z^3 + z = w$. Mostre que $f(w)$ é holomorfa e infira a seguinte fórmula

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{z(3z^2 + 1)}{z^3 + z - w} dz$$

- a) Escreva o desenvolvimento de Taylor de $f(w)$ em $w = 0$, explicitando os coeficientes do desenvolvimento e determinando o raio de convergência da série.
- 16) Sejam a_1, \dots, a_n e b números complexos de módulo inferior que 1, e sejam k_1, \dots, k_n números inteiros positivos. Mostre que a equação

$$\prod_1^n \left(\frac{z - a_j}{z\bar{a} - 1} \right)^{k_j} = b$$

possui $k := k_1 + \dots + k_n$ soluções na bola unitária aberta de raio 1 centrada na origem.

17) Mostrando que $\tan z - z$ tem apenas zeros reais, calcule os resíduos da função

$$f(z) = \frac{\sin^2 z \tan^2 z}{z^2(\tan z - z)}.$$

18) Calcule

$$\int_{|z|=7} \frac{z^7 (1 + e^{7 \cos z} (1 + \cos z)^7)^2 (\sin z + \cos z)}{(\sin z/3)^7 (\sin z - \cos z)} dz$$

19) Considere polinômio $f(z)$ dado por

$$f(z) := \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{2n!}$$

Mostre que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq N$ então $f(z)$ tem exatamente um zero simples no disco $|z| < 2\pi$.

20) (*Funções inversas*) Suponha que f seja meromorfa num aberto que contenha um domínio Ω cujo bordo é uma curva simples fechada positivamente orientada γ , que não contém nem zeros nem pólos de f . Sejam a_1, a_2, \dots, a_n e b_1, b_2, \dots, b_m , respectivamente, os zeros e os pólos de f . Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n g(a_j) - \sum_{k=1}^m g(b_k)$$

onde cada zero e cada pólo são contados de acordo com sua multiplicidade.

Deduza os seguintes resultados

a) Seja $f(z)$ uma função holomorfa numa bola $B_\epsilon(0)$ centrada na origem de raio ϵ , tal que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. Suponha que $f(z) \neq 0$ para $0 < |z| < \epsilon$. Seja C_r o círculo de raio r centrado na origem com $r < \epsilon$. Mostre que

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta$$

define uma função holomorfa para $|w| < \min_{\theta} |f(re^{i\theta})|$. Para tais valores de w , $z = g(w)$ é a única solução da equação

$$f(z) = w$$

que tende a zero quando w tende a zero. Além disso mostre que

$$g(w) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta))^{n+1}} d\zeta \quad w^n$$

sendo que a série converge uniformemente com respeito a ζ e w , desde que t percorra C_r e $|w| \leq c < \min_{\theta} |f(re^{i\theta})|$.

- i) Considere $F(a, b, c, z)$ a série hipergeométrica (veja por exemplo, ref. 1). Mostre que a raiz da equação

$$z^3 + 3z - w = 0$$

que tende a zero quando $w \rightarrow 0$ é dada por uma série hipergeométrica.

- b) Com as mesmas condições do item a) anterior mostre que se h é uma função holomorfa num aberto contendo a bola $B_\epsilon(0)$, então

$$h(g(w)) = h(0) + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} h'(z) (\psi(z))^n \Big|_{z=0} w^n$$

onde $\psi(z) = \frac{z}{f(z)}$. As séries obtidas nos itens a) e b) obtidas são chamadas de *séries de Lagrange*.

- i) Escreva enunciados analogos aos dos itens a) e b) relativos a inversa da equação

$$w = f(z)$$

num ponto $w_0 = f(z_0)$ (note que em a) e b) $z_0 = w_0 = 0$)

- ii) Escreva as expansões de Lagrange do item b) quando $f(z) = \frac{z}{e^{2z}}$, e $g(z) = e^{\lambda z}$.

- c) Seja

$$F(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} z^m w^n, \quad a_{00} = 0 \quad \text{e} \quad a_{01} \neq 0$$

sendo que a série dupla é absolutamente convergente para $|z| \leq r_1$ e $|w| \leq r_2$. Mostre que existe uma única função holomorfa $f(z)$ numa vizinhança da origem, com $f(0) = 0$ e

$$F(z, f(z)) = 0$$

nesta vizinhança. Além disso f pode ser representada por

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C w \frac{F_w(z, w)}{F(z, w)} dw$$

onde C é um círculo de raio r para $r < r_2$.

Sabe-se da álgebra que qualquer função simétrica das raízes de uma equação algébrica é expressa de maneira única como um polinômio nas somas das potências destas raízes. Use isto para mostrar o seguinte

- d) Se f é uma função holomorfa na bola $B_\epsilon(0)$ e se 0 é um zero de ordem k de f em 0 , então para valores pequenos de $|w|$, a equação

$$f(z) = w$$

tem k raízes $z_1(w), \dots, z_k(w)$, que tendem a zero, quando $w \rightarrow 0$. Além disso, estas raízes satisfazem uma equação algébrica de grau k

$$z^k + g_1(w)z^{k-1} + \dots + g_k(w) = 0$$

cujos coeficientes são funções holomorfas que tendem a zero quando $w \rightarrow 0$. Aproveite o momento para enunciar e demonstrar o *teorema de preparação de Weierstrass* e o *teorema das funções implícitas* para funções analíticas de duas variáveis complexas.

- e) Nas hipóteses do item d) acima, mostre que existe uma função $h(\zeta)$, holomorfa para $|\zeta|$ suficientemente pequeno, tal que para cada valor pequeno fixado de w , as k determinações de $h(w^{1/n})$ representam as raízes $z_1(w), \dots, z_k(w)$, em alguma ordem. Quando w percorre um circuito fechado em torno da origem, as raízes são permutadas ciclicamente. Além disso, a generalização das séries de Lagrange no caso que 0 é um zero de ordem k , toma a seguinte forma ($f(z) = w$)

$$z = f^{-1}(w) = h(w^{1/n}) = \sum_1^\infty \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (\psi(z))^n \Big|_{z=0} w^{n/k}$$

onde $\psi(z) = \frac{z}{f(z)^{1/k}}$.

PARTE D: PROLONGAMENTO ANALÍTICO II

1) Seja f uma função holomorfa num domínio Ω de \mathbb{C} . Diz-se que Ω é o *domínio de holomorfia* de f se f não possui nenhum prolongamento à um domínio $\tilde{\Omega}$ contendo Ω com $\tilde{\Omega} \neq \Omega$. Pode-se mostrar que para todo domínio Ω de \mathbb{C} , existe uma função holomorfa f definida em Ω para a qual Ω é seu domínio de holomorfia. Neste caso o bordo $\partial\Omega$ de Ω é chamado de *fronteira natural de holomorfia* de f e os pontos de $\partial\Omega$ são chamados de *pontos singulares* de f , ou seja, f não admite prolongamento analítico a nenhum aberto \mathcal{U} contendo um ponto ζ qualquer de $\partial\Omega$.

a) Mostre que todos os pontos do bordo do disco de convergência da série abaixo são pontos singulares, i.e o círculo $S^1 = \partial\Omega$ é a *fronteira natural de holomorfia* de f e o disco de convergência é o domínio de holomorfia de f :

$$f(z) = z + z^2 + z^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

Sugestão: Mostre que o *limite radial* quando o raio tende à 1 é ∞ . Mais precisamente, mostre primeiramente que

$$\lim_{t \rightarrow 1} |f(re^{it})| = \infty$$

quando cada t é da forma $2\pi k/2^\ell$, $k \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{N}$. Em seguida mostre que isto é suficiente para mostrar que um ponto ζ qualquer de $\partial\Omega$ é um ponto singular de f .

- b) Dê outras funções analíticas definidas no disco unitário aberto de maneira que o círculo S^1 seja a *fronteira natural de holomorfia* de f .
- c) Exiba uma série de potências cujo raio de convergência é 1 e que possui apenas 1 ponto singular no bordo de seu disco de convergência. Mostre que sempre tem um ponto singular no bordo do disco de convergência de uma função analítica.
- d) Exiba também um exemplo de série de potências que possui apenas 1 ponto não singular no bordo de seu disco de convergência.

2) Seja R , $0 < R < \infty$ o raio de convergência de série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - a)^n$$

O teorema de Abel diz o seguinte: *Se ζ é um ponto da fronteira do disco de convergência $|z - a| < R$, se a série converge para $z = \zeta$, então o limite radial existe em $z = \zeta$, isto é (mas, o limite, em geral não existe !)*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ 0 \leq t < 1}} f(a + t(\zeta - a)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\zeta - a)^n. \quad (*)$$

a) Mostre usando o teorema de Abel que

$$\log 2 = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ 0 \leq t < 1}} \log(1 + t) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Conclua que, de fato, tem-se que

$$\log 2 = \lim_{z \rightarrow 1} \log(1 + z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

b) Mostre que o limite do primeiro termo de (*) pode existir sem que a série do segundo termo convirja.

c) Seja

$$f(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1$$

verificar que o raio de convergência da série é 1 e que $f'(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)}$, $|z| < 1$.

Deduzir que para t real em $(-1, 1)$, $f(t) = \arctan t$. Pelo teorema de Abel conclua que (série de Gregory e Leibniz)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$

d) Seja $\Re \alpha < 0$, demonstrar que a série é divergente

$$\sum_{n \geq 0} (-1)^n \binom{\alpha}{n}$$

Sugestão: Considere a série de Taylor de $(1 - z)^\alpha$.

3) Mostrar que

$$\log \left(\frac{1+z}{1-z} \right) = \log(1+z) - \log(1-z) \quad \text{se } z \notin E = \{t \in \mathbb{R}; |t| \geq 1\}$$

Sugestão: Verifique que as duas funções são holomorfas em $\mathbb{C} \setminus E$ e que a igualdade é verificada para $z \in \mathbb{R}$ e $|z| < 1$.

4) Seja

$$f(z) = \frac{1}{2i} \log \left(\frac{1+iz}{1-iz} \right)$$

Verificar que f é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus F$, onde $F = \{it, t \in \mathbb{R}, |t| > 1\}$. De acordo com o item anterior conclua que

$$f(z) = \frac{1}{2i} \log(1+iz) - \log(1-iz) \quad \text{se } z \notin F$$

Concluir que $f(z)$ é um prolongamento analítico da função f dada no item 2) c). Conclua que $\tan(f(z)) = z$, $z \in \mathbb{C} \setminus F$ (cf. exercício 12 Parte A, Lista 3). f é o ramo principal de $\arctan z$.

5) (Representação de funções holomorfas por integrais): Para estudar a representação por integrais é preciso do seguinte resultado básico. *Seja Ω um aberto não vazio de \mathbb{C} , I um intervalo qualquer de \mathbb{R} e $g : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua (na verdade basta “mensurável”) tal que:*

- i) $z \mapsto g(z, t)$ é holomorfa em Ω para cada $t \in I$
- ii) Existe uma função não negativa $M : I \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \infty$ (“integrável”) tal que $|g(z, t)| \leq M(t)$, $t \in I$, para todo $z \in \Omega$ com

$$\int_I M(t) dt < \infty$$

Então a função f definida por

$$f(z) = \int_I g(z, t) dt \quad (*)$$

é holomorfa em Ω ; além disto

$$f^{(k)}(z) = \int_I g^{(k)}(z, t) dt \quad \forall z \in \Omega \quad (**)$$

onde $g^{(k)}(z, t)$ é igual à $\frac{\partial^k g}{\partial z^k}(z, t)$, $k = 1, 2, \dots$. Se γ é uma curva C^1 por partes em Ω , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_I \left\{ \int_{\gamma} g(z, t) dz \right\} dt \quad (***)$$

A demonstração do resultado acima é clássica. Depende da aplicação sucessiva dos seguintes teoremas: Teorema da convergência dominada de Lebesgue (para mostrar que $f(z)$ é contínua em Ω), teorema de Fubini (para mostrar que as integrais iteradas no segundo membro de (***) não dependem da ordem da integração, mostrando assim a igualdade em (**)), teorema de Morera (que depende de (**)) e fórmula de Cauchy local (para mostrar (**)).

a) Mostre o seguinte corolário do resultado acima, usando o fato que *holomorfia* é uma propriedade *local*: *Seja Ω um aberto não vazio de \mathbb{C} , I um intervalo compacto de \mathbb{R} e $g : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{C}$ uma função contínua tal que $z \mapsto g(z, t)$ é holomorfa em Ω para cada $t \in I$; então f definida por (*) é holomorfa em Ω e (**), (***) são verificadas.*

b) Mostre a igualdade

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + z \sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - z^2}}$$

se $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1) \cup [1, \infty))$. *Sugestão*: Mostre que se $f(z)$ é o termo à esquerda e $h(z)$ o termo à direita então ambas as funções são holomorfas em Ω (use o resultado no item a) para mostrar que f é holomorfa em Ω).

c) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(zt - \alpha t^2) dt = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{z^2/4\alpha}, \quad z \in \mathbb{C}, \alpha > 0$$

Deduza a seguinte bem conhecida fórmula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

Em particular, obtenha a *transformada de Fourier* de $t \mapsto e^{-\alpha t^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-ipt} dt = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-p^2/4\alpha}$$

Sugestão: Seja $f(z)$ o membro à esquerda da igualdade acima. Mostre que para $\Re z < a$ tem-se que

$$|\exp(zt - \alpha t^2)| \leq \exp(at - \alpha t^2), \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(at - \alpha t^2) dt < \infty$$

para $a \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$. Aplique o resultado no item a) para mostrar que $f(z)$ é uma função holomorfa no semi-plano aberto $\Re z < a$, daí conclua que $f(z)$ é uma função inteira. Mostre a igualdade desejada para z real fazendo a seguinte integração elementar:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\left\{-\alpha\left(t - \frac{z}{2\alpha}\right)^2 + \frac{z^2}{4\alpha}\right\}\right) dt$$

d) (*Função Gamma*) Considere a função (chamada função Gamma)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

i) Mostre que Γ é holomorfa no aberto $\Re z > 0$, $t^{z-1} = \exp\{(z-1)\log t\}$, $0 < t < \infty$. *Sugestão:* Mostre que para $0 < a < \Re z < b$, então

$$|e^{-t} t^{z-1}| \leq \begin{cases} e^{-t} t^{b-1} & \text{se } t \geq 1 \\ t^{a-1} & \text{se } 0 < t < 1 \end{cases}$$

ii) Mostre a equação funcional

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Conclua que $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$. *Sugestão:* Verifique a equação acima para z real e $z > 0$, fazendo uma integração por partes.

- iii) (*Prolongamento analítico da função Γ*) Mostre que a função gamma possui um prolongamento analítico em $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$, sendo cada ponto $-n$ um polo simples com

$$\text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Sugestão: Considere $\Gamma(z) = \varphi(z) + \psi(z)$, onde

$$\varphi(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \psi(z) = \int_1^\infty e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re z > 0$$

Mostre com um raciocínio similar ao exercício precedente que ψ é uma função inteira. Em seguida verifique que utilizando o teorema da convergência dominada de Lebesgue tem-se que para $\Re z > \epsilon > 0$

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

Mostre que a série acima é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$, observando que se \mathcal{D} é um disco aberto tal que $\bar{\mathcal{D}} \cap \{0, -1, -2, \dots\} = \emptyset$, então

$$\inf\{|z+n|; n \in \mathbb{N}, z \in \mathcal{D}\} = c > 0$$

isto é a série acima é normalmente convergente em $\bar{\mathcal{D}}$. Mostre que $\lim_{z \rightarrow -m} \Gamma(z) = (-1)^m/m!$.

- iv) Mostre que

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{2n!}{n!4^n} \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}$$

- v) Foi mostrado usando teoria dos resíduos que

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\lambda(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin \lambda\pi}, \quad (0 < \lambda < 1)$$

usando o cálculo acima mostre a *fórmula de suplemento de Euler*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

Procure extrair consequências disto (veja Remmert, 1998, pg 40).

Nota: Uma outra fórmula importante é a *fórmula de duplicação de Gauss-Legendre*:

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2z) = 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad 2z \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$$

vi) Demostre a seguinte regra da *transformada de Laplace* \mathcal{L} , usando continuação analítica

$$\mathcal{L}(t^\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Calcule

$$\mathcal{L}(1/\sqrt{\pi t})$$

e) Dizemos que uma série

$$\sum_0^\infty a_n z^{-n}$$

é uma série assintótica para uma função $f(z)$ para certos valores de $\arg z$, se para cada inteiro $k \geq 0$, tem-se que

$$\lim_{z \rightarrow \infty} z^k (f(z) - \sum_0^\infty a_n z^{-n}) = 0,$$

para $\arg z$ no domínio determinado. Neste caso escreve-se

$$f(z) \sim \sum_0^\infty a_n z^{-n}$$

i) Considere a função

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{e^{-t}}{t+z} dt, \quad \Re z > 0$$

O que você pode dizer sobre a holomorfia de $f(z)$? Será $f(z)$ holomorfa para $|\arg z| < \pi$? Mostre que

$$f(z) \sim \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1} (n-1)!}{z^n}$$

Será que o desenvolvimento assintótico é válido para $|\arg z| \leq \alpha, 0 < \alpha < \pi$?

6) (*desenvolvimento assintótico*)

a) Considere $f(z) = \log z e^{\frac{1}{z} \log z}$, para $|z| \gg 1$. Mostre que

$$f(z) = z + (\log z)^2 + \frac{(\log z)^4}{2z} + o\left(\frac{(\log z)^3}{z^2}\right) \quad |z| \rightarrow \infty$$

b) Obtenha o desenvolvimento assintótico de $f(z) = z - z^{1/5} (1 - z^{-4/5})^{2/5}$, quando $|z| \rightarrow \infty$.

c) Idem para $f(z) = e^{\log z + \log(\log z + \log \log z)}$, quando $|z| \rightarrow \infty$.

d) A *fórmula de Stirling* dá o comportamento assintótico da função Gamma:

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z}, \quad \text{quando } |z| \rightarrow \infty$$

para os valores z no setor $|\arg z| \leq \pi - \delta$, onde $\delta > 0$. Ou seja

$$\lim_{\substack{|z| \rightarrow \infty \\ |\arg z| \leq \pi - \delta}} \frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z}} = 1$$

i) Mostre que

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+1/2} e^{-n+a_n}$$

onde $a_n \rightarrow 0$, quando $n \rightarrow \infty$.

e) A fórmula de Euler- Gauss diz que

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n-1)! n^z}{z(z+1)(z+2) \cdots (z+n-1)}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$$

Ou seja

$$(z(z+1) \cdots (z+n)) \sim \frac{n^z n!}{\Gamma(z)}$$

i) Deduza da fórmula de Euler- Gauss e da fórmula de Stirling que para $a > 0$ vale

$$a(a+1) \cdots (a+n) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(a)} n^{n+a+1/2} e^{-n}$$

Use a relação funcional da função Gamma (veja 5)d)ii) acima) para deduzir

$$\frac{\Gamma(n+a+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{n!} \Gamma(a)$$

Daí

$$\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n)} \sim n^a$$

ii) Deduza do que foi estabelecido acima que fixado $k > 1$

$$\binom{kn}{n} \sim \sqrt{\frac{k}{2\pi(k-1)n}} \left(\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}} \right)^n$$

Daí

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

PARTE E: TRANSFORMAÇÕES CONFORMES II

Transformações de Schwarz Christoffel

1) Mostre que

$$w = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\zeta(1-\zeta^2)}} d\zeta$$

leva o semi-plano superior injetiva e conformemente sobre o interior de um quadrado de lados $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \Gamma^2(1/4)$.

2) Mostre que

$$w = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^4}} d\zeta$$

leva o disco unitário $|z| < 1$ injetiva e conformemente sobre o interior do quadrado de diagonal $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \Gamma^2(1/4)$.

3) Mostre que

$$w = \int_0^z \frac{1}{(1-z^n)^{2/n}} dz$$

leva injetiva e conformemente o disco unitário sobre o polígono regular de n lados cujo comprimento dos lados é

$$\frac{1}{n} 2^{1-\frac{4}{n}} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{2}{n}\right)}$$

- 4) Considere a linha poligonal L formada pelo semi-eixo real negativo, pelo segmento do eixo imaginário puro ligando 0 à ia , $a > 0$, e o semi eixo paralelo ao semi-eixo real positivo ligando ia ao ∞ . Considere a região ilimitada Ω cujo bordo é L contendo o ponto $2ia$, $a > 0$. Mostre que

$$w = f(z) = \frac{2ia}{\pi} \left(\arcsin z^{1/2} + z^{1/2}(1-z)^{1/2} \right)$$

leva injetiva e conformemente o semi-plano superior sobre Ω ,

levando a reta real sobre L , satisfazendo $f(0) = 0$ e $f(1) = ia$. Você poderia obter agora uma equivalência conforme explícita entre o plano complexo com um semi-eixo removido e o exterior de uma semi-faixa infinita ?

- 5) Descubra um mapeamento conforme do semi-plano superior e o semi-plano superior removido o eixo $\{t + ia, t \leq 0\}$, $a > 0$.

BIBLIOGRAFIA

1. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variables*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
2. Anthony D. Osborne. *Complex variables and their applications*. Addison-Wesley, 1999.
3. Christian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps*. Springer, 1992.
4. Einar Hille. *Analytic function theory*. Dois volumes, Chelsea, Nova York, 1982.
5. Georges Valiron. *Théorie des fonctions*. Troisième édition, Masson, 1966.
6. Henri Cartan. *Teoria elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas*. Selecciones Científicas, Madrid, 1968.

7. Jacques Rivaud. *Exercices d'Analyse*. Vuibert, Paris, 1981.
8. Jean Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Hermann, 1997.
9. Jean-François Pabion. *Éléments d'analyse complexe*. Edition Marketing, Paris, 1995.
10. John B. Conway. *Functions of one complex variable I*. Segunda edição Springer, 1995.
11. J. Gerretsen e G. Sansone. *Lectures on the theory of functions of complex variable*. Wolters-Noordhoff Publishing Groningen 1969 (dois volumes).
12. K. Knopp. *Elements of the theory of functions*. Dois volumes (com dois volumes de exercícios), Dover, Nova York, 1952.
13. Lars Ahlfors. *Complex analysis*. Mc Graw-Hill, 1996.
14. Norman Levinson e Raymond M. Redheffer. *Complex variables*. Holden-Day, SãoFrancisco, 1970.
15. Patrice Tauvel. *Analyse complexe*. Exercices corrigés. Dunod, 1999.
16. Peter Henrici. *Applied computational complex analysis*. Volumes 1, 2, John Wiley & Sons, 1988, 1991.
17. Rami Shakarchi. *Problems and solutions for complex analysis*. Springer, 1999.
18. Reinhold Remmert. *Theory of complex functions*. Springer, 1991 (*Readings in Mathematics*). *Classical topics in complex function theory*, Springer, 1998.
19. R. E Greene e S. G. Krantz. *Function theory of one complex variables*. John Wiley and Sons, N. Y, 1997.
20. Sristi Chatterji. *Cours d'analyse 2, Analyse complexe*. Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Suíça, 1997.
21. Stephen D. Fisher. *Complex variables*. Second Edition. Dover Public., N. Y, 1999.
22. Steven G. Krantz. *Handbook of complex variables*. Birkäuser, Boston, 1999.
23. Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Mc Graw-Hill, 1987.
24. Wellington de Melo. *Ferramentas matemáticas em dinâmica unidimensional*. Matemática Universitária, No. 29, 75-113, 2000.

25. Zeev Nehari. *Conformal mapping*. Dover, 1952.