VCOMPLEXAS-JULHO de 2003–Lista 5

Professor: Ricardo Sá Earp

PARTE A: FÓRMULA DE CAUCHY - CONSEQÜÊNCIAS II

1) Considere uma função holomorfa $f(z)$ numa vizinhança da origem que satisfaz $f(2z) = f(z)$ sobre um intervalo do eixo real. O que você pode dizer sobre f ? *Sugestão*: Mostre primeiramente que $f(z)$ é inteira. Em seguida aplique o princípio do máximo ou o teorema de Liouville para completar a demonstração . Você saberia dar uma outra dedução baseada em continuação analítica ?

2) Mostre a seguinte versão do teorema de Cauchy: Seja $f(z)$ uma função contínua definida em um aberto $A \subset \mathbb{C}$ e holomorfa em todo ponto de A. exceto quiça em pontos de uma reta L paralela ao eixo real. Mostre que a forma $f(z)\,dz$ é localmente exata, isto é, $f(z)$ admite localmente uma primitiva. Conclua que $f(z)$ é holomorfa em todos os pontos de A, sem exceção . Em particular, conclua que se $f(z)$ é holomorfa em todos os pontos de A exceto, possivelmente, em pontos isolados, então $f(z)$ é holomorfa em A.

   Sugestão: Mostre que a integral $\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z$ é nula para o bordo γ de todo retângulo R contido em A. Os dois casos não evidentes são quando um dos lados do retângulo se apoia sobre L, ou quando quando L corta R. Use a continuidade da integral acima para perfazer os detalhes.

3) (*Princípio de reflexão de Schwarz*) O princípio de reflexão de Schwarz tem muitas aplicações na teoria das transformações conformes, como por exemplo na *fórmula de Schwarz- Christoffel*. Demonstre com todos os detalhes a versão do *princípio de reflexão de Schwarz* quando o círculo $|z| = 1$ substitue Re. Faça o mesmo para círculos quaisquer. *Sugestão*: Use uma transformação de Möbius conveniente.
   a) Mostre que se $f(z)$ é inteira e real no eixo real, imaginário puro no eixo imaginário, então $f(z)$ é impar.
   b) Se $f(z)$ é inteira e satisfaz $|f(z)| = 1$, para $|z| = 1$, o que você pode dizer sobre f ? Por outro lado, se f leva o disc unitário $B_1(0)$ em si mesmo e satisfaz $|f(z)| = 1$, para $|z| = 1$, o que você pode dizer sobre f ?

c) Mostre que uma *transformação conforme* $w = f(z)$ que leva o disco unitário $B_1(0)$ sobre a esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, *cortada ao longo do raio* $-\infty \leqslant w \leqslant \dfrac{-1}{4}$, pode ser estendida para além do círculo $|z| = 1$, satisfazendo a relação

$$f(z) = \overline{f\left(\frac{1}{\overline{z}}\right)}$$

além disso, mostre que $w = f(z)$ leva a esfera de Riemann sobre a esfera de Riemann recoberta duas vezes (de grau 2); logo conclua que deve ser uma função racional com dois pólos. Com a normalização $f(0) = 0$ e $f'(0) > 0$, mostre que $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ é a função de Koebe.

d) Mostre que uma função holomorfa $w = f(z)$ que leva a bola $|z| < 1$, sobre a bola $|w| < 1$, recoberta n vezes tem que ser uma função racional com n pólos.

4) Seja f e g duas funções holomorfas em um domínio Ω do plano complexo que não se anulam em nenhum ponto de Ω. Suponha que existe uma seqüência $\{a_n\}$ de pontos de Ω, tais que $\lim a_n = a$, se $n \to \infty$, $a \in \Omega$ e $a_n \neq a$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Suponha ainda que

$$\frac{f^{'}(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g^{'}(a_n)}{g(a_n)}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

O que você pode dizer de $f(z)$ e $g(z)$?

5) Seja f uma função holomorfa em um aberto A e seja g definida em $A \times A$ por

$$g(z,w) = \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(w)}{z - w} & \text{se } w \neq z \\ f^{'}(z) & \text{se } w = z. \end{cases}$$

Mostre que g é contínua em $A \times A$. *Sugestão*: É claro que os únicos pontos que podem gerar dúvidas estão na diagonal $z = w$. Fixe $a \in A$. Seja $B(a,r)$ um disco aberto de centro a e raio r inteiramente contido em A, r suficientemente pequeno. Se z, w estão em $B(a,r)$ e se $\gamma(t) = (1-t)z + tw$, , então $\gamma(t) \in B(a,r)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Mostre que vale

$$g(z,w) - g(a,a) = \int_0^1 [f^{'}(\gamma(t)) - f^{'}(a)]\,\mathrm{d}t$$

Use a continuidade de $f^{'}(z)$ para concluir o argumento.

6) Suponha que Ω seja um domínio e que $f(z)$ seja uma função holomorfa em Ω, *univalente*, isto é um a um. Mostre que $f(z)$ dá uma equivalência conforme entre Ω e sua imagem.

7) Mostre que $\mathrm{e}^{z+a} = \mathrm{e}^z\mathrm{e}^a$ usando um argumento baseado em prolongamento analítico.

8) Usando a fórmula de Cauchy local calcule diretamente as seguintes integrais:
   a) $\int\limits_\gamma \dfrac{\sin z}{z^3}\,\mathrm{d}z, \qquad \gamma(t) = \mathrm{e}^{it},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi.$
   b) $\int\limits_\gamma \dfrac{\log z}{z^n}\,\mathrm{d}z, \qquad \gamma(t) = 1 + 1/2\mathrm{e}^{it},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi, n > 0.$
   c) $\int\limits_\gamma \dfrac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{z^n}\,\mathrm{d}z, \qquad \gamma(t) = 10^{-100}\mathrm{e}^{-3it},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi,\ n > 0.$
   d) $\int\limits_\gamma \dfrac{\mathrm{d}z}{z^2+1}, \qquad \gamma(t) = 2\mathrm{e}^{it}.$

9) Calcule a integral $\int\limits_\gamma \dfrac{z^2+1}{z(z^2+4)}\,\mathrm{d}z$ onde $\gamma(t) = r\mathrm{e}^{it},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, para todos os valores possíveis de $r,\ 0 < r < 2$ e $2 < r < \infty$.

10) Seja Ω um domínio simplesmente conexo e seja $f : \Omega \to \mathbb{C}$ uma função analítica tal que $f(z) \neq 0$ para todo z em Ω. Mostre que existe uma função analítica $g : \Omega \to \mathbb{C}$ tal que $f(z) = \mathrm{e}^{g(z)}$. Se $z_0 \in \Omega$ e $\mathrm{e}_0^w = f(z_0)$, pode-se escolher g tal que $g(z_0) = w_0$.

11) Dê um exemplo de uma curva em $\mathbb{C} \setminus \{a, b\},\ a \neq b$ tal que γ seja "homologicamente"trivial (i.e *winding number* $\mathrm{n}(\gamma, a) = \mathrm{n}(\gamma, b) = 0$), mas que não seja homotopicamente trivial em $\mathbb{C} \setminus \{a, b\}$.

12) Calcule $\int\limits_\gamma \dfrac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{z^4}\,\mathrm{d}z$ para uma curva que faz "n" voltas em torno da origem.

13) Neste exercício vamos fazer algumas aplicações do *teorema de convergência de Weierstrass*.
   a) (*Teorema da série dupla de Weierstrass*) Seja $f(z) = \sum f_n(z)$, onde cada função é holomorfa no disco $|z-a| < R$, e a série converge uniformemente para $|z-a| \leqslant \rho R$, para cada ρ, com $0 < \rho < 1$. Além disso suponha que $f_n(z) = \sum a_{k,n}(z-a)^k$. Mostre que

$$\sum a_{k,n} := A_k, \qquad k = 0, \ldots$$

converge, e , para $|z-a|<R$,

$$f(z)=\sum A_k(z-a)^k$$

ou seja $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{k,n}(z-a)^k=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{k,n}\right)(z-a)^k.$

i) Obtenha o desenvolvimento de Taylor da série de funções holomorfas abaixo na origem, justificando rigorosamente os detalhes de seu argumento:

$$\sum_{1}^{\infty}\frac{z^n}{1-z^n}$$

b) (*Forma fraca do teorema de Mittag-Leffler*) O teorema de Mittag-Leffler é um dos mais profundos e importantes teoremas da Análise complexa. Se $\{c_1, c_2 \ldots\}$, é uma seqüência localmente finita de pontos num domínio Ω, que está de algum modo associada uma "parte principal " $p_k(z) := \sum_{j=1}^{m_k} a_{kj}(z-c_k)^{-j} \neq 0$; então é possível encontrar uma função meromorfa em Ω cujos pólos são exatamente os pontos $c_1, c_2 \ldots$ e cuja parte principal é exatamente $p_k(z)$. Vamos demonstrar diretamente algumas versões fracas deste resultado.

Considere $\{a_n\}$, uma seqüência de números complexos não nulos, dois a dois distintos que não possue ponto de acumulação em $\mathbb{C}$. Suponha que $\{b_n\}$ seja uma seqüência de números complexos não nulos.

i) Mostre que se $\displaystyle\sum \frac{|b_n|}{|a_n|^2} < \infty$, então é possível encontrar imediatamente uma função meromorfa em $\mathbb{C}$, possuindo apenas pólos simples, tal que os a_n são exatamente os pólos de $f(z)$ (com resíduo b_n).

ii) Mostre que em geral é possível encontrar uma função meromorfa em $\mathbb{C}$, cujos únicos pólos são os a_n que são pólos simples (com resíduo b_n). *Sugestão* : Considere $\displaystyle\sum \frac{b_n\, z^{r_n}}{a_n^{r_n}(z-a_n)}$, e encontre condições suficientes sobre r_n para que a série convirja uniformemente em compactos de $\mathbb{C}$ no sentido de séries de funções meromorfas.

iii) Suponha que

$$\sum \frac{1}{|a_n|^k}=\infty \qquad \text{e} \qquad \sum \frac{1}{|a_n|^{k+1}}<\infty, \quad k>0\ (n\geqslant 1)$$

Mostre que

$$f(z) = \frac{1}{z} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{z - a_n} + \frac{1}{a_n} + \frac{z}{a_n^2} + \cdots + \frac{z^{k-1}}{z_n^k} \right)$$

é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ cujos pólos são os pontos a_n ($a_0 := 0$) todos sendo pólos simples. Mostre que quando os a_n são dois a dois distintos em cada pólo o resíduo é 1.

iv) (*Funções elípticas*). Funções elípticas são funções meromorfas duplamente periódicas e estão sempre associadas a um reticulado Γ de $\mathbb{C}$. Considere o reticulado standard Γ determinado pelo conjunto $\Gamma = \{m + in,\ m, n \in \mathbb{N}\}$. Considere $\omega_{mn} = m + in$. Mostre que $\sum \frac{1}{|\omega_{mn}|^\alpha} < \infty$ para $\alpha > 2$, e $\sum \frac{1}{|\omega_{mn}|^\alpha} = \infty$ para $\alpha = 2$. Conclua do exercício anterior que a *função zeta de Riemann* dada por

$$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum \left(\frac{1}{z - \omega_{mn}} + \frac{1}{\omega_{mn}} + \frac{z}{\omega_{mn}^2} \right)$$

é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$. A função

$$\wp(z) = -\zeta(z) = \frac{1}{z^2} + \sum \left(\frac{1}{(z - \omega_{mn})^2} - \frac{1}{\omega_{mn}^2} \right)$$

é a famosa função $\wp$ de Weiestrass. Mostre que $\wp$ é uma função elíptica de grau 2 cujos pólos (duplos) são exatamente os pontos do reticulado. Você agora está convidado a fazer um estudo de funções elípticas por exemplo nas refs. 4), 5), 9) ou 10).

14) (*Teorema de Montel e teorema de Vitali*) O Teorema de Montel é um teorema fundamental da Análise Complexa que tem várias aplicações importantes: Pode-se mostrar, por exemplo, *o grande teorema de Picard*, usando a versão do teorema de Montel para funções meromorfas que diz que uma família de funções meromorfas omitindo três pontos fixados da esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é *normal*, veja ref. 4), 9), ou 12).

a) Discuta amplamente o conceito de *família normal* das Variáveis Complexas, relacionando com o teorema de Arzelà- Ascoli e com o *teorema de Montel para funções meromorfas*. Discuta o *princípio de Bolzano-Weierstrass* neste contexto. Além disso, discuta como o *princípio de* *compacidade* interfere na demonstração do *teorema de uniformização de Riemann.*

b) Seja $\mathcal{F}$ a família de funções holomorfas $\{f : B_1(0) \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}\}$, definidas no disco unitário satisfazendo

$$|f(z)| \leqslant \frac{c_0|z|}{(1-|z|)^2}$$
$$c_0 > 0$$

Mostre que toda seqüência $\{f_n\}$ de funções em $\mathcal{F}$, contém uma subseqüência $\{f_{n_j}\}$ uniformemente convergente em todo compacto $K \subset B_1(0)$, à uma função $f \in \mathcal{F}$. Agora suponha que os elementos $f \in \mathcal{F}$ da família $\mathcal{F}$ sejam *funções univalentes* no disco, satisfazendo $f'(0) = 1$. Será que $\mathcal{F}$ é compacta ?

c) Seja u_n uma seqüência de funções harmônicas definidas num domínio Ω. Assuma que em todo compacto $K \subset \Omega$, u_n é uma seqüência de funções uniformemente limitada. Assuma que as derivadas parciais de cada u_n dependem em todo ponto $p \in \Omega$- em valor absoluto- apenas da limitação da altura de cada u_n e da distância de p ao bordo de Ω. Mostre que existe uma subseqüência u_{n_j} que é uniformemente em todo compacto $K \subset \Omega$, convergindo à uma função harmônicas u em Ω.

d) Sabe-se que se $f(z) \not\equiv 0$ é uma função holomorfa limitada definida no disco unitário aberto $B_1(0)$, e se $a_1, a_2, \ldots$ é a seqüência de zeros de $f(z)$ então tal seqüência satisfaz a condição de Blaschke

$$\sum (1 - |a_n|) < \infty$$

Tal resultado pode ser demonstrado a partir da *fórmula de Jensen*, veja o exercício 15) c) logo adiante eveja também lista 6. Usando este fato e o teorema de Montel, mostre o seguinte: Seja $\{f_n\}$ uma seqüência de funções holomorfas limitadas definidas em $B_1(0)$. Seja $\mathcal{A} = \{a_1, a_2, \ldots\}$, um conjunto enumerável em $B_1(0)$, satisfazendo
$\sum (1 - |a_n|) = \infty$, tal que $\lim_{n\to\infty} f_n(a_j)$, existe para todo $a_j \in \mathcal{A}$. Então a seqüência $\{f_n\}$ converge uniformemente em compactos de $B_1(0)$.

e) Considere $\mathcal{F}_M$ a família de funções holomorfas $f(z) = \sum a_n z^n$, definidas em $B_1(0)$ satisfazendo $|a_n| \leqslant M$, para alguma constante $M > 0$. Mostre que $\mathcal{F}_M$ é normal. Mostre que $\mathcal{F}_M^k = \{f^{(k)}(z);\ f \in \mathcal{F}_M\}$ também é uma família normal.

f) Considere o conjunto ("espaço de Bergman") $H(\Omega)$ de funções holomorfas num domínio Ω que satisfazem

$$\int_\Omega |f(z)|^2 \, \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y < \infty$$

Tal conjunto tem uma estrutura natural de espaço de Hilbert e é um subespaço de $L^2(\Omega)$. Mostre que a bola B de raio r, dada por
$B = \{f \in H(\Omega); \int_\Omega |f(z)|^2 \, \mathrm{d}x \ \mathrm{d}y < r\}$ é uma família normal.

g) Seja Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$, $I = [a,b]$ um intervalo qualquer de Re. Seja $\gamma : [a,b] \to \Omega \subset \mathbb{C}$ uma curva C^1 ($[\gamma] := \gamma([a,b] \subset \Omega)$. Seja $g(z,\zeta) : \Omega \times [\gamma] \to \mathbb{C}$ uma função contínua, tal que $z \mapsto g(z,\zeta)$ é holomorfa em Ω para cada $\zeta \in [\gamma]$. Mostre, usando o teorema de Vitali que a função f definida por

$$f(z) = \int_\gamma g(z,\zeta) \, \mathrm{d}\zeta, \qquad z \in \Omega \tag{$*$}$$

é holomorfa em Ω; além disto mostre que

$$f'(z) = \int_\gamma \frac{\partial g}{\partial z}(z,\zeta) \, \mathrm{d}\zeta \qquad \forall z \in \Omega \tag{$**$}$$

sendo a existência da integral a esquerda da igualdade acima parte da pergunta a ser respondida.

Nota: O resultado acima pode, por exemplo, ser aplicado para mostrar a existência da função Gamma, na sua representação integral, veja na parte D) desta lista.

15) (*O lema de Schwarz*) O lema de Schwarz tem muitas aplicações na teoria de aplicações conformes. Também tem aplicações na moderna teoria da Dinâmica Complexa, veja ref. 23).

a) Seja $f(z)$ uma função holomorfa no disco aberto $B_1(0)$, satisfazendo $\Re f(z) > 0$, e $f(0) = 1$. Mostre que

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

Dê exemplos explícitos de tais $f(z)$. O que você pode dizer da família $\mathcal{F}$ de funções que satisfazem as hipóteses acima, $\mathcal{F}$ é *normal* ? O que acontece se relaxamos nas hipóteses acima, colocando $\Re f(z) \geqslant 0$?

b) Seja $f(z)$ uma função limitada no disco $B_1(0)$. Suponha que $|f(z)| \leqslant 1,\ \forall z \in B_1(0)$. Mostre que

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}$$

c) Seja $f(z)$ uma função limitada no disco $B_1(0)$. Suponha que $|f(z)| \leqslant 1,\ \forall z \in B_1(0)$. Suponha que $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sejam zeros de $f(z)$. Mostre que

$$|f(z)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left| \frac{z-a_k}{1-\overline{a_k} z} \right|$$

em particular conclua um caso particular da fórmula de Jensen

$$|f(0)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} |a_k|$$

Nota: Usando a teoria de *produtos infinitos* (veja na lista 6)) é possível mostrar a partir da desigualdade acima que se $f(z) \not\equiv 0$ é uma função holomorfa limitada definida no disco unitário aberto $B_1(0)$, e se $a_1, a_2, \ldots$ é a seqüência de zeros de $f(z)$ então tal seqüência satisfaz a condição de Blaschke

$$\sum (1-|a_n|) < \infty$$

d) (*Princípio de subordinação*). Mostre as seguintes aplicações do princípio de subordinação que, essencialmente, é uma forma do Lema de Schwarz (assim, se você conhece bem o Lema de Schwarz, deverá poder fazer os exercícios abaixo).

i) Mostre que se $f(z)$ é holomorfa no disco aberto $B_1(0)$, e satisfaz $-1 < \operatorname{Re} f(z) < 1$, então se $f(0) = 0$, segue que $f(z)$ satisfaz

$$|f'(0)| \leqslant \frac{4}{\pi}$$

sendo a igualdade satisfeita apenas pela função $\dfrac{4}{\pi}\arctan(\lambda z)$, onde $|\lambda| = 1$. Além disso, mostre que

$$|f(z)| \leqslant \frac{2}{\pi}\log\frac{1+r}{1-r}, \qquad |z| = r < 1$$

ii) Seja $F(z)$ uma função meromorfa univalente no disco $B_1(0)$, com seguinte expansão

$$F(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots$$

em $B_1(0)$. Suponha que $F(z)$ leva $B_1(0)$ num *certo domínio* Ω. Seja $f(z)$ uma função holomorfa no disco perfurado $B_1(0) \setminus \{0\}$, com expansão

$$f(z) = \frac{\alpha}{z} + b_0 + b_1 z + \cdots$$

em $B_1(0) \setminus \{0\}$.
Mostre que se $f(z)$ leva $B_1(0)$ em Ω, então $|\alpha| \geqslant 1$.

iii) Seja $f(z)$ uma função holomorfa no disco perfurado $B_1(0) \setminus \{0\}$, com expansão

$$f(z) = \frac{\alpha}{z} + b_0 + b_1 z + \cdots$$

Mostre que se $f(z)$ leva $B_1(0)$ em $\mathbb{C} \setminus (a, b)$, (com a, b reais e $a < b$) então $|\alpha| \geqslant \dfrac{b-a}{4}$. *Sugestão* : Você terá que encontrar uma função meromorfa univalente que leva o disco $B_1(0)$ conformemente sobre a esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *cortada ao longo do segmento* $[a, b]$.

PARTE B: DESENVOLVIMENTO DE LAURENT, SINGULARIDADES

1) Expanda as funções abaixo em suas séries de Laurent, justificando todos os passos.

a) $e^{\frac{1}{z-1}}$ para $|z| > 1$. *Sugestão*: Escreva (fazendo $\dfrac{1}{z} = z'$)

$$e^{\frac{1}{z-1}} = e^{\frac{z'}{1-z'}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z' = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

onde

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{k!}$$

b) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$, para $|z| > 2$. Onde o ramo da raiz quadrada está escolhido de forma que seja positivo para $z = x$ real $x > 2$. *Resp.*:

$$\left[c_0 z - c_1 + \frac{c_2}{z} - \frac{c_3}{z^2} + \cdots\right],$$

Onde (colocando $\alpha = 1/2$)

$$c_n = \binom{\alpha}{n} + 2\binom{\alpha}{n-1}\binom{\alpha}{1} + 2^2\binom{\alpha}{n-2}\binom{\alpha}{2} + \cdots + 2^n\binom{\alpha}{n}.$$

Sugestão: Use o desenvolvimento binomial.

c) $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$, para $0 < |a| < |z| < |b|$. *Resp.* :

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left[\cdots + \frac{a^2}{z^3} + \frac{a}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{b} + \frac{z}{b^2} + \frac{z^2}{b^3} + \cdots\right]$$

d) A mesma função para $|z| > b$.

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b-a}{z^2} + \frac{b^2-a^2}{z^3} + \frac{b^3-a^3}{z^4} + \cdots\right]$$

e) $\dfrac{\mathrm{e}^z}{(1-z)}$, para $|z| < 1$. *Sugestão*: Seja $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ o desenvolvimento de Laurent (Taylor) da função dada (por quê ?). Use a fórmula de multiplicação de séries para calcular a_n mostre que

$$a_n = \left(1 + \cdots + \frac{1}{n!}\right), \qquad n \geqslant 1,\ a_0 = 1$$

f) $\dfrac{1}{z^2+1}$, para $0 < |z-i| < 2$. *Resp.*

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{-i/2}{(z-i)} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^n (z-i)^n$$

g) Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\,\mathrm{e}^{1/z}$$

i) Escreva o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ em $\{|z| > 1\}$, justificando cada passo de seus cálculos. Encontre o resíduo de $f(z)$ no ∞.

ii) Idem para o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no anel $\{0 < |z| < 1\}$.

h) Para cada uma das funções $f(z)$ dada nos itens $a)$ a $g)$ acima calcule

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^n}\,\mathrm{d}z$$

onde a é uma singularidade isolada de $f(z)$ e γ é uma curva simples fechada envolvendo tal singularidade de $f(z)$ (e não envolvendo outra singularidade de $f(z)$)

2)

a) Seja $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{iz}}{z(z^2+1)^2}$. Justifique o fato que f é uma função meromorfa e que tem polo duplo em $z = i$. Escreva o desenvolvimento de Laurent de f numa vizinhança de $z = i$. Mostre que $\mathrm{Res(f, i)} = \dfrac{-3}{4\mathrm{e}}$.

b) Calcule os resíduos de $f(z) = \dfrac{1}{z^6+1}$ em cada um de seus polos.

3) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e mostre que

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda\left(z + \frac{1}{z}\right)\right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

para $0 < |z| < \infty$, onde para $n \geqslant 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \mathrm{e}^{\lambda\cos t}\cos nt\,\mathrm{d}t.$$

4) Dizemos que uma função $f(z)$ definida no anel $|z| > r,\ r > 0$ é “holomorfa no infinito”se, fazendo uma mudança de variáveis $z = 1/z'$ a função se expressa como uma função holomorfa em z' para $|z'| < 1/r$. Da mesma maneira uma

função $f(z)$ será *meromorfa no infinito* se esta pode se expressar como uma função meromorfa de $z^{'}$ numa vizinhança de $z^{'}=0$. Finalmente uma função holomorfa para $|z|>r,\ r>0$ admite o ponto do infinito como singularidade essencial se a função $f(1/z^{'})$ tem uma singularidade essencial na origem.

Determine o tipo de singularidade das funções abaixo e escreva o desenvolvimento de Laurent em torno de cada singularidade.

a) $\dfrac{z^2+4}{e^z}$, em $z=\infty$. *Resp.* Singularidade essencial.

b) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$, em $z=\infty$. *Resp.* Os dois ramos têm um polo simples.

c) $\cos z-\sin z$, em $z=\infty$.

d) $\sin\dfrac{1}{1-z}$, em $z=\infty$. *Resp.* A função é regular e tem um zero simples lá.

e) Dê exemplos de funções meromorfas em $\{|z|>r,\ r>0\}$ que possuem o infinito como ponto limite (de acumulação) de polos simples.

f) $\sin\dfrac{1}{1-z}$, em $z=1$. *Resp.* Singularidade essencial.

g) $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^z}$, em $z=2\pi i$. *Resp.* Polo simples com resíduo -1.

h) $\dfrac{1}{\sin z-\cos z}$ em $z=\dfrac{\pi}{4}$. *Resp.* Polo simples com resíduo $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

5) Suponha que no ponto z_0, a função $f_1(z)$ tem um zero de ordem α, e que a função $f_2(z)$ tem um polo de ordem $\beta(\alpha>0,\beta>0)$. Que tipo de ponto é z_0 para

a) $f_1\pm f_2$

b) $f_1\cdot f_2$

c) $\dfrac{f_1}{f_2}$

d) $\dfrac{f_2}{f_1}$

6) Determine os resíduos das funções abaixo e encontre a parte principal da série de Laurent em torno de cada singularidade.

a) $\dfrac{1}{\sin z}$ em $z=k\pi,\ k=0\pm1\pm2,\ldots$ *Resp.* $(-1)^k$

b) $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ em $z=+1$ e em $z=+2$. *Resp.* $\mathrm{Res(f,1)}=1,\ \mathrm{Res(f,2)}=-1$.

c) $\dfrac{a}{(z-z_1)^m(z-z_2)}$ em z_1 e $z_2,\ z_1\neq z_2\ (a\neq0,\ m\in\mathbb{N})$ *Resp.* $\mathrm{Res(f,z_1)}=\dfrac{-\mathrm{a}}{(\mathrm{z_2-z_1})^{\mathrm{m}}},\ \mathrm{Res(f,z_2)}=\dfrac{\mathrm{a}}{(\mathrm{z_2-z_1})^{\mathrm{m}}}$.

d) $(1-\mathrm{e}^{-z})^{-n}$, em $z=0$.

e) $\dfrac{1+z}{(1+z+z^2)^2}$.

7) Suponha que $f(z)$ tenha uma singularidade isolada em $z=a$ e suponha que $f(z)\not\equiv 0$. Suponha que exista $s\in\mathrm{Re}$ tal que uma das seguintes equações vale

$$\begin{aligned}\lim_{z\to a}|z-a|^s|f(z)| &= 0\\ \lim_{z\to a}|z-a|^s|f(z)| &= \infty\end{aligned}$$

a) Mostre que existe um inteiro m tal que a primeira equação vale se $s>m$, e a segunda equação vale se $s<m$.

b) $m=0$, se $z=a$ é uma singularidade artificial e $f(a)\neq 0$.

c) $m<0$, se $z=a$ é uma singularidade artificial e f tem um zero em $z=a$ de ordem $-m$.

d) $m>0$, se $z=a$ é um polo de f de ordem m.

e) Se $z=a$ é uma singularidade essencial de f então nenhuma das equações acima vale para algum $s\in\mathrm{Re}$.

8) Seja f uma função holomorfa definida em um domínio perfurado ("punctured") $\Omega^*:=\Omega\setminus\{p\}$, onde Ω é um domínio e $p\in\Omega$. A finalidade deste exercício é mostrar que se

$$(*)\qquad \int_{\Omega^*}|f(z)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y<\infty$$

então f se estende holomorficamente a todo Ω.

a) Mostre de duas maneiras distintas que, supondo $p=0$ (sem perda de generalidade), se g é holomorfa em Ω e B_r, a bola de raio r e centro 0, satisfaz $\overline{B_r}\subset\Omega$, então

$$|g(0)|^2\leqslant\frac{1}{\pi r^2}\int_{B_r}|g(z)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Sugestão : A primeira maneira de demonstrar a desigualdade acima é aplicar diretamente a identidade de Parseval (veja Lista4, Parte B, exerc. 4)). A segunda maneira usa apenas a fórmula de Cauchy aplicada à função $g^2(z)$.

b) Use a estrutura da demonstração do item a) para mostrar que f no enunciado, i. e satisfazendo $(*)$ *não tem* singularidade essencial na origem.

c) Mostre que $\int\limits_{\Omega^*} |f(z)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \infty$, se f tem um pólo na origem.

9) Seja f uma função holomorfa no disco perfurado $\mathcal{D}^* = \{|z| < 1\} \setminus \{0\}$. Mostre que a função

$$M(r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t \qquad 0 < r < 1$$

é uma constante que não depende de r. *Sugestão* : Use o desenvolvimento de Laurent na origem.

10) O que você pode dizer de uma função holomorfa $f(z)$ num perfurado centrado na origem e que satisfaz uma das condições abaixo.

a) $|f(z)| \geqslant c\dfrac{\mathrm{e}^{a/|z|}}{|z|^n}$, $n \in \mathbb{N}, c > 0, a \geqslant 0$

b) $|f(z)| \leqslant \dfrac{1}{|z|^{7/2}}$.

11) Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{(1-az)(1-bz)(1-cz)}$$

onde a, a, c são números reais distintos e não nulos. Usando obrigatoriamente o teorema dos resíduos calcule o desenvolvimento em somas parciais de f. Em seguida calcule o desenvolvimento de Taylor na origem de f. Calcule o desenvolvimento de Taylor, por outro método efetuando logo o produto. Compare os resultados e obtenha uma fórmula algébrica.

12) Considere

$$f(z) = \frac{1}{z} - \frac{n}{z(z+1)} + \frac{n(n-1)}{z(z+1)(z+2)} - \frac{n(n-1)(n-2)}{z(z+1)(z+2)(z+3)}$$
$$+\cdots+\frac{(-1)^{k+1}n(n-1)(n-2)\cdots(n-k)}{z(z+1)(z+2)(z+3)\cdots(z+k+1)}+\cdots+\frac{(-1)^n n!}{(z(z+1)(z+2)\cdots(z+n)}$$

a) Calcule os resíduos de $f(z)$.

b) Encontre o desenvolvimento de Laurent, *sem usar decomposição em frações parciais*. Conferir usando tal decomposição. Reveja o exec. B 29) da lista 2.

13) Sejam $f(z)$ e $g(z)$ funções meromorfas em $\mathbb{C}$. Suponha que tanto f como g admitem pólos simples nos inteiros, com mesmo resíduo (e não possuem outros pólos). Suponha ainda que $\lim\limits_{z\to\infty} (f(z) - g(z)) = 0$. O quê você pode dizer ?

14) Escreva os desenvolvimentos de Laurent das funções abaixo para $\{|z|>0\}$, verificando o *grande teorema de Picard.*

a) $f(z)=\cos\left(\sqrt{az}\right)\,\cos\left(\dfrac{1}{\sqrt{bz}}\right), \quad a,b\neq 0.$

b) $f(z)=\mathrm{e}^{1/(az)+bz}, \quad a,b\neq 0.$

c) $f(z)=\cosh\left(z+\dfrac{1}{z}\right).$

15) O que você pode dizer sobre uma função harmônica u definida num disco perfurado $\mathcal{D}^*$?

Em particular, discuta detalhadamente o caso em que u está limitada em $\mathcal{D}^*$.

16) Considere

$$f(z)=\frac{1}{(z^n-1)^2}$$

a) Calcule os resíduos de $f(z)$ nas singularidades.

b) Seja γ uma curva simples fechada contida no exterior do disco fechado de raio 1, i.e $[\gamma]\subset\mathbb{C}\setminus\overline{B_1(0)}$. Mostre que

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z=0$$

Deduza a integrabilidade de $f(z)$ no domínio $\mathbb{C}\setminus\overline{B_1(0)}$. Deduza uma outra alternativa demonstração deste fato.

c) Seja $h(z)$ uma função inteira. Calcule

$$\int\limits_{|z-z_k|=\epsilon}\frac{h(z)}{(z^n-1)^2}\,\mathrm{d}z$$

onde z_k é uma singularidade de $f(z)$ e ϵ é tomado suficientemente pequeno.

d) Escreva a série de Taylor de $f(z)$ em $z=0$.

e) Escreva a série de Laurent de $f(z)$ em $z=1$.

17) Considere a função $f(z)=\dfrac{\sin(\pi z)\,\mathrm{e}^{\pi z}}{\pi z(1-z)(1-z/2)\cdots(1-z/n)}$.

a) Mostre que existe um bem definido ramo de $\sqrt[n]{f(z)}$ na faixa $-1<\Re z<n+1$.

b) Calcule os resíduos da função $\dfrac{\sqrt[n]{f(z)}}{\sin(\pi z)}$ na faixa dada no item *a*).

PARTE C: PRINCÍPIO DO ARGUMENTO E TEOREMA DE ROUCHÉ

(*Interpretação geométrica do princípio do argumento*). Seja f uma função meromorfa em um aberto A. Seja γ uma curva fechada C^1 por partes que não paasa pelos zeros ou polos de f. O princípio do argumento sugere que fazendo z percorrer γ, $\log f(z)$ muda por um múltiplo de $2\pi i K$, onde K é um inteiro que mede o "número de voltas"que a imagem de γ faz em torno da origem, ou equivalentemente, $2\pi K$ mede a "variação' de $\arg f(z)$ quando z percorre γ. A dificuldade com este raciocínio é que não se pode definir sempre $\log f(z)$ (caso isto seja possıvel $\int_\gamma f'/f = 0$). Mas, esta discussão pode ser colocada em bases rigorosas da seguinte maneira:

Como nenhum zero ou polo de f está em γ existe um disco aberto $B(a,r)$ para cada $a \in [\gamma]$, tal que um ramo de $\log f(z)$ pode ser definido. Usando o lema de Lebesgue existe um número positivo $\epsilon > 0$ tal que para todo $a \in [\gamma]$ pode-se definir um ramo de $\log f(z)$ em $B(a,\epsilon)$. Usando continuidade uniforme de γ (suponhamos que γ está definida em $[0,1]$) existe uma partição $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ tal que $\gamma(t) \in B(\gamma(t_{j-1},\epsilon)$ para $t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j$ e $1 \leqslant j \leqslant k$ (por quê ?). Seja ℓ_j o ramo de $\log f$ definida em $B(\gamma(t_{j-1}),\epsilon)$ para $1 \leqslant j \leqslant k$. Como tanto o j-ésimo disco quanto o $j+1$-ésimo disco contém $\gamma(t_j)$ podemos escolher $\ell_1,\dots,\ell_k$ de forma que $l_1(\gamma(t_1)) = l_2(\gamma(t_1)), l_2(\gamma(t_2)) = l_3(\gamma(t_2)),\dots,l_{k-1}(\gamma(t_{k-1})) = l_k(\gamma(t_{k-1}))$. Se γ_j é a restrição da curva γ ao intervalo $[t_{j-1},t_j]$ como $\ell_j = f'/f$, temos que

$$\int\limits_{\gamma_j} \frac{f'}{f} = \ell_j\left(\gamma(t_j)\right) - \ell_j\left(\gamma(t_{j-1})\right)$$

para $1 \leqslant j \leqslant k$. Somando ambos os lados desta equação obtém-se

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f'}{f} = \ell_k\left(\gamma(1)\right) - \ell_1\left(\gamma(0)\right).$$

Mas, γ é fechada, i.e $a := \gamma(1) = \gamma(0)$. Logo, $\ell_k(a) - \ell_1(a) = 2\pi i K$ onde K é um inteiro (já que são determinações do logaritmo). Isto conclui nossa interpretação de que quando z percorre γ, $\arg f(z)$ muda por $2\pi K$.

1) Mostre que o número de zeros de de $P(z) = z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 4$ no primeiro quadrante é zero. E no quarto quadrante ? Isto pode ser deduzido imediatamente do resultado no primeiro quadrante por *simetria* ?

i) Mostre que em $\operatorname{Im} z = 0, 0 \leqslant \Re z \leqslant R$, a variação do argumento $\arg P(x)$, $x = \Re z$, é evidentemente nula já que $P(x) > 0$.

ii) Fazendo $z = R\mathrm{e}^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ e R grande tem-se que a variação do argumento é da ordem

$$\arg P(R\mathrm{e}^{i\theta}) = 2\pi + \delta$$

onde $\delta \to 0$, quando $R \longrightarrow \infty$.

ii) Analise a variação do argumento quando $x = 0$ e $0 < y < R$, analisando os zeros e o sinal das partes reais e imaginárias do polinômio $P(iy)$ no intervalo considerado. Conclua que a variação de $\arg P(iy)$ é $-2\pi + \delta_1$ onde $\delta_1 \to 0$ quando $R \longrightarrow \infty$. Finalmente, infira a nulidade da variação total do argumento ao longo de C, já que C é fechada e o argumento deve ser um inteiro.

2) Pela mesma técnica do exercício anterior mostre que as seguintes equações têm apenas um zero no primeiro quadrante:

$$z^3 - z^2 + 2 = 0, \qquad z^4 + z^2 = 2z - 6, \qquad z^4 + z^3 = 2z^2 - 2z - 4.$$

3) Mostre que $\mathrm{e}^z = -2z + 1$ tem exatamente um zero em $|z| < 1$. *Sugestão*: Considere $f(z) = -2z$, $\quad g(z) = \mathrm{e}^z - 1 = \int_0^z \mathrm{e}^\zeta \, \mathrm{d}\zeta$. Mostre que pela última expressão obtém-se a estimativa: $|g(z)| \leqslant 2$, se $|z| \leqslant 1$. Aplique o teorema de Rouché.

4) Considere a equação $2z^5 + 8z - 1 = 0$.

a) Mostre que a equação não tem zeros em $|z| > 2$, por um raciocíno elementar direto $(64 > 17)$. Confirme isto mostrando via o teorema de Rouché que existem 5 zeros em $|z| < 2$.

b) Mostre que a equação tem exatamente um zero em $|z| < 1$ e que este zero é real e positivo.

c) Mostre que a equação não tem zeros em $|z| = 1$; logo conclua que tem exatamente 4 zeros no anel $1 < |z| < 2$.

5) Considere a equação

$$f(z) = \mathrm{e}^{-z} + z = a$$

com $\Re a > 1$.

a) Usando o princípio do argumento, nos moldes do exerc. 1) acima, mostre que a equação possui uma e apenas uma solução no semi-plano $\Re z > 0$.

b) Usando o teorema de Rouché, mostre que a equação tem apenas uma solução para $\Re z > 0$.

6) A finalidade deste exercício é "localizar" os zeros da equação

$$\tan z = a(z - \alpha)$$

onde $a \neq 0$ e α são números complexos.

a) Pretende-se sugerir uma "comparação' com os zeros da equação

$$a(z - \alpha)\cos z = 0.$$

Estes são conhecidos: $z = \alpha$ e$(2n + 1)\pi/2$.

a) Considere o retângulo cujo bordo γ positivamente orientado é dado pela justaposição de quatro caminhos (faça uma figura):

$$\begin{aligned} \gamma_1 : t \to n\pi + it, &\qquad -n\pi \leqslant t \leqslant n\pi \\ \gamma_2 : t \to ni\pi - t, &\qquad -n\pi \leqslant t \leqslant n\pi \\ \gamma_3 : t \to -n\pi - it, &\qquad -n\pi \leqslant t \leqslant n\pi \\ \gamma_4 : t \to -ni\pi + t, &\qquad -n\pi \leqslant t \leqslant n\pi \end{aligned}$$

Mostre que para n suficientemente grande, $\dfrac{1}{|a(z - \alpha)|}$ é arbitrariamente pequeno sobre $[\gamma]$. Considerando a periodicidade da funçãotan z e das escolhas dos caminhos γ_1 e γ_3, mostre que $\tan z$ é *limitada por um número independente de* n em $[\gamma]$. *Sugestão*: Use a fórmula $\tan z = \dfrac{1}{i}\dfrac{e^{2iz} - 1}{e^{2iz} + 1} = \dfrac{2i}{1 + e^{2iz}} - i$, e mostre que para todo $\delta > 0$, a função $\dfrac{1}{1 + e^{iz}}$ é limitada no semi-plano $\operatorname{Im} z \geqslant \delta$.

Aplique o teorema de Rouché para mostrar que a equação tem exatamente $2n + 1$ zeros tais que $|\Re z| < n$ e $|\operatorname{Im} z| < n$, desde que n seja suficientemente grande. Agora considere um quadrado Q_n de lados paralelos aos eixos e iguais a um número arbitrário δ tal que $0 < \delta < \dfrac{\pi}{2}$, com centro $(2n + 1)\dfrac{\pi}{2}$. Mostre que sobre o perímetro deste quadrado o máximo $M(\delta)$ dos valores de $|\tan z|$ é independente de n, por periodicidade. Mostre que para n suficientemente grande

$$\frac{M(\delta)}{|a|\,(|2n + 1|\pi/2 - |\alpha|)} < 1.$$

Conclua que a equação tem exatamente um zero em Q_n.

7) Deduza o teorema fundamental da álgebra aplicando o teorema de Rouché.
8) Suponha que $f(z)$ é analítica em um domínio contendo o disco unitário fechado centrado na origem. Se $|f(z)| < 1$ para $|z| = 1$, mostre que existe apenas um único z com $|z| < 1$ satisfazendo $f(z) = z$. Se $|f(z)| \leqslant 1$ para $|z| = 1$, o que você pode dizer ?
9) Suponha que a, b, c sejam números complexos tais que $|b| - |c| > |a| > 0$; mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ a equação
$$az^n + bz + c = 0$$
possui exatamente um zero em $|z| < 1$.
10) Mostre que para todo número complexo a e todo inteiro $n \geqslant 2$, a equação $az^n + z + 1 = 0$ possui ao menos um zero em $|z| \leqslant 2$. *Sugestão*: Mostre que se $|a| < 2^{-n}$ há exatamente um zero pelo teorema de Rouché. Se $|a| \geqslant 2^{-n}$, então o resultado é uma conseqüência do fato que $|z_1 \cdots z_n| = |1/a|$, onde as z_j são os zeros da equação , com multiplicidades. Por quê ?
11) Mostre que para λ real, $\lambda > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a equação $z^n \mathrm{e}^{\lambda - z} = 1$, possui n zeros (contando as multiplicidades) em $|z| < 1$.
12) *Os zeros de um polinômio variam continuamente com os coeficientes do polinômio.* Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_k$ o conjuntos dos zeros do polinômio $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n,\ z_j$ sendo um zero de ordem m_j; seja $\rho = \min\limits_{i \neq j} |z_i - z_j|$. Mostre que para todo $\epsilon \in (0, \rho)$ existe um $\delta > 0$ tal que todo polinômio
$$q(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n$$
com $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |b_i - a_i| < \delta$ possui exatamente m_j zeros (contando as multiplicidades) no disco aberto $B(z_j, \epsilon),\ j = 1, 2, \ldots, k$. *Sugestão*: Sabe-se que
$$P(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_k)^{m_k}$$
Mostre que sobre o círculo de equação $|z - z_j| = \epsilon$, tem-se que $|P(z)| \geqslant \epsilon^{m_j} (\rho - \epsilon)^{n - m_j}$. Mostre que
$$|q(z) - P(z)| \leqslant \delta \sum_{t=0}^{n-1} |z|^t \leqslant \delta \sum_{t=0}^{n-1} \left(|z_j| + \epsilon\right)^t .$$

Logo considerando

$$0 < \delta < \min_{1 \leqslant j \leqslant k} \left\{ \frac{\epsilon^{m_j} (\rho - \epsilon)^{n-m_j}}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} (|z_j| + \epsilon)^t} \right\}$$

conclua o resultado, aplicando o teorema de Rouché.

13) Mostre que a equação $z(\mathrm{e}^z - 1) = w$ para $|w| < 1/6$ tem exatamente duas soluções na bola aberta de raio $R = 1/2$ centrada na origem. *Sugestão*: Mostre que se $|z| = r < 1$ então

$$|\mathrm{e}^z - 1| \geqslant r - \frac{r^2}{2 - r}$$

14) Encontre o número de zeros do polinômio $p(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ contidos dentro da bola unitária aberta de raio 1 centrada na origem. Idem para o anel $\{1 < |z| < 2\}$. *Sugestão*: Mostre usando o algoritmo de Euclides que p e p' são primos entre si, concluindo que todas os zeros de p são simples.

15) Seja $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| < \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. Mostre que existe um único número complexo $z = f(w)$ tal que $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ com $z^3 + z = w$. Mostre que $f(w)$ é holomorfa e infira a seguinte fórmula

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{z(3z^2 + 1)}{z^3 + z - w} \, \mathrm{d}z$$

a) Escreva o desenvolvimento de Taylor de $f(w)$ em $w = 0$, explicitando os coeficientes do desenvolvimento e determinando o raio de convergência da série.

16) Sejam $a_1, \ldots, a_n$ e b números complexos de módulo inferior que 1, e sejam $k_1, \ldots, k_n$ números inteiros positivos. Mostre que a equação

$$\prod_1^n \left(\frac{z - a_j}{z\overline{a} - 1} \right)^{k_j} = b$$

possui $k := k_1 + \cdots + k_n$ soluções na bola unitária aberta de raio 1 centrada na origem.

17) Mostrando que $\tan z - z$ tem apenas zeros reais, calcule os resíduos da função

$$f(z) = \frac{\sin^2 z \tan^2 z}{z^2(\tan z - z)}\cdot$$

18) Calcule

$$\int\limits_{|z|=7} \frac{z^7\left(1 + \mathrm{e}^{7\cos z}(1+\cos z)^7\right)^2(\sin z + \cos z)}{(\sin z/3)^7(\sin z - \cos z)}\,\mathrm{d}z$$

19) Considere polinômio $f(z)$ dado por

$$f(z) := \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \cdots (-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{2n!}$$

Mostre que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant N$ então $f(z)$ tem exatamente um zero simples no disco $|z| < 2\pi$.

20) (*Funções inversas*) Suponha que f seja meromorfa num aberto que contenha um domínio Ω cujo bordo é uma curva simples fechada positivamente orientada γ, que não contém nem zeros nem pólos de f. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_m$, respectivamente, os zeros e os pólos de f. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} g(a_j) - \sum_{k=1}^{m} g(b_k)$$

onde cada zero e cada pólo são contados de acordo com sua multiplicidade.
Deduza os seguintes resultados

a) Seja $f(z)$ uma função holomorfa numa bola $B_\epsilon(0)$ centrada na origem de raio ϵ, tal que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. Suponha que $f(z) \neq 0$ para $0 < |z| < \epsilon$. Seja C_r o círculo de raio r centrado na origem com $r < \epsilon$. Mostre que

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{C_r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}\,\mathrm{d}\zeta$$

define uma função holomorfa para $|w| < \min\limits_{\theta} |f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|$. Para tais valores de w, $z = g(w)$ é a única solução da equação

$$f(z) = w$$

que tende a zero quando w tende a zero. Além disso mostre que

$$g(w) = \sum_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta))^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta \quad w^n$$

sendo que a série converge uniformemente com respeito a ζ e w, desde que t percorra C_r e $|w| \leqslant c < \min\limits_\theta |f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|$.

i) Considere $F(a,b,c,z)$ a série hipergeométrica (veja por exemplo, ref. 1). Mostre que a raíz da equação

$$z^3 + 3z - w = 0$$

que tende a zero quando $w \to 0$ é dada por uma série hipergeométrica.

b) Com as mesmas condições do item a) anterior mostre que se h é uma função holomorfa num aberto contendo a bola $B_\epsilon(0)$, então

$$h(g(w)) = h(0) + \sum_1^\infty \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} h'(z)(\psi(z))^n \bigg|_{z=0} w^n$$

onde $\psi(z) = \dfrac{z}{f(z)}$. As séries obtidas nos itens a) e b) obtidas são chamadas de *séries de Lagrange*.

i) Escreva enunciados analogos aos dos itens a) e b) relativos a inversa da equação

$$w = f(z)$$

num ponto $w_0 = f(z_0)$ (note que em a) e b) $z_0 = w_0 = 0$)

ii) Escreva as expansões de Lagrange do item b) quando $f(z) = \dfrac{z}{\mathrm{e}^{2z}}$, e $g(z) = \mathrm{e}^{\lambda z}$.

c) Seja

$$F(z,w) = \sum_{m=0}^\infty \sum_{n=0}^\infty a_{mn} z^m w^n, \; a_{00} = 0 \quad \text{e} \qquad a_{01} \neq 0$$

sendo que a série dupla é absolutamente convergente para $|z| \leqslant r_1$ e $|w| \leqslant r_2$. Mostre que existe uma única função holomorfa $f(z)$ numa vizinhança da origem, com $f(0) = 0$ e

$$F(z, f(z)) = 0$$

nesta vizinhança. Além disso f pode ser representada por

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C w \frac{F_w(z,w)}{F(z,w)} \, \mathrm{d}w$$

onde C é um círculo de raio r para $r < r_2$.

Sabe-se da álgebra que qualquer função simétrica das raízes de uma equação algébrica é expressa de maneira única como um polinômio nas somas das potências destas raízes. Use isto para mostrar o seguinte

d) Se f é uma função holomorfa na bola $B_\epsilon(0)$ e se 0 é um zero de ordem k de f em 0, então para valores pequenos de $|w|$, a equação

$$f(z) = w$$

tem k raízes $z_1(w), \ldots, z_k(w)$, que tendem a zero, quando $w \to 0$. Além disso, estas raízes satisfazem uma equação algébrica de grau k

$$z^k + g_1(w) z^{k-1} + \cdots + g_k(w) = 0$$

cujos coeficientes são funções holomorfas que tendem a zero quando $w \to 0$. Aproveite o momento para enunciar e demonstrar o *teorema de preparação de Weierstrass* e o *teorema das funções implícitas* para funções analíticas de duas variáveis complexas.

e) Nas hipóteses do item d) acima, mostre que existe uma função $h(\zeta)$, holomorfa para $|\zeta|$ suficientemente pequeno, tal que para cada valor pequeno fixado de w, as k determinações de $h(w^{1/n})$ representam as raízes $z_1(w), \ldots, z_k(w)$, em alguma ordem. Quando w percorre um circuito fechado em torno da origem, as raízes são permutadas ciclicamente. Além disso, a generalização das séries de Lagrange no caso que 0 é um zero de ordem k, toma a seguinte forma ($f(z) = w$)

$$z = f^{-1}(w) = h(w^{1/n}) = \sum_1^\infty \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} (\psi(z))^n \Big|_{z=0} w^{n/k}$$

onde $\psi(z) = \dfrac{z}{f(z)^{1/k}}$.

PARTE D: PROLONGAMENTO ANALÍTICO II

1) Seja f uma função holomorfa num domínio Ω de $\mathbb{C}$. Diz-se que Ω é o *domínio de holomorfia* de f se f não possui nenhum prolongamento à um domínio $\widetilde{\Omega}$ contendo Ω com $\widetilde{\Omega} \neq \Omega$. Pode-se mostrar que para todo domínio Ω de $\mathbb{C}$, existe uma função holomorfa f definida em Ω para a qual Ω é seu domínio de holomorfia. Neste caso o bordo $\partial\Omega$ de Ω é chamado de *fronteira natural de holomorfia* de f e os pontos de $\partial\Omega$ são chamados de *pontos singulares* de f, ou seja, f não admite prolongamento analítico a nenhum aberto $\mathcal{U}$ contendo um ponto ζ qualquer de $\partial\Omega$.
   a) Mostre que todos os pontos do bordo do disco de convergência da série abaixo são pontos singulares, i.e o círculo $S^1 = \partial\Omega$ é a fronteira natural de f e o disco de convergência é o domínio de holomorfia de f:

$$f(z) = z + z^2 + z^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2n}.$$

Sugestão: Mostre que o *limite radial* quando o raio tende à 1 é ∞. Mais precisamente, mostre primeiramente que

$$\lim_{t\to 1} \left| f(r\mathrm{e}^{it}) \right| = \infty$$

quando cada t é da forma $2\pi k/2^\ell$, $k \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{N}$. Em seguida mostre que isto é suficiente para mostrar que um ponto ζ qualquer de $\partial\Omega$ é um ponto singular de f.
   b) Dê outras funções analíticas definidas no disco unitário aberto de maneira que o círculo S^1 seja a fronteira natural de f.
   c) Exiba uma série de potências cujo raio de convergência é 1 e que possui apenas 1 ponto singular no bordo de seu disco de convergência. Mostre que sempre tem um ponto singular no bordo do disco de convergência de uma função analítica.
   d) Exiba também um exemplo de série de potências que possui apenas 1 ponto não singular no bordo de seu disco de convergência.

2) Seja R, $0 < R < \infty$ o raio de convergência de série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

O teorema de Abel diz o seguinte: *Se ζ é um ponto da fronteira do disco de convergência $|z-a|<R$, se a série converge para $z=\zeta$, então o limite radial existe em $z=\zeta$, isto é* (mas, o *limite, em geral não existe* !)

$$\lim_{\substack{t\to 1\\ 0\leqslant t<1}} f\left(a+t(\zeta-a)\right)=\sum_{n=0}^{\infty} c_n(\zeta-a)^n. \qquad (*)$$

a) Mostre usando o teorema de Abel que

$$\log 2=\lim_{\substack{t\to 1\\ 0\leqslant 1}}\log(1+t)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Conclua que, de fato, tem-se que

$$\log 2=\lim_{z\to 1}\log(1+z)=\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

b) Mostre que o limite do primeiro termo de $(*)$ pode existir sem que a série do segundo termo convirja.

c) Seja

$$f(z)=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\cdots=\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |z|<1$$

verificar que o raio de convergência da série é 1 e que $f^{'}(z)=\dfrac{1}{(z^2+1)}$, $|z|<1$. Deduzir que para t real em $(-1,1)$, $f(t)=\arctan t$. Pelo teorema de Abel conclua que (série de Gregory e Leibniz)

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n\geqslant 0}\frac{(-1)}{2n+1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots$$

d) Seja $\Re\alpha<0$, demonstrar que a série é divergente

$$\sum_{n\geqslant 0}(-1)^n\binom{\alpha}{n}$$

Sugestão: Considere a série de Taylor de $(1-z)^\alpha$.

3) Mostrar que

$$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \log(1+z) - \log(1-z) \qquad \text{se } z \notin E = \{t \in \mathrm{Re};\ |t| \geqslant 1\}$$

Sugestão: Verifique que as duas funções são holomorfas em $\mathbb{C} \setminus E$ e que a igualdade é verificada para $z \in \mathrm{Re}$ e $|z| < 1$.

4) Seja

$$f(z) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

Verificar que f é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus F$, onde $F = \{it,\ t \in \mathrm{Re},\ |t| > 1\}$. De acordo com o item anterior conclua que

$$f(z) = \frac{1}{2i}\log(1+iz) - \log(1-iz) \qquad \text{se } z \notin F$$

Concluir que $f(z)$ é um prolongamento analítico da função f dada no item 2) c). Conclua que $\tan(f(z)) = z,\ z \in \mathbb{C} \setminus F$ (cf. exercício 12 Parte A, Lista 3). f é o ramo principal de $\arctan z$.

5) (Representação de funções holomorfas por integrais): Para estudar a representação por integrais é preciso do seguinte resultado básico. *Seja Ω um aberto não vazio de $\mathbb{C}$, I um intervalo qualquer de* Re *e $g : \Omega \times I \to \mathbb{C}$ uma função contínua (na verdade basta "mensurável") tal que:*

i) $z \mapsto g(z,t)$ é holomorfa em Ω para cada $t \in I$

ii) Existe uma função não negativa $M : I \to \mathrm{Re}^+ \cup \infty$ ("integrável") tal que $|g(z,t)| \leqslant M(t),\ t \in I$, para todo $z \in \Omega$ com

$$\int_I M(t)\,\mathrm{d}t < \infty$$

Então a função f definida por

$$f(z) = \int_I g(z,t)\,\mathrm{d}t \qquad (*)$$

é holomorfa em Ω; além disto

$$f^{(k)}(z) = \int_I g^{(k)}(z,t)\,\mathrm{d}t \qquad \forall z \in \Omega \qquad (**)$$

onde $g^{(k)}(z,t)$ *é igual à* $\dfrac{\partial^k g}{\partial z^k}(z,t),\ k = 1, 2, \ldots$ *Se* γ *é uma curva* C^1 *por partes em* Ω*, então*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_I \left\{ \int_\gamma g(z,t)\,\mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}t \qquad (***)$$

A demonstração do resultado acima é clássica. Depende da aplicação sucessiva dos seguintes teoremas: Teorema da convergência dominada de Lebesgue (para mostrar que $f(z)$ é contínua em Ω) , teorema de Fubini (para mostrar que as integrais iteradas no segundo membro de $(***)$ não dependem da ordem da integração , mostrando assim a igualdade em $(***)$), teorema de Morera (que depende de $(***)$) e fórmula de Cauchy local (para mostrar $(**)$).

a) Mostre o seguinte corolário do resultado acima, usando o fato que *holomorfia* é uma propriedade *local*: *Seja* Ω *um aberto não vazio de* $\mathbb{C}$, I *um intervalo compacto de* Re *e* $g : \Omega \times I \to \mathbb{C}$ *uma função contínua tal que* $z \mapsto g(z,t)$ *é holomorfa em* Ω *para cada* $t \in I$*; então* f *definida por* $(*)$ *é holomorfa em* Ω *e* $(**)$, $(***)$ *são verificadas.*

b) Mostre a igualdade

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + z\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - z^2}}$$

se $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \Big((-\infty, -1) \cup [1, \infty) \Big)$. *Sugestão*: Mostre que se $f(z)$ é o termo à esquerda e $h(z)$ o termo à direita então ambas as funções são holomorfas em Ω (use o resultado no item a) para mostrar que f é holomorfa em Ω).

c) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(zt - \alpha t^2)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{z^2/4\alpha}, \qquad z \in \mathbb{C}, \alpha > 0$$

Deduza a seguinte bem conhecida fórmula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

Em particular, obtenha a *transformada de Fourier* de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t^2}\, \mathrm{e}^{-ipt}\, \mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-p^2/4\alpha}$$

Sugestão: Seja $f(z)$ o membro à esquerda da igualdade acima. Mostre que para $\Re z < a$ tem-se que

$$|\exp(zt - \alpha t^2)| \leqslant \exp(at - \alpha t^2), \qquad t \in \mathrm{Re}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(at - \alpha t^2)\, \mathrm{d}t < \infty$$

para $a \in \mathrm{Re}$, $\alpha > 0$. Aplique o resultado no item a) para mostrar que $f(z)$ é uma função holomorfa no semi-plano aberto $\Re z < a$, daí conclua que $f(z)$ é uma função inteira. Mostre a igualdade desejada para z *real* fazendo a seguinte integração elementar:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\left\{-\alpha\left(t - \frac{z}{2\alpha}\right)^2 + \frac{z^2}{4\alpha^2}\right\}\right) \mathrm{d}t$$

d) (*Função Gamma*) Considere a função (chamada função Gamma)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t$$

i) Mostre que Γ é holomorfa no aberto $\Re z > 0$, $t^{z-1} = \exp\{(z-1)\log t\}$, $0 < t < \infty$. *Sugestão*: Mostre que para $0 < a < \Re z < b$, então

$$|\mathrm{e}^{-t} t^{z-1}| \leqslant \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} t^{b-1} & \text{se } t \geqslant 1 \\ t^{a-1} & \text{se } 0 < t < 1 \end{cases}$$

ii) Mostre a equação funcional

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Conclua que $\Gamma(n+1) = n!,\ n \in \mathbb{N}$. *Sugestão*: Verifique a equação acima para z real e $z > 0$, fazendo uma integração por partes.

iii) (*Prolongamento analítico da função* Γ) Mostre que a função gamma possui um prolongamento analítico em $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$, sendo cada ponto $-n$ um polo simples com

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -\mathrm{n}) = \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}, \qquad \mathrm{n} \in \mathbb{N}$$

Sugestão: Considere $\Gamma(z) = \varphi(z) + \psi(z)$, onde

$$\varphi(z) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t, \quad \psi(t) = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t, \quad \Re z > 0$$

Mostre com um raciocínio similar ao exercício precedente que ψ é uma função inteira. Em seguida verifique que utilizando o teorema da convergência dominada de Lebesgue tem-se que para $\Re z > \epsilon > 0$

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

Mostre que a série acima é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \ldots\}$, observando que se $\mathcal{D}$ é um disco aberto tal que $\bar{\mathcal{D}} \cap \{0, -1, -2, \ldots\} = \emptyset$, então

$$\inf\{|z+n|;\ n \in \mathbb{N},\ z\mathcal{D}\} = c > 0$$

isto é a série acima é normalmente convergente em $\bar{\mathcal{D}}$. Mostre que $\lim_{z\to -m} \Gamma(z) = (-1)^m/m!$.

iv) Mostre que

$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{2n!}{n!\, 4^n} \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}$$

v) Foi mostrado usando teoria dos resíduos que

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\lambda (1+x)}\, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin \lambda\pi}, \quad (0 < \lambda < 1)$$

usando o cálculo acima mostre a *fórmula de suplemento de Euler*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

Procure extrair consequëncias disto (veja Remmert, 1998, pg 40).

Nota: Uma outra fórmula importante é a *fórmula de duplicação de Gauss-Legendre*:

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) = 2^{2z-1}\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right) \qquad 2z \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$$

vi) Demostre a seguinte regra da *transformada de Laplace* $\mathcal{L}$, usando continuação analítica

$$\mathcal{L}(t^\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Calcule

$$\mathcal{L}(1/\sqrt{\pi t})$$

e) Dizemos que uma série

$$\sum_0^\infty a_n z^{-n}$$

é uma série assimptótica para uma função $f(z)$ para certos valores de $\arg z$, se para cada inteiro $k \geqslant 0$, tem-se que

$$\lim_{z\to\infty} z^k \big(f(z) - \sum_0^\infty a_n z^{-n}\big) = 0,$$

para $\arg z$ no domínio determinado. Neste caso escreve-se

$$f(z) \sim \sum_0^\infty a_n z^{-n}$$

i) Considere a função

$$f(z) = \int_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t+z}\,\mathrm{d}t, \qquad \Re z > 0$$

O que você pode dizer sobre a holomorfia de $f(z)$? Será $f(z)$ holomorfa para $|\arg z| < \pi$? Mostre que

$$f(z) \sim \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{z^n}$$

Será que o desenvolvimento assimptótico é válido para $|\arg z| \leqslant \alpha, 0 < \alpha < \pi$?

6) (*desenvolvimento assimptótico*)

a) Considere $f(z) = \log z\, \mathrm{e}^{\frac{1}{z}\log z}$, para $|z| >> 1$. Mostre que

$$f(z) = z + (\log z)^2 + \frac{(\log z)^4}{2z} + o\left(\frac{(\log z)^3}{z^2}\right) \qquad |z| \to \infty$$

b) Obtenha o desenvolvimento assimptótico de $f(z) = z - z^{1/5}\left(1 - z^{-4/5}\right)^{2/5}$, quando $|z| \to \infty$.

c) Idem para $f(z) = \mathrm{e}^{\log z + \log(\log z + \log\log z)}$, quando $|z| \to \infty$.

d) A *fórmula de Stirling* dá o comportamento assimptótico da função Gamma:

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2}\, \mathrm{e}^{-z}, \qquad \text{quando } |z| \to \infty$$

para os valores z no setor $|\arg z| \leqslant \pi - \delta$, onde $\delta > 0$. Ou seja

$$\lim_{\substack{|z|\to\infty \\ |\arg z| \leqslant \pi - \delta}} \frac{\Gamma(z)}{\sqrt{2\pi}\, z^{z-1/2}\, \mathrm{e}^{-z}} = 1$$

i) Mostre que

$$n! = \sqrt{2\pi}\, n^{n+1/2}\, \mathrm{e}^{-n+a_n}$$

onde $a_n \to 0$, quando $n \to \infty$.

e) A fórmula de Euler- Gauss diz que

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{(n-1)!\, n^z}{z(z+1)(z+2)\cdots(z+n-1)}, \qquad z \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$$

Ou seja

$$(z(z+1)\cdots(z+n) \sim \frac{n^z\, n!}{\Gamma(z)}$$

i) Deduza da fórmula de Euler- Gauss e da fórmula de Stirling que para $a > 0$ vale

$$a(a+1)\cdots(a+n) \sim \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(a)}\, n^{n+a+1/2}\, \mathrm{e}^{-n}$$

Use a relação funcional da função Gamma (veja 5)d)ii) acima) para deduzir

$$\frac{\Gamma(n+a+1)}{\Gamma(n+1)} = \frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{n!}\Gamma(a)$$

Daí

$$\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n)} \sim n^a$$

ii) Deduza do que foi estabelecido acima que fixado $k > 1$

$$\binom{kn}{n} \sim \sqrt{\frac{k}{2\pi(k-1)n}}\left(\frac{k^k}{(k-1)^{k-1}}\right)^n$$

Daí

$$\binom{2n}{n} \sim \frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}$$

PARTE E: TRANSFORMAÇÕES CONFORMES II

Transformações de Schwarz Christoffel

1) Mostre que

$$w = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{\zeta(1-\zeta^2)}}\,\mathrm{d}\zeta$$

leva o semi-plano superior injetiva e conformemente sobre o interior de um quadrado de lados $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \Gamma^2(1/4)$.

2) Mostre que

$$w = \int_0^z \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^4}}\,\mathrm{d}\zeta$$

leva o disco unitário $|z| < 1$ injetiva e conformente sobre o interior do quadrado de diagonal $\frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \cdot \Gamma^2(1/4)$.

3) Mostre que

$$w = \int_0^z \frac{1}{(1-z^n)^{2/n}}\,\mathrm{d}z$$

leva injetiva e conformemente o disco unitário sobre o polígono regular de n lados cujo comprimento dos lados é

$$\frac{1}{n}2^{1-\dfrac{4}{n}} \cdot \frac{\Gamma^2\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{n}\right)}{\Gamma\left(1-\dfrac{2}{n}\right)}$$

4) Considere a linha poligonal L formada pelo semi-eixo real negativo, pelo segmento do eixo imaginário puro ligando 0 à ia, $a > 0$, e o semi eixo paralelo ao semi-eixo real positivo ligando ia ao ∞. Considere a região ilimitada Ω cujo bordo é L contendo o ponto $2ia, \quad a > 0$. Mostre que

$$w = f(z) = \frac{2ia}{\pi}\left(\arcsin z^{1/2} + z^{1/2}(1-z)^{1/2}\right)$$

leva injetiva e conformemente o semi-plano superior sobre Ω,

levando a reta real sobre L, satisfazendo $f(0) = 0$ e $f(1) = ia$. Você poderia obter agora uma equivalência conforme explícita entre o plano complexo com um semi-eixo removido e o exterior de uma semi-faixa infinita ?

5) Descubra um mapeamento conforme do semi-plano superior e o semi-plano superior removido o eixo $\{t + ia, \quad t \leqslant 0\}, a > 0$.

BIBLIOGRAFIA

1. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variables.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
2. Anthony D. Osborne. *Complex variables and their applications.* Addison-Wesley, 1999.
3. Christian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps.* Springer, 1992.
4. Einar Hille. *Analytic function theory.* Dois volumes, Chelsea, Nova York, 1982.
5. Georges Valiron. *Théorie des functions.* Troisième edition, Masson, 1966.
6. Henri Cartan. *Teoria elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas.* Selecciones Cientificas, Madrid, 1968.

7. Jacques Rivaud. *Exercices d'Analyse.* Vuibert, Paris, 1981.

8. Jean Dieudonné. *Calcul infinitésimal.* Hermann, 1997.

9. Jean-François Pabion. *Éléments d'analyse complexe.* Edition Marketing, Paris, 1995.

10. John B. Conway. *Functions of one complex variable I.* Segunda edição Springer, 1995.

11. J. Gerretsen e G. Sansone. *Lectures on the theory of functions of complex variable.* Wolters-Noordhoff Publishing Goningen 1969 (dois volumes).

12. K. Knopp. *Elements of the theory of functions.* Dois volumes (com dois volumes de exercícios), Dover, Nova York, 1952.

13. Lars Ahlfors. *Complex analysis.* Mc Graw-Hill, 1996.

14. Norman Levinson e Raymond M. Redheffer. *Complex variables.* Holden-Day, SãoFrancisco, 1970.

15. Patrice Tauvel. *Analyse complexe.* Exercices corrigés. Dunod, 1999.

16. Peter Henrici. *Applied computational complex analysis.* Volumes 1, 2, John Wiley & Sons, 1988, 1991.

17. Rami Shakarchi. *Problems and solutions for complex analysis.* Springer, 1999.

18. Reinhold Remmert. *Theory of complex functions.* Springer, 1991 (*Readinds in Mathematics*). *Classical topics in complex function theory*, Springer, 1998.

19. R. E Greene e S. G. Krantz. *Function theory of one complex variables.* John Wiley and Sons, N. Y, 1997.

20. Sristi Chatterji. *Cours d'analyse 2, Analyse complexe.*Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Suiça, 1997.

21. Stephen D. Fisher. *Complex variables.* Second Edition. Dover Public., N. Y, 1999.

22. Steven G. Krantz. *Handbook of complex variables.* Birkäuser, Boston, 1999.

23. Walter Rudin. *Real and complex analysis.* Mc Graw-Hill,1987.

24. Wellington de Melo. *Ferramentas matemáticas em dinâmica unidimensional.* Matemática Universitária, No. 29, 75-113, 2000.

25. Zeev Nehari. *Conformal mapping*. Dover, 1952.