VCOMPLEXAS- MAIO de 2003–Lista 6

prof: Ricardo Sá Earp

PARTE A: CÁLCULO DE INTEGRAIS VIA RESÍDUOS

1) Verificar

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a + b\sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \qquad a > b > 0$$

Fazendo a substituição $t = \tan(x/2)$ encontre uma primitiva $F(x)$ para $f(x) = \dfrac{1}{a + b\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$. *Resp.*

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(\frac{a\,\tan(x/2) + b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right), \qquad -\pi < x < \pi,$$

com

$$F(\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \qquad f(-\pi) = \frac{-\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \qquad F(x + 2\pi) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

2) Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1 + x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \qquad 0 < a < 1$$

considerando a função $f(z) = \mathrm{e}^{az} \,/\, (1 + \mathrm{e}^z)$ e o o laço retangular formado pelos segmentos $[R, R + 2\pi i]$, $[R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$, $[-R + 2\pi i, -R]$ e $[-R, R]$. *Sugestão*: Faça a transformação $x = \mathrm{e}^t$ transformando a integral acima em $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Você saberia calcular usando um outro contorno ?
Nota: Observemos que

$$\Gamma(a)\Gamma(1 - a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

onde $\Gamma(z)$ é a função Gamma.

3) Verificar

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha + \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}, \qquad \alpha > 1$$

4)
$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{\alpha + \cos x}\,\mathrm{d}x = 2\alpha\pi\left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2-1}} - 1\right), \qquad \alpha > 1$$

5) Verificar
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

6) Verificar
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a+b}, \qquad a > b > 0$$

7) Verificar
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^2)^n} = \begin{cases} 2\pi\left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} (2a)^{-n}\dfrac{1\cdot 3\cdots(2n-3)}{(n-1)!} & \text{se } n = 2,3,\ldots \\ \dfrac{\pi}{\sqrt{ab}} & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

com $a > 0$ e $b > 0$.

8) Verificar
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\cos 2}{\mathrm{e}^2}$$

9) Verificar
$$\int_0^{\infty} \frac{x\sin x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4\mathrm{e}}$$

10) Verificar
$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi\mathrm{e}^{-ab}(1+ab)}{4b^3}, \qquad a > 0,\ b > 0$$

11) Estabeleça que

a)
$$\int_0^{\infty} \frac{x^\alpha}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi/4}{\sin((\alpha+1)\pi/4)} \qquad -1 < \alpha < 3$$

Sugestão: Integre $f(z) = z^\alpha(1+z^4)^{-1}$ sobre $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ onde γ_1 é o segmento real $[r, R]$ $(0 < r < R)$, γ_2 é o quarto de círculo (centrado em zero) de R à iR, γ_3 é o segmento $[iR, ir]$ e γ_4 é o quarto de cırculo (centrado em zero) de ir à r (sendo z^α a determinação principal). Se $I_j = \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z$, mostre que $I_2 \to 0$ quando $R \to \infty$ e $I_4 \to 0$ quando $r \to 0$. Além disto mostre que $I_3 = -i^{\alpha+1} I_1$. Deduza que

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi/\beta}{\sin((\alpha+1)\pi/\beta)} \qquad \beta > 0,\ -1 < \alpha < \beta - 1$$

fazendo a substituição $y = x^{\beta/4}$. Conclua que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

b) Usando um novo contorno contido num setor de ângulo $2\pi\gamma/n$ apropriado, mostre novamente que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \qquad n = 2, 3, 4, \ldots$$

c) Fazendo uma ligeira variação do método do item b) acima, conclua que se n é um inteiro e se α é um número real tal que $n > \alpha + 1 > 0$, então

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^n}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi/n}{\sin\dfrac{(\alpha+1)\pi}{n}}$$

d) Quando $n = 2p$ é par use obrigatoriamente um contorno retangular no semi-plano superior para calcular

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{1+x^{2p}}\,\mathrm{d}\,x$$

12) Verificar por dois métodos distintos que que

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \dfrac{2\pi a^n}{1-a^2} & \text{se } |a| < 1 \\ \dfrac{2\pi a^{-n}}{a^2-1} & \text{se } |a| > 1 \end{cases}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots, a \in \mathbb{R}$. *Sugestão* (método não clássico) : Observe que

$$1 - 2a\cos\theta + a^2 = (a - \mathrm{e}^{i\theta})(a - \mathrm{e}^{-i\theta})$$

e que

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{(a - \mathrm{e}^{i\theta})(a - \mathrm{e}^{-i\theta})}\,\mathrm{d}\theta = \int_{\gamma} \frac{z^n}{(a-z)(a-z^{-1})}\,\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

onde $\gamma(\theta) = \mathrm{e}^{i\theta},\ -\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. Utilizar em seguida a fórmula de Cauchy.

13) Vamos considerar agora integrais do tipo

$$\int_0^{\infty} R(x)\,\ln x\,\mathrm{d}\,x \qquad (*)$$

onde $R(x)$ é uma função racional sem pólos sobre o semi-eixo real $\{\mathbb{R}z > 0\}$, satisfazendo $\lim\limits_{x\to\infty} xR(x) = 0$.

a) Mostre que a condição logo acima garante a convergência da integral $(*)$. A idéia é integrar a função $R(z)\,(\log z)^2$, no contorno apropriado, obtendo pelo teorema dos resíduos

$$\int_0^{\infty} R(x)(\log(x))^2\,\mathrm{d}\,x - \int_0^{\infty} R(x)\,(\log(x) + 2\pi i)^2\,\mathrm{d}\,x = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\left(\mathrm{R(z)}\,(\log \mathrm{z})^2\right)$$

b) Dê uma demonstração rigorosa da equação logo acima. Mostre também que quando $R(z)$ for real, isto é, quando $z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow\ R(x)$ é real, se pode calcular simultaneamente as integrais $\int_0^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}\,x$, e $\int_0^{\infty} R(x)\,\ln x\,\mathrm{d}\,x$,

c) Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^4}\,\mathrm{d}\,x$$

d) Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{12\ln x}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}\,x = -\pi^2$$

e) Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{16\ln x}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}\,x = -\pi^2$$

14) Você pode ser inspirar nos exercícios acima para calcular as seguintes integrais

a)

$$\int_0^\infty \frac{2\sqrt{2}\ln x}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}\,x = -\pi^2$$

b)

$$\int_0^\infty \frac{-\pi\sqrt{2}}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}\,x = -\pi^2$$

15) Resuma o estudo de exercícios precedentes, verificando que

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^\lambda(1+x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2\cos\lambda\pi}{(\sin\lambda\pi)^2} \qquad 0<\lambda<1$$

integrando $f(z) = \log z/\left(z^\lambda(1+z)\right)$ ao longo do contorno apropriado, com as seguintes determinações : se $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\theta},\ 0\leqslant\theta<2\pi$,

$$\log z = \log|z| + i\theta, \qquad z^\lambda = \exp(\lambda\log z)$$

Note que esta não é a determinação principal, mas dá para $z = x > 0$ o valor $x^{a-1} = \exp\left((a-1)\log x\right)$. Seja $\ln z$ a determinação principal do logaritmo:

i) Mostre que

$$(x+i\varepsilon)^{a-1} = \exp\{(a-1)\ln(x+i\varepsilon)\}$$
$$(x-i\varepsilon)^{a-1} = \exp\{(a-1)\ln(x+i\varepsilon)+2\pi i\}$$

Conclua que

ii) $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (x+i\varepsilon)^{a-1} = x^{a-1}$, $\lim\limits_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (x-i\varepsilon)^{a-1} = x^{a-1}\,\mathrm{e}^{2\pi a i}$. Mostre que a convergência é uniforme em todo intervalo compacto $[b,c]$, $0<b<c$.

16) Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{(bx^4+2ax^2+1)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{b}}}$$

17) Mostre que a expansão de Taylor de $h(z) = \sqrt{a+\sqrt{1+z}}$, para z numa vizinhança da origem é dada por

$$h(z) = \sqrt{1+a} + \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,N(a;k-1)z^k$$

onde $N(a;k-1) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{(x^4+2ax^2+1)^k}$

18)

a) Generalize certo procedimento usado acima para calcular

$$\int_0^\infty x^{a-1}q(x)\ \mathrm{d}x, \qquad 0<\Re a<1$$

onde $q(x)$ é uma função racional que não tem pólos sobre o eixo real positivo, incluindo a origem; assumindo que o grau do denominador de q é maior que o grau do numerador. Você saberia de outro método para calcular tais integrais ?

19) Mostre que

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 \mathrm{d}x = \pi/3$$

Sugestão : Verifique a relação de Euler: $\sin^4 x = \sin(4x)/8 - 3\cos(2x)/16$. Utilize um contorno no semi-plano superior delimitando um semi-anel. Tente obter o mesmo resultado, aplicando integração por partes e usando o resultado conhecido

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi/2$$

PARTE B: TRANSFORMADA DE LAPLACE

1) Calcule as *transformadas de Laplace.*

a)

$$\mathcal{L}\left(\frac{2\cos(at) - 2\cos(bt)}{t}\right), \qquad a, b \in \mathbb{R}$$

Conclua que

$$\int_0^\infty \frac{2\cos(at) - 2\cos(bt)}{t}\,\mathrm{d}t = 2\ln(b/a)$$

b) Utilizando o desenvolvimento em série, e justificando rigorosamente a troca de ordem do somatório e da integral, e usando a fórmula de duplicação da função Gamma para calcular $\Gamma(n + 1/2)$, mostre que

$$\mathcal{L}\left(\frac{\cos(2\sqrt{at})}{\sqrt{\pi t}}\right) = \mathrm{e}^{-a/s}\ s^{-1/2}, a \in \mathbb{R}$$

Deduza que

$$\mathcal{L}\left(\frac{\sin(2\sqrt{at})}{\sqrt{\pi a}}\right) = \mathrm{e}^{-a/s}\ s^{-3/2}$$

c) Use a tabela das transformadas de Laplace “shift theorem”) para calcular a transformada da *retificação de meia onda*

$$f(t) = \begin{cases} \sin(\pi t/a), & 2na \leqslant t < (2n+1)a \\ \\ 0, & (2n+1)a \leqslant t < (2n+2)a, \quad n \geqslant 0 \end{cases}$$

Resposta: $\mathcal{L}(f) = \dfrac{\pi a}{(a^2s^2 + \pi)(1 - \mathrm{e}^{-as})}$.

d) Faça uma pesquisa e calcule as ttransformadas das seguintes funções

i) Função de onda quadrada

ii) Função unitária liga-desliga

iii) Função de onda triangular

iv) Função dente-de-serra

v) Função retificação de onda cheia de $\sin kt$

2) Calcule as transformadas de Laplace inversas das funções $F(s)$.

a)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s}{s^4 + 4s^2 + 3}\right) = \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}\cos(\sqrt{3}t)$$

Calcule

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^4+4s^2+3}\right)$$

Este último cálculo facilitaria o cálculo logo acima e vice-versa ?

b)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^4-81}\right)=\frac{1}{54}(\sinh(3t)-\sin(3t))$$

3) Use a fórmula da *transformada de Laplace inversa* e técnicas de cálculo de integrais via resíduos para calcular as transformadas inversas das seguintes funções

a)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{s^2}{(s^2+a^2)^2}\right)=\frac{t}{2}\cos(at)+\frac{1}{2a}\sin(at),\qquad a>0$$

b)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-as}}{s}\right)=u_a(t),\qquad a>0$$

c)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-s}}{(s+1)^3}\right)=\frac{1}{2}u_1(t)(t-1)^2\,\mathrm{e}^{-(t-1)}$$

Confira os dois últimos cálculos com uma tabela qualquer de transformadas.

d)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-as^{1/2}}}{s^{1/2}}\right)=I(a)$$

onde $I(a)$ satisfaz a equação diferencial $I'(a)=\dfrac{-a}{2t}I(a),\quad I(0)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$.

Diferenciando com respeito a a, (e justificando por quê isto é permitido) mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\mathrm{e}^{-as^{1/2}}\right)=\frac{a}{2t\sqrt{t\pi}}\,\mathrm{e}^{-a^2/4t}$$

Da mesma forma calcule também

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{\mathrm{e}^{-as^{1/2}}}{s}\right)=1-\int_0^a\frac{\mathrm{e}^{-u^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}\,\mathrm{d}u=1-\operatorname{erf}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)=\operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t})$$

e) Usando o resultado sobre a transformada da convolução mostre que

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{1/2}(s-a)}\right)=\frac{\mathrm{e}^{at}}{\sqrt{a}}\operatorname{erf}(\sqrt{at})$$

A partir daí calcule

i)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^{1/2}(s^{1/2}+b)}\right)$$

ii)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s^{1/2}+b)}\right)$$

iii)

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\ln(s^{1/2}+a)\right)$$

4) Vamos estudar neste exercício a *equação de de Abel* que aparece no estudo da importante *equação de Carleman* (veja ref.[16], Volume 2). Seja $g(z)$ uma função holomorfa num aberto que contém $\{\Re z \geqslant 0\}$. Asssuma que g leva os reais positivos nos reais e que $g(0)=0$. Seja $\alpha \in \mathbb{C}, \quad 0<\Re a<1$. Mostre com detalhes que a solução da equação

$$\int_0^x \frac{h(t)}{(x-t)^{\alpha}}\,\mathrm{d}t = g(x), \quad x>0$$

está dada por

$$h(x)=\frac{\sin\alpha\pi}{\pi}\int_0^x \frac{g'(t)}{(x-t)^{1-\alpha}}\,\mathrm{d}t, \quad x>0$$

PARTE C: SUPLEMENTO DE RESÍDUOS

1) Suponha que uma função meromorfa f definida numa vizinhança V de um ponto $a\in\mathbb{C}$ tenha em V um único pólo (a) de ordem n, ou seja f pode ser escrita como

$$f(z)=\frac{a_n}{(z-a)^n}+\cdots+\frac{a_1}{z-a}+g(z)$$

onde $a_j \in \mathbb{C},\ j = 1, \ldots n$ e g é holomorfa em V. Faça $\zeta = z - a$ e mostre que o resíduo de f em a é igual ao coeficiente de ζ^{n-1} da série de Taylor na origem da função holomorfa $\zeta^n f(a + \zeta)$.

a Use o que foi feito acima para calcular os resíduos da função

$$f(z) = \frac{1}{(z^n - 1)^2}$$

Resp.: $\mathrm{Res(f, a)} = -\dfrac{\mathrm{(n-1)a}}{\mathrm{n^2}},$ onde $\mathrm{a = e^{2ik\pi/n},\ k = 0 \ldots n-1}$.

b) Idem para $f(z) = 3z + 2/\left(1 - \cos(z - a)\right)$.

2) Nas condições do item 1) mostre que se $b \in V,\ b \neq a$, então tem-se que

$$\mathrm{Res}\left(\frac{\mathrm{f(z)}}{\mathrm{z - b}},\ \mathrm{a}\right) = -\sum_{1}^{\mathrm{n}} \frac{\mathrm{a_j}}{\mathrm{(b-a)^j}}$$

Sugestão: Use a fórmula $\mathrm{Res}\left(\dfrac{\mathrm{g(z)}}{\mathrm{(z - z_0)^k}}, \mathrm{z_0}\right) = \dfrac{\mathrm{g^{(k-1)}(z_0)}}{\mathrm{(k-1)!}}$ onde g é holomorfa numa vizinhança de z_0.

3)

a) Seja f uma função holomorfa num domínio que contém a origem. Suponha que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0,\ f^{(k)}(0) \neq 0$. Mostre (novamente se você já demonstrou anteriormente) que para valores "pequenos"de w a equação $f(z) = w$ tem exatamente k zeros dentro de uma "pequena"bola centrada na origem. Os zeros são distintos ? Denotando os zeros por $z_1(w), \ldots, z_k(w)$ mostre que a soma $z_1(w) + \cdots z_k(w)$ pode ser representada numa forma integral que é simples. Mostre o mesmo para qualquer soma de uma potência inteira positiva dos zeros.

b) Conclua do item anterior o seguinte resultado: Se $f(z)$ é holomorfa no disco aberto $|z| < R$ e vale que $f(0) = f'(0) = \cdots = f^{(k-1)}(0) = 0,\ f^{(k)}(0) \neq 0$, então para valores pequenos de $|w|$ a equação $f(z) = w$ tem k zeros $z_1(w), \ldots, z_k(w)$ que tendem a zero com w. Estes zeros também satisfazem uma equação algébrica de grau k

$$z^k + g_1(w)z^{k-1} + \cdots + g^k(w) = 0$$

onde os coeficientes são funções holomorfas de w que tendem a zero com w.

4) Enuncie e demonstre o teorema das funções implícitas ($F(z,w)=0$).

5) Sejam $\mathcal{C}_1 = \{|z| > 1\}$ e $\mathcal{C}_2 = \{0 < |z| < 1\}$. Calcule os desenvolvimentos de Laurent tanto em $\mathcal{C}_1$ quanto em $\mathcal{C}_2$ da seguinte função :

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\,\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$$

PARTE D: SUPLEMENTO DE FUNÇÕES MEROMORFAS

1) (*Revisões de definições básicas*)
   a) Defina função meromorfa, convergência uniforme e convergência normal de uma série Σf_ν de funções meromorfas.
   b) Enuncie um teorema de convergência para séries de funções meromorfas. Idem para as séries das derivadas.

2) Mostre que as quatro séries

$$\sum_1^\infty \left(\frac{1}{z+\nu} - \frac{1}{\nu}\right),\ \sum_1^\infty \left(\frac{1}{z-\nu} + \frac{1}{\nu}\right)$$
$$\sum_0^\infty \left(\frac{1}{z+\nu}\right)^k \text{ e } \sum_0^\infty \left(\frac{1}{z-\nu}\right)^k$$

para $k \geqslant 2$ são normalmente convergentes em compactos de $\mathbb{C}$ à funções meromorfas. Conclua que a série $\displaystyle\sum_1^\infty \frac{2z}{z^2-\nu^2}$ é também normalmente convergente em compactos de $\mathbb{C}$.

3) Considere a série

$$\sum_{-\infty<n<+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

   a) Mostre que a série converge normalmente em compactos do plano complexo.
   b) Mostre que a função $f(z)$ dada pela série é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ com período 1.
   c) Mostre que

$$f(z) = \left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2$$

Sugestão: Mostre que a função $g(z)$ definida pelo lado direito da igualdade acima é meromorfa em $\mathbb{C}$, possui período 1, tem pólos duplos nos pontos $z = n,\ n \in \mathbb{Z}$ e $g(z)$ tende a zero quando $|y| \to \infty$, uniformemente com respeito a x.

d) Mostre que

$$\left(\frac{\pi}{\sin \pi z}\right)^2 - \frac{1}{z^2} = \sum_{n \neq 0} \frac{1}{(z-n)^2}$$

Conclua a relação de Euler

i)

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

e) Mostre que

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\right) = \frac{\pi}{\tan \pi z}$$

Conclua

i)

$$\frac{1}{z} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{2z}{z^2 - n^2} = \frac{\pi}{\tan \pi z}$$

PARTE E: PRODUTOS INFINITOS

Diz-se que um produto infinito

$$\prod_{j=1}^{\infty} (1 + a_j)$$

é *convergente* se

$*$) apenas um número finito $a_{j_1}, \ldots, a_{j_k}$ dos a_j's são iguais a 1

$**$) se $N_0 > 0$ é suficientemente grande tal que $a_j \neq 0$ para $j > N_0$, então

$$\lim_{n \to \infty} \prod_{j=N_0+1}^{N} (1 + a_j)$$

existe e é não nulo.

Quando $\prod_{j=1}^{\infty}(1+a_j)$ converge, fica definido o seu *valor* por

$$\left(\prod_{j=1}^{N_0}(1+a_j)\right)\cdot\lim_{n\to\infty}\prod_{N_0+1}^{N}(1+a_j)\cdot$$

Nota: Se $\prod_{j=1}^{\infty}(1+a_j)$ converge, então é possível mostrar que $\lim\limits_{\substack{M\to\infty\\ N\to\infty}}\prod_{j=N}^{M}(1+a_j)$ existe e é igual a 1.

1) Mostre que se $a_j\in\mathbb{C}$, $|a_j|<1$, então o produto parcial P_N para $\prod_{j=1}^{\infty}(1+|a_j|)$ satisfaz

$$\exp\left(\frac{1}{2}\sum_{1}^{N}|a_j|\right)\leqslant P_N\leqslant\exp\left(\sum_{1}^{N}|a_j|\right)\cdot$$

Sugestão : Use o fato que $1+x\leqslant e^x\leqslant 1+2x$, para $0\leqslant x\leqslant 1$. Conclua

a) Se $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|<\infty$ então

$$\prod_{j=1}^{\infty}(1+|a_j|)$$

converge.

b) Se $\prod_{j=1}^{\infty}(1+|a_j|)$ converge, então

$$\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|$$

converge. Nota Se $\prod_{j=1}^{\infty}(1+|a_j|)$ converge, então $\prod_{j=1}^{\infty}(1+a_j)$ converge.

Conseqüentemente, se $\sum_{j=1}^{\infty}|a_j|<\infty$ então $\prod_{j=1}^{\infty}(1+a_j)$ converge.

Nota: Vale o seguinte teorema: *Seja U um aberto do plano complexo. Suponha que existam funções holomorfas $f_j : U\to\mathbb{C}$ tal que $\sum_{j=1}^{\infty}|f_j|$ converge uniformemente em compactos de U. Então a seqüência de somas parciais*

$$F_N=\prod_{j=1}^{N}(1+f_j(z))$$

converge uniformemente em compactos. Em particular, o limite dos produtos parciais determinam uma função holomorfa F em U. A função F se anula num ponto $z_0 \in U$, sse $f_j(z_0) = -1$ para algum j. A multiplicidade de um zero em z_0 é iguala soma das multiplicidades dos zeros das funções $1 + f_j$ em z_0.

Os *fatores elementares de Weierstrass* são definidos como segue

$$E_0(z) = 1 - z$$

e para $p \geqslant 1,\ p \in \mathbb{N}$ seja

$$E_p(z) = (1-z)\exp\left(z + \frac{z^2}{2} + \cdots + \frac{z^p}{p}\right)$$

c) Mostre que, se $|z| \leqslant 1$, então

$$|1 - E_p(z)| \leqslant |z|^{p+1}$$

Sugestão : Suponha que $p \geqslant 1$. Mostre que escrevendo, $E_p = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} b_n z^n$, tem-se que $b_1 = b_2 = \cdots b_p = 0$ e $b_n \leqslant 0$ para $n > p$. Em seguida mostre que $\sum_{n=p+1}^{\infty} |b_n| = 1$.

d) Mostre o seguinte teorema: *Seja $\{a_j\}$ uma seqüência de números complexos não nulos sem ponto de acumulação em $\mathbb{C}$. Seja $\{p_j\}$ inteiros positivos satisfazendo*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|}\right)^{p_n+1} < \infty$$

para cada $r > 0$. Então o produto infinito

$$\prod_{n=1}^{\infty} E_{p_n}\left(\frac{z}{a_n}\right)$$

converge uniformemente em compactos de $\mathbb{C}$ à uma função inteira F. Os zeros de F são precisamente os pontos a_j, contados com multiplicidades.

Sugestão : Fixe $r > 0$. Use a estimativa anterior no disco fechado de raio r convenientemente.

Conclua:

i) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência qualquer no plano complexo sem pontos de acumulação em $\mathbb{C}$. Mostre que existe uma função inteira f cujos zeros são precisamente os pontos a_j, contados com multiplicidades.

ii) (*Teorema de fatoração de Weierstrass*) Seja f uma função inteira. Suponha que f se anula em 0 com ordem m, $m \geqslant 0$. Seja $\{a_n\}$ a seqüência de zeros (diferentes de 0) listadas com multiplicidades. Então existe uma função inteira g tal que

$$f(z) = z^m \cdot \mathrm{e}^{g(z)} \prod_{n=1}^{\infty} E_{n-1}\Big(\frac{z}{a_n}\Big).$$

Nota: O teorema demonstrado no item i) vale não tão somente para o plano complexo, mas também para *qualquer* aberto $U \subset \mathbb{C}$ e qualquer seqüência $\{a_n\}$ sem pontos de acumulação em U (*Teorema de Weierstrass*). Veja as refs 6, 18.

Use o teorema de Weiestrass mencionado logo acima para demonstrar o seguinte resultado

e) Seja U um aberto do plano complexo. Seja $f(z)$ uma função meromorfa em U. Mostre que existem funções holomorfas h, g em U tal que

$$f(z) = \frac{h(z)}{g(z)}$$

Nota: Dado um aberto $U \underset{\neq}{\subset} \mathbb{C}$, existe um conjunto enumerável $\mathcal{A}$ em U tal que

(∗) $\mathcal{A}$ não tem acumulação em U.

(∗∗) Cada ponto $p \in \partial U$ é um ponto de acumulação de $\mathcal{A}$.

Use isto para demonstrar o seguinte:

f) Dado um aberto U do plano complexo, $U \neq \mathbb{C}$ existe uma função holomorfa em U tal que nenhum ponto $p \in \partial U$ é um ponto regular de f, i. e dado $p \in \partial U$ não existe uma vizinhança $\mathcal{V}_p$ de p e uma função holomorfa g definida em $\mathcal{V}_p$ coincidindo com f em $U \cap \mathcal{V}_p$. Dizemos que neste caso U é uma fronteira natural para f.

2) Verificar a convergência dos produtos infinitos abaixo, estabelecendo os valores dos respectivos produtos no caso de convergência.

a) $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\left(1-\frac{1}{n^2}\right)=\frac{1}{2}$

b) $\displaystyle\prod_{n=2}^{\infty}\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{2}{3}$. *Sugestão* : Observe que

$$\frac{n^3-1}{n^3+1}=\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)(n^2-n+1)} \qquad \text{e} \ \ (n+1)^2-(n+1)+1=n^2+n+1$$

c) $\displaystyle\prod_{0}^{\infty}(1+z^{2^n})=\frac{1}{1-z}$ se $|z|<1$. *Sugestão* Usar a identidade

$$(1-z)(1+z)(1+z^2)\cdots(1+z^{2^N})=1-z^{2^N+1}$$

d) Mostre que se $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}|z_n|^2<\infty,\ z_n\in\mathbb{C},\ n\geqslant 1$, então $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\cos z_n$ é convergente. *Sugestão* : Mostre que $|\cos z-1|\leqslant|z|^2$ para z suficientemente pequeno. Aplique este resultado para mostrar que

i) $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{z}{2^n}\right)$ é convergente e igual à $\dfrac{\sin z}{z}$, $z\in\mathbb{C}$. *Sugestão* : Mostre por recurrência que

$$\frac{\sin z}{z}=\cos\left(\frac{z}{2}\right)\frac{\sin(z/2)}{z/2}=\cdots=\prod_{n=1}^{N}\cos\left(\frac{z}{2^n}\right)\frac{\sin z2^{-N}}{z2^{-}N}$$

Colocando $z=\pi/2$ na fórmula acima obtenha

$$\frac{2}{\pi}=\prod_{n=1}^{\infty}\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right):=\prod_{n=1}^{\infty}a_n, \qquad a_1=\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad a_n=\sqrt{\frac{1}{2}(1+a_{n-1})},\ n\geqslant 2$$

A fórmula acima foi obtida por Viète em 1570 e pode ser re-escrita como

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2}}}\cdot\frac{2}{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}\cdots$$

e) Mostre que se $\{z_n\}$ é uma seqüência de números complexos tal que $\displaystyle\sum_n z_n,\ \sum_n|z_n|^2$ são séries convergentes, então o produto $\displaystyle\prod_n(1+z_n)$

converge. *Sugestão* : Mostre que $\log(1+z) = z + \epsilon(z)z^2$, onde $|\epsilon(z)| < 1$ se $|z| < \delta$, $\delta > 0$, apropriado. Em seguida mostre um resultado que diz que se a série $\sum_n \log(1+z_n)$ converge então o produto $\prod_n (1+z_n)$ converge (veja Ahlfors ref. 13)

f) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais tais que $\sum_n a_n$ é uma série convergente; então mostre que o produto $\prod_n (1+a_n)$ é convergente se $\sum_n a_n^2 < \infty$ e é divergente se $\sum_n a_n^2 = \infty$. *Sugestão* : Seguir o modelo anterior, considerando que para $x \in \mathbb{R}$, $x - \log(1+x) = \epsilon(x)x^2$, com $1/4 < \epsilon(x) < 1$ se $|x| < \delta$ para $\delta > 0$ conveniente. Aplique este resultado para mostrar que $(1-1/2)(1+1/3)(1-1/4)\cdots$ é convergente e calcule o produto mostrando que é igual à $1/2$. Mostre também que o produto $(1-1/\sqrt{2})(1+1/\sqrt{3})(1-1/\sqrt{4})\cdots$ é divergente e que diverge à zero.

3) Mostre que

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right)$$

Sugestão : Mostre primeiramente que o produto em questão converge uniformemente em compactos de $\mathbb{C}$ e representa uma função inteira. Aplique em seguida o exercício 3) e)i) da Parte C e use derivação logarítmica mostrando que o produto $f(z)$ à esquerda da igualdade acima é $f(z) = c \sin \pi z$. Ato contínuo calcule o limite $\lim_{z\to 0}(f(z)/z)$ em 0 mostrando que $c = 1$.

4) Mostre que

$$\frac{\sin z}{\sin \pi z} = \frac{2}{\pi}\sum_{n+1}^{\infty}(-1)^n \frac{n \sin n}{z^2 - n^2}$$

Conclua que

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin n}{n} = \frac{1}{2}$$

A fórmula acima pode ser recuperada via a teoria das séries de Fourier. De fato, Dada $f(x) = \sin x$, $-\pi < x \leqslant \pi$ estenda esta função a todo $\mathbb{R}$ por periodicidade (período 2π). A série de Fourier converge para f para $0 \leqslant x <$

π. Logo, temos

$$x = 2\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{\sin nx}{n}, \qquad \text{para } \ 0 \leqslant x < \pi\cdot$$

e o resultado segue da equação acima fazendo $x = 1$.

5) Represente a função $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$, como um produto infinito (*produto canônico de Weierstrass*).

PARTE F: FÓRMULA DE POISSON-JENSEN E PRODUTOS DE BLASCHKE

1) (*Fórmula de Poisson-Jensen*) Seja $f(z)$ uma função meromorfa no disco fechado $|z| \leqslant R$ $(0 < R < \infty)$; ou seja f é meromorfa num aberto de $\mathbb{C}$ que contém este disco fechado. Sejam a_μ $(\mu = 1, \ldots, M)$ os zeros de f e b_ν $(\nu = 1, \ldots, N)$ os pólos de f em $|z| < R$, contados com multiplicidades. Mostre que se $z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$ $(0 \leqslant r < R)$, e se $f(z) \neq 0, \infty$, então tem-se que

$$\log|f(z)| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(R\,\mathrm{e}^{i\varphi})|\;\frac{R^2 - r^2}{R^2 - 2rR\cos(\theta-\varphi) + r^2}\,\mathrm{d}\,\varphi +$$
$$+\sum_1^M \log\left|\frac{R\,(z-a_\mu)}{R^2 - \overline{a_\mu}z}\right| - \sum_1^N \log\left|\frac{R\,(z-b_\nu)}{R^2 - \overline{b_\nu}z}\right|$$

Sugestão : (1) Considere primeiramente o caso que $f(\zeta)$ é holomorfa e não tem zeros em $|\zeta| \leqslant R$. Mostre que a fórmula de Poisson-Jensen em $z = 0$ segue da fórmula de Cauchy. Para o caso geral considere uma equvalência conforme do disco aberto $|\zeta| < R$ e e o disco aberto unitário $|w| < 1$, que leva um ponto $\zeta = z$ no ponto $w = 0$.

(2) Considere o caso que $f(\zeta)$ tem um número finito de zeros e pólos em $|\zeta| = R$ e não tem outros zeros e pólos no disco aberto $|\zeta| < R$. Neste caso considere o contorno $\partial D(\delta)$, onde $D(\delta)$ é o domínio aberto obtido de $|\zeta| \leqslant R$, removendo-se um pequeno disco de raio δ centrado nos zeros e pólos de $f(\zeta)$: Mostre que se $z \in D(\delta) \subset \{|z| < R\}$, então

$$\log f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_{\partial D(\delta)} \log f(\zeta)\;\frac{R^2 - |z|^2}{(R^2 - \overline{z}\zeta)\,(\zeta - z)}\,\mathrm{d}\,\zeta$$

além disso mostre que o integrando é $O(\log 1/\delta)$ uniformemente nas indentações que são arcos de círculo de raio δ, mostrando que a contribuição da integral nas indentações vai para zero quando $\delta \to 0$.

(3) Para o caso geral considere

$$g(\zeta) = f(\zeta) \prod_{1}^{N} \frac{R(\zeta - b_\nu)}{(R^2 - \overline{b_\nu}\zeta)} \Big/ \prod_{1}^{M} \frac{R(\zeta - a_\mu)}{(R^2 - \overline{a_\mu}\zeta)}$$

Nota: A fórmula de Poisson-Jensem é crucial na teoria moderna das funções meromorfas creada por Nevanlinna (veja refs. 6, 24)).

a) Conclua a (*Fórmula de Jensen*): Seja f uma função holomorfa numa vizinhança da bola fechada $\overline{\mathcal{D}_R}$ centrada na origem de raio R. Suponha que $f(0) \neq 0$. Sejam $a_1, \ldots, a_k$ os zeros de f em $\overline{\mathcal{D}_R}$, contados com suas respectivas multiplicidades. Assuma que $|a_j| < R$, para $j = 1, 2, \ldots k$. Mostre que

$$\log |f(0)| + \sum_{j=1}^{k} \log \left| \frac{R}{a_j} \right| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| f\left(R\, e^{i\theta}\right) \right| d\theta$$

Sugestão . Se você quer deduzir diretamente a fórmula de Jensen, siga por exemplo, as seguintes sugestões : Considere o *fator de Blaschke*

$$B_a = \frac{z - a}{\overline{a}z - 1} \qquad \text{onde } 0 < |a| < 1$$

Mostre que a função

$$g(z) = \frac{f(z)}{\prod_{j=1}^{k} B_{a_j/R}} \left(\frac{z}{R}\right)$$

é holomorfa numa vizinhança de $\overline{\mathcal{D}_R}$ e *não se anula* nesta vizinhança. Mostre que $\log |g|$ satisfaz a propriedade da média numa vizinhança de $\overline{\mathcal{D}_R}$, concluindo que

$$\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log \left| g\left(R\, e^{i\theta}\right) \right| d\theta$$

Daí faça uma análise direta, para chegar ao resultado. Infira:

b) Se f é como no teorema do item a) acima, mostre que

$$\log|f(0)| < \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|\left(R\,e^{i\theta}\right)\right| d\theta$$

Agora, considere a seguinte definção : $\log^+ = \begin{cases} \log t & \text{se } t \geqslant 1 \\ 0 & \text{se } t < 1 \end{cases}$ Chama-se $\mathcal{N}$ a classe (de Nevanlinna) de funções holomorfas em $\mathcal{D}$ tal que

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi}\int_o^{2\pi} \log^+\left|f\left(r\,e^{i\theta}\right)\right| d\theta < \infty$$

Note que a classe de funções holomorfas limitadas definidas no disco unitário centrado na origem está contida em $\mathcal{N}$.

c) Seja $f \in \mathcal{N}$ uma função holomorfa em $\mathcal{N}$ não identicamente nula. Sejam Sejam $a_1, a_2, \ldots$ os zeros de f em $\mathcal{D}$ contados com suas respectivas multiplicidades. Mostre que

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|a_j|) < \infty$$

Sugestão : Como f não é identicamente nula para mostrar o resultado argumente que basta considerar o caso que $f(0) \neq 0$. Mostre que pode-se encontrar $R,\ R < 1$, com R arbitrariamente perto de 1, de modo que $|a_j| \neq R,\ j = 1, \ldots$. Aplique a fórmula de Jensen à $\overline{\mathcal{D}_R}$ e obtenha

$$\log|f(0)| + \sum_{j=1}^{n(R)} \log\left|\frac{R}{a_j}\right| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\left|f\left(R\,e^{i\theta}\right)\right| d\theta$$

onde $n(R)$ é o número de zeros de f dentro do disco $\mathcal{D}_R$. Aplique o fato que $f \in \mathcal{N}$ e uma estimativa simples para chegar ao seguinte resultado

$$\sum_{j=1}^{\infty} \log\left|\frac{1}{a_j}\right| < \infty$$

Conclua daí .

É bastante surpreendente que a recíproca "forte " do resultado anterior valha sem condições adicionais.

d) Se $\{a_j\} \subset \mathcal{D}$ (com possíveis repetições) satisfaz

$$\sum_{j=1}^{\infty}(1-|a_j|) < \infty$$

e nenhum $a_j = 0$, então existe uma função holomorfa limitada (por 1) $B(z)$ em $\mathcal{D}$ cujo conjunto de zeros é exatamente os a_j's contados com suas multiplicidades. Mais precisamente

$$B(z) = \prod_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{a_j} B_{a_j}(z)$$

onde B_{a_j} é o fator de Blaschke definido acima e o produto infinito converge uniformemente em compactos de $\mathcal{D}$. Os zeros de $B(z)$ são precisamente os a_j's contados com suas multiplicidades. *Sugestão* : Para cada $0 < R < 1$ fixado verifique que

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|1 - \frac{|a_j|}{a_j} B_{a_j}(z)\right|$$

converge uniformemente em $\overline{\mathcal{D}_R}$. Um *produto de Blaschke* é uma expressão da forma

$$BL(z) = z^m \cdot \prod_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{a_j} B_{a_j}(z)$$

O resultado anterior mostra que se $\sum_{j=1}^{\infty}(1-|a_j|) < \infty$, $BL(z)$ define uma função holomorfa em $\mathcal{D}$.

e) Mostre que de f é uma função limitada em $\mathcal{D}$, tendo um zero de ordem m em 0 ($m \geqslant 0$), e se $\{a_j\}$ são os outros zeros de f contados com suas multiplicidades, então existe uma função holomorfa limitada sem zeros F em $\mathcal{D}$, tal que f se escreve $f(z) = BL(z) \cdot F(z)$, mais precisamente

$$f(z) = z^m \cdot \left(\prod_{j=1}^{\infty} \frac{|a_j|}{a_j} B_{a_j}(z)\right) \cdot F(z)$$

Além disso,

$$\sup_{z\in\mathcal{D}} |f(z)| = \sup_{z\in\mathcal{D}} |F(z)|$$

Sugestão : Considere

$$B_N(z) = \prod_{j=1}^{N} \frac{|a_j|}{a_j} B_{a_j}(z),\ N \in \mathbb{N}^*, \qquad \text{e} \qquad F_N(z) = \frac{f(z)}{z^m \cdot B_N(z)}$$

f) Diz-se que uma função inteira tem *ordem finita* se existem números $a, r > 0$ tal que

$$(*) \qquad |f(z)| \leqslant \exp\left(|z|^a\right) \qquad |z| > r$$

Seja λ o ínfimo de todos os números a para os quais $(*)$ seja verdadeira. Tal número λ é chamado de *ordem* de f.

i) Mostre $\sin z$ tem ordem 1 e que e^{e^z} tem ordem infinita. Mostre que $\exp\big(az^n\big),\ a > 0$ tem ordem n.

ii) Seja f uma função inteira de ordem λ. Mostre que se $\epsilon > 0$ então $|f(z)| \leqslant \exp\left(|z|^{\lambda+\epsilon}\right)$ para todo z com $|z|$ suficientemente grande, e um z pode ser encontrado com $|z|$ tão grande como desejado de forma que $|f(z)| \geqslant \exp\left(|z|^{\lambda-\epsilon}\right)$.

Nota: A ordem de uma função inteira de ordem λ pode ser calculada da seguinte maneira: Seja $M(r) = \max\limits_{0\leqslant\theta<2\pi} \left|f(r\,e^{i\theta})\right|$. Então

$$\lambda = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log\log M(r)}{\log r}$$

Agora, seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números complexos não nulos. Seja $\rho = \inf\{a; \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-a}\} < \infty$. Tal número ρ é chamado de *expoente de convergência* da seqüência $\{a_n\}$. Agora suponha que f seja uma função inteira com zeros (diferentes do 0) $a_1, a_2, \dots,$ contados com suas multiplicidades e arrumados de modo $0 < |a_1| \leqslant |a_2| \leqslant \cdots$. Suponha que existe um inteiro p tal que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-(p+1)} < \infty$$

Então f é chamada de *posto finito*. Se p é o menor inteiro de maneira que a convergência ocorre diz-se que f *é de posto* p. Agora, assuma que f tenha posto p, então segue que o produto infinito $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p(\frac{z}{a_n})$, é convergente, no sentido que (veja parte D 1) d))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{|a_n|} \right)^{p+1} < \infty$$

onde $E_p(\zeta)$ é o fator elementar de Weierstrass definido no início da parte D. Tal produto infinito é chamado de *canônico*. Um fato é que se $P(z) = \prod_{n=1}^{\infty} E_p(\frac{z}{a_n})$, é um produto canônico de posto p, e se ρ é o expoente de convergência de $\{a_n\}$ então $p \leqslant \rho \leqslant p + 1$. Além disto a ordem de P é ρ, i. e $\lambda = \rho$.

iii) Mostre que a função tipo theta $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n z)$, $0 < |q| < 1$ tem ordem zero. Mostre também que o produto infinito $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n \log^2 n} \right)$ e o inverso da função gamma $\frac{1}{\Gamma(z)}$, (veja Lista 5, parte D 5)d)), são funções inteiras de ordem 1. Nota: Quando f é uma função inteira de ordem finita não nula λ, definimos o *tipo* τ de sua ordem λ como sendo

$$\tau = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log M(r)}{r^\lambda}$$

A função f é chamada de tipo *mínimo* de sua ordem se $\tau = 0$, de *tipo finito* se $0 < \tau < \infty$, de *tipo infinito* se $\tau = \infty$. As funções $\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n \log^2 n} \right)$, e^{az} e $\frac{1}{\Gamma(z)}$, têm tipo 0, a e ∞, respectivamente. Quando $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ é uma função inteira então f tem ordem finita λ, se e somente se,

$$\frac{1}{\lambda} = \liminf_{n \to \infty} \frac{-\log c_n}{n \log n}$$

iv) Mostre que a ordem da função tipo theta $\sum_{n=0}^{\infty} q^{n^2} z^n$, $0 < |q| < 1$, é zero. Calcule a ordem de $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-an} z^n,\ a > 0.$

MISCELÂNEA

1) Mostre que se f é analítica no disco aberto $\mathcal{D}_r$ dado por $|z-a| < r$ tal que $|f^{'}(z) - f^{'}(a)| < |f^{'}(a)|$, para todo z no disco $\mathcal{D}_r$, $z \neq a$, então f é univalente (injetora). *Sugestão*: Dados z_1, z_2 em $\mathcal{D}_r$, com $z_1 \neq z_2$, considere γ o segmento $[z_1, z_2]$. Pelo teorema de Cauchy:

$$|f(z_1) - f(z_2)| = \left| \int_\gamma f^{'}(z)\, \mathrm{d}z \right|$$

Agora use a desigualdade do triângulo e a hipótese do problema para concluir.

2) Seja f uma função meromorfa num domínio Ω com zeros $z_1, z_2, \ldots, z_n$ e polos $p_1, p_2, \ldots, p_m$ contados com multiplicidades. Seja g uma função analítica em Ω e γ uma curva fechada em Ω, C^1 por partes, com $\gamma \approx 0$, isto é, γ é *homóloga* a zero (ou ainda, $n(\gamma, w) = 0,\ \forall w \in \mathbb{C} \setminus \Omega$, cf. Lista 5, ex. 12). Suponha que γ não passe por nenhum dos pontos z_j ou p_j. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g \frac{f^{'}}{f} = \sum_{n=1}^{n} g(z_j)\, n(\gamma, z_j) - \sum_{i=1}^{m} g(p_i)\, n(\gamma, p_i)$$

   a) Suponha que $R > 0$ e que f seja analítica num aberto contendo o disco fechado $\bar{\mathcal{D}}_R := \{|z-a| \leqslant R\}$. Suponha que f seja univalente em $\mathcal{D}_R$. Mostre que $\Omega := f(\mathcal{D}_R)$ é um aberto. Mostre que a inversa $f^{-1}(w)$ é holomorfa em Ω; além disto, se γ é o círculo $|z-a| = R$ usando a fórmula acima mostre que a inversa é dada pela fórmula

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{z\, f^{'}(z)}{f(z) - w}\, \mathrm{d}z$$

3) Suponha que f seja uma função holomorfa num domínio Ω e que $f^{'}(z_0) \neq 0,\ z_0 \in \Omega$. Mostre que Ω contém uma vizinhança $\mathcal{V}$ de z_0 tal que
   a) f é um a um em $\mathcal{V}$

b) f admite uma inversa $h : W := f(\mathcal{V}) \to \mathcal{V}$ holomorfa, sendo W um aberto. *Sugestão* (item a)): Use o exercício Lista 4, exerc. 4) para mostrar que Ω contém uma vizinhança $\mathcal{V}$ de z_0 tal que

$$|f(z_1) - f(z_2)| \geqslant \frac{1}{2}|f^{'}(z_0)|\,|z_1 - z_2|$$

se $z_1 \in \mathcal{V}$ e $z_2 \in \mathcal{V}$. Conclua que a afirmação é verificada e que $f^{'}(z) \neq 0,\ z \in \mathcal{V}$. Você saberia dar uma outra demonstração usando o princípio do argumento ?

4) Usando o princípio do argumento, mostre que se z_0 é um zero de ordem k da equação $f(z) = a$, sendo f uma função holomorfa em uma vizinhança de z_0, então para uma vizinhança suficientemente pequena $\mathcal{V}$ de z_0 e para todo b suficientemente próximo de a, a equação $f(z) = b$ possui exatamente k soluções *simples* em $\mathcal{V}$.

5) Suponha que Ω é um domínio, f é holomorfa em Ω (não constante), $z_0 \in \Omega$, e $w_0 = f(z_0)$. Seja k a ordem do zero que a função $f - w_0$ tem em z_0. Mostre que existe uma vizinhança $\mathcal{V}$ de z_0, $\mathcal{V} \subset \Omega$ e existe φ holomorfa em $\mathcal{V}$ tal que
   a) $f(z) = w_0 + (\varphi(z))^k\,,\ \forall z \in \mathcal{V}$
   b) $\varphi^{'}$ não tem zeros em $\mathcal{V}$ e φ é uma aplicação holomorfa inversível de $\mathcal{V}$ num disco $\mathcal{D}_r$ de raio r centrado na origem. *Sugestão*: Sem perda de generalidade suponha que Ω é uma vizinhança simplesmente conexa de z_0, tomada suficientemente pequena de maneira que $f(z) \neq w_0$ se $z \in \Omega \setminus \{z_0\}$. Então conclua que

$$f(z) - w_0 = (z - z_0)^k\, g(z), \qquad z \in \Omega$$

   para algum função holomorfa g que não tem zeros em Ω. Use (se você já tiver demonstrado) o exercício Lista 5, exerc. 11), para encontrar uma função analítica h em Ω tal que $g = \mathrm{e}^{h(z)}$. Defina

$$\varphi(z) = (z - z_0)\,\exp\left(\frac{h(z)}{k}\right), \qquad z \in \Omega$$

   Conclua do item b) o seguinte:
   c) Suponha que Ω seja um domínio e que f seja uma função holomorfa e univalente em Ω. Mostre que $f^{'}(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$ e que a inversa de f é holomorfa. Mostre que a recíproca do teorema é falsa.

6) Seja $f(z)$ uma função analítica e *um a um* no disco unitário centrado na origem $\mathcal{D}$ dada por $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n,\ z \in \mathcal{D}$. Mostre que existe uma função g holomorfa e *um a um* em $\mathcal{D}$ satisfazendo, $g(0) = 0, g'(0) = 1$ e $g^2(z) = f(z^2),\ z \in \mathcal{D}$. *Sugestão*: Escreva $f(z) = z\varphi(z)$. Mostre que existe h holomorfa em $\mathcal{D}$ tal que $h(0) = 1, h^2(z) = \varphi(z)$. Coloque $g(z) = z\, h(z^2),\ z \in \mathcal{D}$.
7) (*Teorema de Hurwitz*) Seja Ω um domínio e seja f_n uma seqüência de funções holomorfas em Ω, tal que $f_n(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega, n \in \mathbb{N}$. Mostre que se f_n converge uniformemente localmente em Ω à uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$, então f é holomorfa e satisfaz ou bem $f \equiv 0$ em Ω, ou bem $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \Omega$. ßConclua do teorema de Hurwitz o seguinte teorema de *injetividade*:
8) Seja Ω um domínio de $\mathbb{C}$; suponhamos que f_n uma seqüência de funções holomorfas em Ω, tal que cada $f_n,\ n \in \mathbb{N}$ seja uma aplicação injetiva em Ω. Mostre que se f_n converge uniformemente localmente em Ω à uma função $f : \Omega \to \mathbb{C}$, então f é holomorfa e satisfaz ou bem f é constante em Ω. ou bem f é uma função injetiva em Ω.
9) Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{C}$. Suponha que $f_n : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ é contínua e holomorfa em Ω. Se $\{f_n|_{\partial\Omega}\}$ converge uniformemente em $\partial\Omega$, então mostre que $\{f_n\}$ converge uniformemente em $\bar{\Omega}$ à uma função contínua $f : \bar{\Omega} \to \mathbb{C}$ e holomorfa em Ω.

No que se segue $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$.

10) Seja $f(z) = \sum_{n \geqslant 0} c_n z^n,\ z \in \mathcal{D}$. Mostre que se $|c_1| > \sum_{n \geqslant 2} n\,|c_n|$ então f é injetiva. *Sugestão*: Mostre que para $z_1, z_2 \in \mathcal{D}$
$$|f(z_1) - f(z_2)| \geqslant \left\{|c_1| - \sum_{n \geqslant 2} n\,|c_n|\right\}$$
11) Seja f uma função holomorfa em $\mathcal{D}$ e $|f(z)| \leqslant 1,\ z \in \mathcal{D}$. Mostre que $|f'(0)| \leqslant 1$, mesmo se $f(0) = c \neq 0$. *Sugestão*: Considere a função
$$g(z) = \frac{f(z) - c}{1 - \dot{c} f(z)}$$
e estabeleça que $|f'(0)|/\left(1 - |c|^2\right) = |g'(0)| < 1$, se f não é constante.

12) Mostre que os seguintes subconjuntos não são uniformemente equivalentes:
   a) $\mathbb{C}\setminus\{0\}$ e $\mathcal{D}\setminus\{a\},\ a\in\mathcal{D}$.
   b) $\mathbb{C}\setminus\bar{\mathcal{D}}$ e $\mathbb{C}\setminus\{c\},\ c\in\mathbb{C}$.
   c) $\mathcal{D}\setminus\{0\}$ e o anel $\{0<r<|z|<R<\infty\}$.
   d) $\mathbb{C}\setminus\{c\}$ $(c\in\mathbb{C})$ e o anel $\{0<r<|z|<R<\infty\}$.

13) Investigue num livro de Variáveis complexas o *Grande teorema de Picard* (veja por exemplo no livro de Hille, segundo volume)
   a) Enuncie o grande teorema de Picard e dê aplicações .
   b) Dê exemplos de funções e de pontos $z=a$ que são limites de uma seqüência de pólos de f, com f meromorfa em uma vizinhana perfurada de a. O quê o teorema de Picard diz a respeito ?
   c) Mostre que a função $\sin\left(\cot\dfrac{1}{z}\right)$ tem um número infinito de singularidades essenciais em qualquer vizinhança da origem.

14) Considere

$$f(z)=\sum_{0}^{\infty}\frac{1}{n!}\,z^{2^n}.$$

a) Mostre que o raio de convergência da série é 1 e que $z=1$ é um ponto singular de f. Mostre que $f(z)$ e suas derivadas são contínuas no disco unitário fechado. Mostre que $\{|z|=1\}$ é a *fronteira natural* de f.

Curiosidade: É possível encontrar uma função holomorfa f fora de um conjunto de Cantor $\mathcal{C}$ de modo que $\mathcal{C}$ seja exatamente o conjunto singular de f (veja isto no livro de Hille, vol II).

15) Seja f uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ e seja $\mathcal{P}$ o conjunto dos pólos de f. Assuma que os resíduos em cada pólo de f é um inteiro. Considere o conjunto $\Omega:=\mathbb{C}\setminus\mathcal{C}$. Seja z_0 um ponto fixado de Ω. Seja $z\in\Omega$ e seja γ uma curva C^1 por partes inteiramente contida em Ω ligando z_0 z. Mostre que a função

$$g(z):=\exp\left(\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z\right)$$

está bem definida em Ω.

16) Mostre que o conjunto dos pontos onde o gradiente de uma função harmônica u definida num aberto $\mathcal{A}$ se anula é um conjunto discreto.

17) Considere a equação

$$(*) \qquad h(z) = \mathrm{e}^2\, z^n - \mathrm{e}^z, \qquad n > 0$$

a) Mostre que a ordem de cada zero de $(*)$ é 1.
b) Mostre que se $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$ então $(*)$ admite n zeros simples em $\mathcal{D}$.

18) Mostre a série de funções meromorfas

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{z-n}$$

determina um função meromorfa em $\mathbb{C}$. *Sugestão* : Use o fato que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge e some esta última à série $(*)$.

19) Considere a série

$$(*) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \frac{z^{2^n}}{1-z^{2^n}}$$

a) Seja $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$. Mostre que a série $(*)$ converge normalmente em compactos de $\mathcal{D}$.
b) Seja $\Omega = \{|z| > 1\}$. Mostre que $(*)$ define uma função holomorfa em Ω.

20) Considere $\mathbb{H}^2 = \{\Re z > 0\}$. Mostre que

$$\frac{\log z}{z} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\ln t}{t^2 + z^2}\, \mathrm{d}t$$

21) Seja $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ uma função contínua absolutamente integrável em $(0,1)$. Mostre que

$$\int_0^1 \frac{g(t)}{t-z}\, \mathrm{d}t$$

define uma função holomorfa $f(z)$ em $\mathbb{C} \setminus [0,1]$. *Sugestão* Mostre diretamente por um cálculo que $f'(z)$ é o que deve ser fazendo-se derivação sob o símbolo da integração .

21) Calcule a integral

$$\int_0^\infty \frac{-2\ln x}{\sqrt{2x}(1+x^2)}\,\mathrm{d}x$$

Resp :$\dfrac{\pi^2}{2}$. *Sugestão* : Considere semi-discos no semi-plano superior centrados na origem de grande raio R e pequeno raio r e o contorno fechado positivamente γ acrescentando segmentos no eixo-x da maneira conveniente. Considere f e g os ramos do logaritmo e da raiz quadrada em $\Omega := \mathbb{C}\setminus\{iy,\ y \leqslant 0\}$, correspondendo à $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$, e considere a função holomorfa h em Ω dada por $h(z) = \dfrac{f(z)}{g(z)(1+z^2)}$.

22) Calcule a integral:

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha \ln x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x \qquad \alpha \in (-1,1)$$

Resp :$\dfrac{\pi^2}{4\cos^2\dfrac{\pi\alpha}{2}}$. *Sugestão* : Considere semi-discos no semi-plano superior centrados na origem de grande raio R e pequeno raio r. Também considere semi-discos no semi-plano superior centrados em $z = -1$ e em $z = 1$ de pequeno raio ϵ_1 e pequeno raio ϵ_2, respectivamente. Finalmente, considere o contorno fechado positivamente orientado γ acrescentando segmentos no eixo-x da maneira conveniente. Considere f e g os ramos do logaritmo e de z^α em $\Omega := \mathbb{C} \setminus \{iy,\ y \leqslant 0\}$, correspondendo à $-\pi/2 < \arg z < 3\pi/2$, e considere a função holomorfa h em Ω dada por $h(z) = \dfrac{f(z)g(z)}{z^2-1}$.

23) Considere o anel $\Omega = \{0 < r < |z| < R\}$. Mostre que todas as aplicações $f : (r^2, R^2) \to \mathbb{R}$ de classe C^2 de forma que $f(|z|^2)$ seja harmônica em Ω são da forma $a\ln|z| + b$, onde $a, b \in \mathbb{R}$.

24) (*Problema de Dirichlet no semi-plano superior*) Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua.

a) Mostre que a solução u do Problema de Dirichlet para funções harmônicas no semi-plano superior, contínua no semi-plano superior fechado, harmônica no semi-plano superior aberto e tomando os dados contínuos f no bordo é dada por

$$u(z) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \dfrac{y}{(t-x)^2 + y^2} f(t)\,\mathrm{d}t & \text{se } \operatorname{Im} z > 0 \\ f(x) & \text{se } \operatorname{Im} z = 0 \end{cases}$$

b) Mostre que o Problema de Dirichlet para funções harmônicas no semi-plano admite uma única solução limitada. E se a condição *limitada* for retirada existe unicidade para o Problema de Dirichlet ?

25) Sejam u e v funções harmônicas definidas num domínio simplesmente $\Omega \subset \mathbb{C}$. Suponha que $\nabla u \cdot \nabla v \equiv 0$ em Ω. Mostre que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $au + iv$ seja uma função holomorfa em Ω.

26) (*Transformada de Fourier e transformada de Laplace*) Seja f uma função integrável na reta $\mathbb{R}$. Definimos a *transformada de Fourier* de f, denotada por $\widehat{f}$ por

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-2\pi it\cdot\xi}\,\mathrm{d}t$$

Se g é uma função integrável na reta $\mathbb{R}$ definimos a *inversa da transformada de Fourier* por

$$g^{\vee}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)\,\mathrm{e}^{2\pi it\cdot\xi}\,\mathrm{d}\xi$$

O fato é que sempre que as integrais acima tenham sentido, ou seja ambas f e $\widehat{f}$ sejam integráveis então as operações $\vee$ e $\widehat{\ }$ são inversas uma da outra. Então , nestas condições tem-se que $\left(\widehat{f}\,\right)^{\vee} = f$.

a) Calcule a transformada de Fourier $\widehat{f}(\xi)$ da função $\dfrac{2}{1+t^2}$. *Sugestão* : Considere a função $f(z) = \dfrac{2}{1+z^2}\,\mathrm{e}^{-2\pi it\cdot\xi}$. Para $\xi > 0$ considere o contorno formado pelo semi-círculo contido no semi-plano inferior $\{\operatorname{Im} z \leqslant 0\}$ centrado na origem e de grande raio R. Aplique o teorema dos resíduos e as técnicas básicas do cálculo de integrais via resíduos. Encontre: $\widehat{f}(\xi) = 2\pi\,\mathrm{e}^{-2\pi\xi},\ \xi > 0$. Um cálculo análogo pode ser feito para $\xi < 0$, usando agora o contorno simétrico no semi-plano superior, encontrando que $\widehat{f}(\xi) = 2\pi\, \mathrm{e}^{-2\pi|\xi|}$, $\xi \in \Re$. Observando que ambas f e $\widehat{f}$ são integráveis corrobore que $\big(\widehat{f}\,\big)^{\vee}(t) = \dfrac{2}{1+t^2}$.

b) Considere a função

$$f(t) = \begin{cases} 3\cos 2\pi t & \text{se } -7/4 \leqslant t \leqslant 7/4 \\ 0 & \text{se } t < -7/4 \text{ ou } t > 7/4 \end{cases}$$

i) Calcule a transformada de Fourier de f. *Sugestão* : Escreva $\cos 2\pi t = \big(\mathrm{e}^{2\pi t} + \mathrm{e}^{-2\pi t}\big)/2$. *Resp* : $\widehat{f}(\xi) = -\dfrac{3}{\pi}\cos\Big(\dfrac{7\pi}{2}\xi\Big)\dfrac{1}{1-\xi^2}$.

ii) Verifique a fórmula de inversão de Fourier: $\big(\widehat{f}\,\big)^{\vee} = f$. *Sugestão* Mostre primeiramente que

$$(*)\big(\widehat{f}\,\big)^{\vee}(t) = -\frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-\xi^2}\,\mathrm{e}^{i\xi((7\pi/2)+2\pi t)}\,\mathrm{d}\xi \\ -\frac{3}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1-\xi^2}\,\mathrm{e}^{i\xi((-7\pi/2)+2\pi t)}\,\mathrm{d}\xi$$

Para o cálculo da primeira integral proceda da maneira seguinte: Note que para $t \geqslant -7/4$, considerando a função meromorfa $\dfrac{3}{1-z^2}\,\mathrm{e}^{iz((7\pi/2)+2\pi t)}$, e integrando no contorno formado pelo semi-círculo contido no semi-plano superior $\{\operatorname{Im} z \geqslant 0\}$ centrado na origem e de grande raio R, não é difícil ver que a integral tende a 0 quando $R \to \infty$. Por conseguinte, considere o contorno γ positivamente orientado formado por semi-discos no semi-plano superior, o primeiro centrado na origem de grande raio R, os outros dois de pequenos raios ϵ, centrados em $x = 1$ e $x = -1$, respectivamente. Complete o ciclo positivamente orientado γ acrescentando segmentos no eixo-x da maneira conveniente. Mostre que as integrais (considerando a função meromorfa acima) ao longo dos pequenos círculos de centros $x = \pm 1$ convergem para $-\dfrac{1}{4}\,\mathrm{e}^{\pm 2\pi i t}$. Conclua que para $t \geqslant -7/4$, a primeira integral vale $-\dfrac{3}{2}\cos \pi t$. Uma mesma análise mostra que a segunda integral em $(*)$, para $t > 7/4$, considerando o mesmo contorno acima e a função $\dfrac{3}{1-z^2}\,\mathrm{e}^{iz((-7\pi/2)+2\pi t)}$, vale $\dfrac{3}{2}\cos \pi t$. Conclua que estes cálculos são coerentes com a definição de f, para $t > 7/4$. Verifique que cálculos análogos, usando o contorno simétrico no semi-plano inferior, mostram também que $\big(\widehat{f}\,\big)^{\vee}(t) = 0$, para $t < -7/4$, e que $\big(\widehat{f}\,\big)^{\vee}(t) = \cos 2\pi t$, para $-7/4 \leqslant t \leqslant 7/4$, como desejado.

c) Mostre que a definição de transformada de Fourier pode ser estendida à $\mathbb{R}^n$, pela seguinte fórmula

$$\widehat{u}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-i2\pi x\cdot y}\, u(x)\, \mathrm{d}\, x, \qquad (y \in \mathbb{R}^n)$$

para $u \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Investigue as propriedades da transformada de Fourier neste contexto.

d) A finalidade deste exercício é demonstrar algumas propriedades da *transformada de Fourier*

i) Mostre que a transformada de Fourier "mata derivadas"

$$\widehat{D^\alpha u} = (2\pi i\xi)^\alpha \widehat{u}$$

ii) Mostre que a transformada da convolução é o produto das transformadas

$$\widehat{u * v} = \widehat{u}\widehat{v}$$

onde a convolução $u * v$, está definida por

$$u * v(x) = \int u(z)v(x-z)\, \mathrm{d}\, x\, \mathrm{d}\, z$$

iii) Usando o teorema dos resíduos, ou outro método qualquer, mostre o seguinte cálculo- que é muito útil no tratamento das equações de Poisson, Calor e Schrödinger, via a transformada de Fourier.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{iax-bx^2}\, \mathrm{d}\, x = \mathrm{e}^{-a^2/4b}\left(\frac{\pi}{b}\right)^{1/2}, \qquad a, b \in \mathbb{R}, b > 0$$

e) Mostre que

$$u(x) = \frac{1}{(4\pi)^{n/2}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{e}^{-t-\dfrac{|x-y|^2}{4t}}}{t^{n/2}} f(y)\, \mathrm{d}\, y\, \mathrm{d}\, t$$

Resolve a seguinte equação de Poisson

$$-\triangle u + u = f, \qquad \text{em} \quad \mathbb{R}^n$$

onde $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$
Sugestão : Use o fato que a transf. de Fourier mata derivadas, o fato que a transformada da convolução é o produto das transformadas, e o cálculo anterior para chegar à solução desejada.

f) Mostre que a solução fundamental da equação do Calor

$$\begin{cases} u_t - \triangle u = 0 & \text{em } \mathbb{R}^n \times (0,\infty) \\ u = g & \text{em } \mathbb{R}^n \times \{t = 0\} \end{cases}$$

é

$$u(x,t) = \frac{1}{(4\pi t)^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \mathrm{e}^{-\dfrac{|x-y|^2}{4t}} g(y)\,\mathrm{d}\,y$$

Sugestão : Aplique a transformada de Fourier somente na variável x, transformando a equação acima numa equação diferencial linear homogênea na variá vel t, com condição inicial em $t = 0$. Resolva esta equação e ache u de uma maneira parecida com o que você fez no item anterior.

Agora vamos considerar funções seccionalmente contínuas $f(t)$, definidas num semi-eixo $[b,\infty)$, $b > 0$, de *crescimento exponencial*, i.e $|f(t)| \leqslant K\,\mathrm{e}^{at}, a, K \in \Re, K > 0$, t suficientemente grande.
A *transformada de Laplace* está definida por

$$F(s) = \mathcal{L}(f) := \int\limits_0^\infty f(t)\,\mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}\,t, \qquad (s > a)$$

i) Mostre que $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) \Rightarrow f = g$.

ii) Mostre que

$$\frac{\mathrm{d}^{(n)}}{\mathrm{d}s}(F(s)) = \mathcal{L}\left((-t)^n f(t)\right)$$

iii) Supondo que $f, \ldots, f^{(n-1)}, f^{(n)}$ sejam seccionalmente contínuas com crescimento exponencial, e $f, \ldots, f^{(n-1)}$, sejam contínuas, mostre que a transformada de Laplace também " mata derivadas".

$$\mathcal{F}\left(f^{(n)}\right) = s^n \mathcal{F}(f) - s^{n-1} f(0) - \cdots - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0)$$

iv) Calcule a transformada de Laplace de algumas funções fundamentais e consulte uma tabela para completá-las. Por exemplo: $f(t) \equiv 1, f(t) = \mathrm{e}^{at}, f(t) = t^n, f(t) = \sin at, f(t) = \cos at, \ldots$

v) Considere a equação de Bessel de ordem zero

$$zu''(z) + u'(z) + zu(z) = 0$$

Resolva a equação de Bessel acima usando a transformada de Laplace, transformando a equação diferencial de segunda ordem, numa equação algébrica, mostrando que

$$\mathcal{L}(u)(s) = \frac{c}{(1+s^2)^{1/2}}, \qquad \text{onde} \quad c \quad \text{é uma constante}$$

Em seguida usando a tabela que você construiu e o conhecimento da série binomial, mostre que

$$u(z) = C \sum \frac{(-1)^n\, z^{2n}}{2^n\, (n!)^2}$$

27) (*Equações singulares regulares de segunda ordem*)

Vamos fazer uma incursão na teoria das equações diferenciais complexas lineares de segunda ordem *singulares regulares*. Vamos considerar uma equação da forma

$$w''(z) + a(z)w'(z) + b(z)w(z) = 0 \qquad (*)$$

onde $a(z), b(z)$ são funções holomorfas num disco perfurado $0 < |z - z_0| < r$. Se pelo menos uma das funções $a(z), b(z)$, não é holomorfa numa vizinhança de z_0, dizemos que z_0 é um *ponto singular* de $(*)$. Caso contrário, dizemos que z_0 é um ponto regular. Neste caso, o teoria geral de sistemas holomorfos pode ser aplicada para garantir a existência de duas soluções holomorfas linearmente independentes $w_1(z)$ e $w_2(z)$ que geram o espaço de soluções de $(*)$. Uma demonstração usando a teoria de *séries majorantes* pode ser encontrada na ref. 11). Vamos nos interessar doravante no caso singular.

Caso z_0 não seja um ponto regular e $a(z)$ tenha no máximo um pólo de primeira ordem (em z_0) e $b(z)$ tenha no máximo um pólo de segunda ordem, dizemos que z_0 é um *ponto singular regular*. Um ponto singular que não é um ponto singular regular é chamado de *ponto irregular*.

A definição para $z = \infty$ é feita de maneira análoga fazendo a substituição $\zeta = \dfrac{1}{z}$. Com efeito: O resultado desta mudança de variáveis é a seguinte equação

$$\frac{\mathrm{d}^2 v(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta^2} + \frac{\mathrm{d}v(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta}\left(\frac{2}{\zeta} - \frac{1}{\zeta^2}\, a\left(\frac{1}{\zeta}\right)\right) + \frac{1}{\zeta^4}\, b\left(\frac{1}{\zeta}\right) v(\zeta) = 0 \qquad (**)$$

onde $v(\zeta) := w(1/z)$. O ponto $z = \infty$ é chamado de regular ou singular regular consoante que o ponto $\zeta = 0$ é um ponto regular ou singular regular para a equação $(**)$.

a) Sejam $a(z)$ e $b(z)$ funções holomorfas para $|z| > r$. Mostre que o ponto $z = \infty$ é um ponto singular regular de $(*)$, se e somente se $a(z)$ tem um zero e $b(z)$ tem um zero múltiplo em $z = \infty$ (ou equivalentemente, $za(z)$ e $z^2a(z)$ tem limites finitos em $z = \infty$). Em particular, conclua que o ponto é regular, se e somente se o coeficiente a_{-1} da série de Laurent de $a(z)$ em $|z| > r$ é $a_{-1} = 2$, e os coeficientes b_{-2}, b_{-3} da série de Laurent de $b(z)$ são nulos.

Suponha que $z = 0$ é um ponto singular da equação $(*)$ e considere os desenvolvimentos de Laurent em $z = 0$

$$a(z) = \frac{1}{z}\sum_0^\infty a_k z^k, \qquad b(z) = \frac{1}{z^2}\sum_0^\infty b_k z^k, \qquad 0 < |z| < \epsilon$$

Considere a chamada *equação indicial*

$$\rho(\rho - 1) + a_0\rho + b_0 = 0 \qquad (I)$$

b) Sabendo que $z = 0$ é uma singularidade regular da equação $(*)$ mostre que sempre existe uma solução $u(z)$ de $(*)$ da forma (*método de Frobenius*)

$$u(z) = z^r\left(1 + \sum_{n=1}^\infty \alpha_n(r) z^n\right)$$

onde r é uma raíz da equação indicial (I), e os coeficientes $\alpha_n(r)$ são obtidos por uma certa relação de recorrência que você deve explicitar; sendo a série a esquerda da igualdade acima convergente numa vizinhança da origem.

Sejam r_1 e r_2 as raízes da equação indicial, com $\Re r_1 \geqslant \Re r_2$.

c) Mostre que quando $r_1 - r_2$ *não é um inteiro* podemos encontrar uma soluções $u_1(z)$ e $u_2(z)$ linearmente independentes de $(*)$ pelo método do item b).

d) Mostre que quando as raízes da equação indicial são iguais a $r = r_1$, obtemos uma segunda solução $v(z)$ independente da solução $u(z)$ encontrada no item b) pela fórmula

$$v(z) = u(z)\log z + z^{r_1}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\alpha_n(r_1)}{\mathrm{d}r} z^n\right)$$

onde os coeficientes α_n são obtidos no item b) e a série a esquerda da igualdade converge numa vizinhança da origem.

Sugestão : Olhe como é feita a demonstração da obtenção das soluções fundamentais da Equação de Euler : $z^2w'' + azw' + bw = 0, a, b \in \mathbb{C}$, no caso que as raízes são iguais.

e) Considere o caso que $r_1 - r_2 = N > 0$, é um inteiro. Mostre que uma segunda solução $v(z)$ independente de $u(z)$ pode ser obtida pela fórmula

$$v(z) = cu(z)\log z + z^{r_2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left((r - r_2)\alpha_n(r)\right)\Big|_{r=r_2} z^n$$

onde $c = \lim\limits_{r\to r_2}(r - r_2)a_N(r)$.

e) Considere a equação de Bessel de *ordem* α

$$z^2w''(z) + zw'(z) + (z^2 - \alpha^2)w(z) = 0$$

onde $\alpha \in \mathbb{C}$ é uma constante com $\Re\alpha \geqslant 0$.

i) Mostre que $z = 0$ é um ponto singular regular e $z = \infty$ é um ponto irregular para a equação de Bessel.

ii) Mostre que as raízes da equação indicial são $\rho = \alpha$ e $\rho = -\alpha$.

Considere as funções de Bessel

$$J_\alpha(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\Gamma(n + \alpha + 1)}\left(\frac{z}{2}\right)^{2n+\alpha}$$

onde Γ é a função Gamma. Para $\alpha \neq -1, -2, \ldots$, são chamadas *funções de Bessel de primeiro tipo e índice n (quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$).*

Considere as funções de Bessel

$$Y_n(z) = -\frac{2}{\pi} \log \frac{z}{2} J_n(z) - \frac{1}{\pi} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{(-1)^m (n-1)!}{m! \, (1-n) \cdots (1-n+m-1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2m-n}$$

para $n = 0, 1, 2, \ldots$, são chamadas de *funções de Bessel de segundo tipo e índice n* .

iii) Mostre que quando α não é um inteiro tem-se que $J_\alpha(z)$ e $J_{-\alpha}(z)$ são soluções linearmente independentes da equação de Bessel.

iv) Mostre que quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, um par de soluções independentes é dado por $J_n(z)$ e $Y_n(z)$.

iv) Encontre as soluções explícitas da equação de Bessel de ordem zero, mostrando que $J_0(z)$ é inteira e estude o comportamento da solução geral quando $z \to 0$.

v) Estude a equação de Bessel de ordem meio e mostre explícitamente que a segunda solução *não possui termo logarítmico* embora a diferença das raízes seja um inteiro.

vi) Encontre as soluções explícitas da equação de Bessel de ordem um, mostrando que $J_1(z)$ é inteira e estude o comportamento da solução geral quando $z \to 0$.

vii) Exercício-pesquisa: Mostre que as funções de Bessel $J_n(z)$ tem um número infinito de zeros na semi-reta real positiva. Mostre também que as funções de Bessel $Y_n(z)$ são ilimitadas na origem.

Dizemos que a equação $(*)$ é *Fuchsiana*, se esta possui um número finito de singularidades em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, sendo todas as singularidades regulares.

e) Considere a equação de Legendre

$$(z^2 - 1)w''(z) + 2zw'(z) - \alpha(\alpha + 1)w(z) = 0, \qquad \alpha \in \mathbb{C}$$

i) Mostre que a equação de Legendre é Fuchsiana.

ii) Mostre que quando $\alpha = n \in \mathbb{N}$, existe um polinômio $P_n(z)$ que é solução da equação de Legendre. Mostre que $P_n(1) = 1$, $P_n(-z) =$

$(-1)^n P_n(z)$. Além disso, mostre a *fórmula de Rodrigues*

$$P_n(z) = \frac{1}{n!2^n}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\, z^n}(z^2-1)^n$$

calculando $P_0(z), P_1(z), P_2(z), P_3(z)$.

f) Estude a *série hipergeométrica*

$$z(1-z)w''(z) + (\gamma - (\alpha+\beta+1)z)\, w'(z) - \alpha\beta w(z) = 0$$

Nota: A teoria das equações singulares regulares de segunda ordem, aparece em várias áreas da Matemática Pura e Aplicada:

- Teoria das Transformações Conformes. A série hipergeométrica aparece na construção de uma transformação conforme explícita do disco unitário aberto $|z| < 1$ sobre o interior de um triângulo geodésico $\triangle$ no disco hiperbólico.
- Na Análise Harmônica (análise de Fourier, séries de Fourier-Bessel, problemas de Sturm-Liouville singular).
- na Física Matemática e Mecânica (eq. da membrana oscilante, temperatura de um cilindro longo).
- Equações Diferenciais Parciais (problemas de Dirichlet em regiões esféricas)
- Teoria das superfícies de curvatura média 1 no espaço hiperbólico (que são "primas " das mínimas de $\mathbb{R}^3$).

g) Faça o exercício 4) da parte C da lista 2.

BIBLIOGRAFIA

1. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variables.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.

2. A. D.Wunsch. *Complex variables with applications.* Segunda edição, Addison-Wesley, 1994.

3. Anthony D. Osborne. *Complex variables and their applications.* Addison Wesley, 1999.

4. C. H. Edwards, Jr & David E. Penny. *Equações diferenciais elementares.* Terceira edição, Prentice-Hall do brasil, 1995.

5. Christian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps.* Springer, 1992.

6. Einar Hille. *Analytic function theory.* Dois volumes, Chelsea, Nova York, 1982.

7. Georges Valiron. *Théorie des functions.* Troisième edition, Masson, 1966.

8. Henri Cartan. *Teoria elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas.* Selecciones Cientificas, Madrid, 1968.

9. Jean-François Pabion. *Éléments d'analyse complexe.* Edition Marketing, Paris, 1995.

10. John B. Conway. *Functions of one complex variable I.* Segunda edição Springer, 1995.

11. J. Gerretsen e G. Sansone. *Lectures on the theory of functions of complex variable.* Wolters-Noordhoff Publishing Goningen 1969 (dois volumes).

12. K. Knopp.*Elements of the theory of functions.* Dois volumes (com dois volumes de exercícios), Dover, Nova York, 1952.

13. Lars Ahlfors. *Complex analysis.* Mc Graw-Hill, 1996.

14. Norman Levinson e Raymond M. Redheffer. *Complex variables.* Holden-Day, SãoFrancisco, 1970.

15. Patrice Tauvel. *Analyse complexe.* Exercices corrigés. Dunod, 1999.

16. Peter Henrici. *Applied computational complex analysis.* Volumes 2,3 John Wiley & Sons, 1991 e 1993.

17. Rami Shakarchi. *Problems and solutions for complex analysis.* Springer, 1999.

18. Reinhold Remmert. *Theory of complex functions.* Springer, 1991 (*Readinds in Mathematics*).

19. R. E Greene e S. G. Krantz. *Function theory of one complex variables.* John Wiley and Sons, N. Y, 1997.

20. Sristi Chatterji. *Cours d'analyse 2, Analyse complexe.*Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Suiça, 1997.

21. Stephen D. Fisher. *Complex variables.* Second Edition. Dover Public,N. Y, 1999.

22. Steven G. Krantz. *Handbook of complex variables.* Birkäuser, Boston, 1999.

23. Walter Rudin. *Real and complex analysis.* Mc Graw-Hill,1987.

24. W. K. Hayman. *Meromorphic functions.* Oxford University Press, 1975.

25. William E. Boyce & Richard C. DiPrima. *Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.* Quinta edição, Editora Guanabara Koogan, 1994.