

VCOMPLEXAS-2001.2–Lista 7

prof: Ricardo Sá Earp

SÍNTESE DE FUNÇÕES MEROMORFAS

Suplemento de séries

- 1) (*Lema da soma parcial de Abel*): Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}$ duas seqüências de números complexos, $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Coloquemos $A_n = a_0 + \dots + a_n, n \geq 0$; então para $n \geq 0, k \geq 1$, temos que

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} a_j b_j = \sum_{j=n+1}^{n+k-1} A_j (b_j - b_{j+1}) - A_n b_{n+1} + A_{n+k} b_{n+k}$$

Deduza: $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge se $\sum_{n \geq 0} A_n (b_n - b_{n+1})$ converge e $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n b_n$ existe.

- a) (*Critério de Abel*) Da fórmula de Abel deduza que se $\sum_{n \geq 0} a_n$ é convergente e se $\{b_n\}$ é uma seqüência monótona limitada; então $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.
- b) (*Critério de Dirichlet*) Mostre que se a seqüência das somas parciais $\{A_n\}$ de $\sum_n a_n$ é limitada e se a seqüência $\{b_n\}$ é uma seqüência real monótona tendendo a zero, então $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

Daí deduza o critério de Leibniz: Seja $\{\alpha_n\}$ uma seqüência monótona de números reais tendendo a zero, então $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha_n$ converge. Dê exemplos de séries convergentes, mas não absolutamente convergentes.

Também deduza o seguinte: Se $\sum_n |b_n - b_{n+1}| < \infty$ e se $\sum_n a_n$ converge então $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

- 2) Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ seqüências de números reais estritamente positivos com

$$\sum_n c_n < \infty, \sum_n d_n = \infty.$$

- a) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}, \quad n \geq N,$$

então $\sum_n a_n < \infty$.

b) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{d_{n+1}}{d_n}, \quad n \geq N,$$

então $\sum_n a_n = \infty$.

Sugestão: Para o item a) observe que a seqüência $\{a_n/c_n\}$ é uma seqüência decrescente.

3) (*Cr terio de Kummer*): Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ seqüências de números reais estritamente positivos com $\sum_n d_n = \infty$.

a) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$ e um número $\rho > 0$ temos que

$$b_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} b_{n+1} \geq \rho > 0, \quad n \geq N,$$

então $\sum_n a_n < \infty$.

b) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$ temos que

$$\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{d_{n+1}} \leq 0, \quad n \geq N,$$

então $\sum_n a_n = \infty$.

Sugestão: Para o item b) veja o exercício anterior item b). Para o item a) observe que $w_n := a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq a_n \rho > 0, n \geq N$. Também observe que $\sum_n w_n$   convergente.

4) (*Cr terio de Raabe-Duhamel*). Guardando as notat es do exercício anterior, tomando $b_n = n - 1 (n \geq 2)$ no exercício anterior e $d_n = 1/(n - 1)$ no item b) obt m-se

$$\sum_n a_n < \infty \quad \text{se, para algum } \alpha > 1 \quad \text{e um } N \in \mathbb{N}, \quad n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq \alpha, \quad n \in N$$

$$\sum_n a_n = \infty \quad \text{se, para algum } N \in \mathbb{N}, \quad n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1, \quad n \in N$$

Em particular, se $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$ então $\sum_n a_n < \infty$ se $L > 1$ e $\sum_n a_n = \infty$ se $L < 1$. Mostre que se $L = 1$, todas as hipóteses podem ocorrer.

5) (*Cr terio de Gauss*) Seja $\{a_n\}$ uma seqüencia de números reais estritamente positivos tais que, para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^p}, \quad n \geq N$$

onde $p > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ e $\sup_{n \geq N} |\beta_n| < \infty$.

a) Mostre que $\sum_n a_n < \infty$, se $\alpha > 1$ e $\sum_n a_n = \infty$, se $\alpha \leq 1$.

Sugestão: Se $\alpha \neq 1$ utilize exercício anterior). Para $\alpha = 1$ utilize o exercício anterior com $1/d_n = (n-1) \log(n-1)$, $n \geq 3$ verificando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{d_{n+1}} \right) = -1.$$

b) Seja $a \in \mathbb{C}$. Seja $z_n = \binom{a}{n}$, onde $\binom{a}{0} = 1$, $\binom{a}{1} = a$,

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)}{n!}, \quad n \geq 1.$$

Mostre que $\sum_n |z_n| < \infty$ se $\Re a > 0$ ou $a = 0$ e, $\sum_n |z_n| = \infty$ se $\Re a \leq 0$, $a \neq 0$.

Sugestão: Considere

$$r_n = \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \left| \frac{a-n}{n+1} \right|$$

Quando $\Re a \neq 0$ aplique exercício anterior), verificando que

$$n(1-r_n) = \frac{n}{1+r_n} \cdot \frac{1-|a|^2+2n(1+\Re a)}{(n+1)^2} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(1-r_n) = 1 + \Re a$$

Quando $\Re a = 0$, $a \neq 0$, $a = it$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ e

$$r_n = \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{t^2}{n^2} \right)^{1/2}$$

verifica-se que

$$n^2 \left(r_n - 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{n^3}{n+1} \left(\left(1 + \frac{t^2}{n^2} \right)^{1/2} - 1 \right) + \frac{n^2}{n(n+1)} \rightarrow \frac{t^2}{2} + 1$$

O resultado agora segue do item a).

- 6) (*Série hipergeométrica*) Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}$. Suponha que $-c \notin \mathbb{N}$. Então a série dada por

$$F(a, b, c, z) := 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2c(c+1)}z^2 + \dots + \\ + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)}z^n + \dots$$

é chamada de *série hipergeométrica* e aparece na teoria das equações *Fuchsianas* de segunda ordem (Veja refs. 4) e 8).

Também aparecem na teoria das aplicações conformes, mais precisamente nos *triângulos Schwarzianos* e na *pavimentação do disco hiperbólico por triângulos geodésicos* (Veja ref. 20) .

- a) Exercício-estudo (Veja ref. 20)): Estude as relações entre a *derivada Schwarziana* e as soluções de equações diferenciais lineares de segunda ordem cujos coeficientes são funções meromorfas. Estude as relações entre tais equações com a série hipergeométrica culminando na solução explícita do problema de se encontrar uma transformação conforme que leva o semi-espço superior $\{\text{Im } z > 0\}$ sobre um triângulo *hiperbólico* ou *curvilíneo*, cujos lados são arcos de círculos (“geodésicas no plano hiperbólico”) de ângulos $\pi\alpha, \pi\beta, \pi\gamma$, satisfazendo a relação da geometria não -Euclideana: $\alpha + \beta + \gamma < 1$.
- b) Mostre que a *série hipergeométrica* tem raio de convergência 1.
- c) Se $\Re(a+b-c) < 0$, a série converge absolutamente para $|z| = 1$. *Sugestão* Aplique o critério de Gauss.

Cálculo dos resíduos, e etc...

- 7) (*Fórmulas de somatório*)

$$\sum f(n)$$

Seja f uma função holomorfa em \mathbb{C} , exceto por um número finito de singularidades. Suponha que nenhuma das singularidades seja um número inteiro. Seja $\gamma_n, n \in \mathbb{N}$ uma seqüência de curvas simples fechadas disjuntas das singularidades de f e que não passa pelos inteiros, satisfazendo a seguinte propriedade: Se \mathcal{D}_n é o domínio delimitado por γ_n , então $\bigcup_n \mathcal{D}_n$ é uma exaustão de \mathbb{C} .

a) Mostre que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\gamma_n} (\pi \cot \pi z) f(z) dz = 0 \Rightarrow \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) = - \sum_{z \in \text{Sing}(f)} \text{Res}(g; z)$$

onde $\text{Sing}(f)$ é o conjunto das singularidades de f .

b) Mostre que

$$\sup\{|\cot \pi z|; z \in \mathbb{C} \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} B_\epsilon(n), 0 < \epsilon < 1/2\} < \infty$$

onde $B_\epsilon(n) := \{|z - n| < \epsilon\}$. Mostre uma limitação análoga para as seguintes funções $f(z) = 1/(e^z - 1)$, $f(z) = \frac{e^{tz}}{e^z - 1}$ ($t \in [0, 1]$), $f(z) = \sec z$.

c) Mostre que se f satisfaz a uma desigualdade do tipo

$$|f(z)| \leq \frac{M}{|z|^2} \quad M > 0$$

para $|z|$ suficientemente grande, então a hipótese do item a) será satisfeita. Exiba exemplos gerais disto.

d) Mostre que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \pi/a \frac{1 + e^{-2\pi a}}{1 - e^{-2\pi a}}$$

Conclua que $\sum_1^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi}{6}$.

Exiba outros exemplos de fórmulas de somatório do mesmo tipo.

e) Elabore uma análise parecida usando $\pi \csc \pi z$ para encontrar fórmulas de somatório para $\sum (-1)^n f(n)$.

8) (*Expansão de algumas funções meromorfas clássicas*)

Sejam a_k , $k = 1, 2, \dots$ os pólos de uma função meromorfa definida num aberto $U \subset \mathbb{C}$. Suponha que a parte principal de f em a_k seja dada por

$$h_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k} \frac{c_{kj}}{(z - a_k)^j}$$

a) Seja $B_\epsilon(a_n)$ um disco aberto ao redor de a_n , de raio ϵ suficientemente pequeno, contendo apenas um único pólo de f . Seja w um ponto de $B_\epsilon(a_n) \setminus \{a_n\}$. Mostre que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z-w}; a_n\right) = -h_n(w)$$

- b) Seja γ é uma curva simples fechada positivamente orientada que é bordo de um domínio Ω interceptando o conjunto dos pólos de f apenas nos pontos a_1, a_2, \dots, a_m . Mostre que se w é um ponto de Ω que não é um pólo de f , então

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{z-w} dz = f(w) - \sum_1^m h_k(w)$$

Agora seja γ_N uma seqüência de curvas simples fechadas positivamente orientadas bordando domínios Ω_N formando uma exaustão de $\Omega \equiv \mathbb{C}$, com $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \dots$. Suponhamos também que $\Omega_N \cap \{a_1, a_2, \dots\} = \{a_1, \dots, a_{n_N}\}$. Mostre que se

$$\sup_{z \in [\gamma_N]} |f(z)| \longrightarrow 0 \quad \text{quando } N \rightarrow \infty$$

onde $[\gamma_N]$ é o traço de γ_N , então para $w \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \dots\}$

$$f(w) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^{n_N} h_k(w)$$

Além disso mostre que se todos os pólos de f são simples deduz-se que a fórmula

$$f(w) = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^{n_N} \frac{c_k}{w - a_k}$$

- c) Agora suponha que f seja holomorfa em $z = 0$. Mostre que se w não é um pólo de f tem-se que

$$w \int_{\gamma_N} \frac{f(z)}{z(z-w)} dz \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty) \Rightarrow f(w) = f(0) + \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_1^{n_N} (h_k(w) - h_k(0))$$

Sugestão Use a identidade $\frac{1}{z-w} = \frac{1}{z} + \frac{w}{z(z-w)}$. Deduza que se todos os pólos de f são simples então

$$f(w) = f(0) + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_1^{n_N} \left(\frac{c_k}{w - a_k} + \frac{c_k}{a_k} \right)$$

Usando o item 7)b) deduza as seguintes expansões :

$$\begin{aligned} \sec z &= 4\pi \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2\pi^2 - 4z^2} \\ \cot z &= \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty} \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2} \\ \csc z &= \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty} \frac{(-1)^k 2z}{z^2 - k^2\pi^2} \\ \frac{1}{e^z - 1} &= \frac{-1}{2} + \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty} \frac{2z}{z^2 + 4k^2\pi^2} \end{aligned}$$

- 9) (*Soma de Gauss*) Este exercício deve ser com consulta. Veja por exemplo ref. 12) ou ref. 13). Mostra a fórmula de Gauss

$$\sum_0^{n-1} e^{2\pi\nu^2/n} = \frac{1 + (-i)^n}{1 - i} \sqrt{n}$$

- 10) (*resíduo no infinito*) Considere f uma função holomorfa em \mathbb{C} com finitas singularidades. O resíduo no infinito está definido por

$$\text{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} f(z) dz$$

para R suficientemente grande.

- Mostre que $\text{Res}(f, \infty) = -a_{-1}$, onde a_{-1} é o coeficiente de $1/z$ no desenvolvimento de Laurent de f no infinito. Qual é a relação com o resíduo da função $-\frac{1}{\zeta^2} f(1/\zeta)$ na origem ?
- Mostre que a soma dos resíduos de f na esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é zero, concluindo que a soma dos resíduos de uma função meromorfa na esfera de Riemann é igual a zero. Mostre que o resíduo de uma função racional pode ser calculado via determinantes.
- Calcule a integral

$$\int_{-1}^1 \frac{2\sqrt{1-x^2}}{(\sqrt{2}-1)(1+x^2)} dx = 2\pi$$

11) (*Teorema de Rouché*)

a) Use o teorema dos resíduos para estabelecer uma fórmula para contar zeros e pólos de uma função meromorfa. Aplique na dedução do teorema de Rouché para uma função *meromorfa*. Aplique Rouché para dar uma demonstração do teorema Hurwitz.

i) Mostre que se $\{a_n\}$ é uma seqüência decrescente de números reais positivos então $f(z) := \sum_0^{\infty} a_n z^n$ define uma função holomorfa sem zeros na bola unitária centrada na origem.

ii) Estude a equação

$$\tan z = az, \quad a > 0$$

considerando os quadrados com vértice $n\pi(1+i), n\pi(-1+i), n\pi(-1-i), n\pi(1-i)$.

11) (*Funções inversas*) Suponha que f seja meromorfa num aberto que contenha um domínio Ω cujo bordo é uma curva simples fechada positivamente orientada γ , que não contém nem zeros nem pólos de f . Sejam a_1, a_2, \dots, a_n e b_1, b_2, \dots, b_m , respectivamente, os zeros e os pólos de f . Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_{j=1}^n g(a_j) - \sum_{k=1}^m g(b_k)$$

onde cada zero e cada pólo são contados de acordo com sua multiplicidade.

Deduza os seguintes resultados

a) Seja $f(z)$ uma função holomorfa numa bola $B_{\epsilon}(0)$ centrada na origem de raio ϵ , tal que $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. Suponha que $f(z) \neq 0$ para $0 < |z| < \epsilon$. Seja C_r o círculo de raio r centrado na origem com $r < \epsilon$. Mostre que

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w} d\zeta$$

define uma função holomorfa para $|w| < \min_{\theta} |f(re^{i\theta})|$. Para tais valores de w , $z = g(w)$ é a única solução da equação

$$f(z) = w$$

que tende a zero quando w tende a zero. Além disso mostre que

$$g(w) = \sum_0^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta))^{n+1}} d\zeta \quad w^n$$

sendo que a série converge uniformemente com respeito a ζ e w , desde que t percorra C_r e $|w| \leq c < \min_{\theta} |f(re^{i\theta})|$.

- i) Considere $F(a, b, c, z)$ a série hipergeométrica dada no item 6). Mostre que a raiz da equação

$$z^3 + 3z - w = 0$$

que tende a zero quando $w \rightarrow 0$ é dada por uma série hipergeométrica.

- b) Com as mesmas condições do item a) anterior mostre que se h é uma função holomorfa num aberto contendo a bola $B_\epsilon(0)$, então

$$h(g(w)) = h(0) + \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} h'(z) (\psi(z))^n \Big|_{z=0} w^n$$

onde $\psi(z) = \frac{z}{f(z)}$. As séries obtidas nos itens a) e b) obtidas são chamadas de *séries de Lagrange*.

- i) Escreva enunciados analogos aos dos itens a) e b) relativos a inversa da equação

$$w = f(z)$$

num ponto $w_0 = f(z_0)$ (note que em a) e b) $z_0 = w_0 = 0$)

- ii) Escreva as expansões de Lagrange do item b) quando $f(z) = \frac{z}{e^{2z}}$, e $g(z) = e^{\lambda z}$.
- iii) Exercício-pesquisa (Para fazer este exercício você precisa consultar refs. 1), 4) ou 8)): Mostre que os *polinômios de Legendre* aparecem naturalmente no estudo de certa série de Lagrange e mostre suas propriedades tais como: *Funções geradoras, fórmula de Rodrigues, ortogonalidade*. Mostre também que satisfazem uma certa equação de segunda ordem linear, com propriedades interessantes posto que esta é um caso especial das equações hipergeométricas.

c) Seja

$$F(z, w) = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} z^m w^n, \quad a_{00} = 0 \quad \text{e} \quad a_{01} \neq 0$$

sendo que a série dupla é absolutamente convergente para $|z| \leq r_1$ e $|w| \leq r_2$. Mostre que existe uma única função holomorfa $f(z)$ numa vizinhança da origem, com $f(0) = 0$ e

$$F(z, f(z)) = 0$$

nesta vizinhança. Além disso f pode ser representada por

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C w \frac{F_w(z, w)}{F(z, w)} dw$$

onde C é um círculo de raio r para $r < r_2$.

Sabe-se da álgebra que qualquer função simétrica das raízes de uma equação algébrica é expressa de maneira única como um polinômio nas somas das potências destas raízes. Use isto para mostrar o seguinte

d) Se f é uma função holomorfa na bola $B_\epsilon(0)$ e se 0 é um zero de ordem k de f em 0 , então para valores pequenos de $|w|$, a equação

$$f(z) = w$$

tem k raízes $z_1(w), \dots, z_k(w)$, que tendem a zero, quando $w \rightarrow 0$. Além disso, estas raízes satisfazem uma equação algébrica de grau k

$$z^k + g_1(w)z^{k-1} + \dots + g_k(w) = 0$$

cujos coeficientes são funções holomorfas que tendem a zero quando $w \rightarrow 0$. Aproveite o momento para enunciar e demonstrar o *teorema de preparação de Weierstrass* e o *teorema das funções implícitas* para funções analíticas de duas variáveis complexas.

e) Nas hipóteses do item d) acima, mostre que existe uma função $h(\zeta)$, holomorfa para $|\zeta|$ suficientemente pequeno, tal que para cada valor pequeno fixado de w , as k determinações de $h(w^{1/n})$ representam as raízes $z_1(w), \dots, z_k(w)$, em alguma ordem. Quando w percorre um circuito

fechado em torno da origem, as raízes são permutadas ciclicamente. Além disso, a generalização das séries de Lagrange no caso que 0 é um zero de ordem k , toma a seguinte forma ($f(z) = w$)

$$z = f^{-1}(w) = h(w^{1/n}) = \sum_1^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} (\psi(z))^n \Big|_{z=0} w^{n/k}$$

onde $\psi(z) = \frac{z}{f(z)^{1/k}}$.

12) (*Séries de funções trigonométricas clássicas*)

a) Mostre que

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

comparando os pólos e parte principal das duas funções meromorfas acima, periodicidade e comportamento quando $|\text{Im}(z)| \rightarrow \infty$.

b) Usando o resultado anterior mostre que

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_1^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

c) (*Caracterizações da função cotangente*)

i) Seja g uma função meromorfa em \mathbb{C} cujos pólos são exatamente os números inteiros. Suponha que para cada $n \in \mathbb{Z}$ a parte principal é $1/(z-n)$. Suponha ainda que g seja uma função ímpar e que satisfaça *fórmula de duplicação do ângulo*

$$2g(2z) = g(z) + g\left(z + \frac{1}{2}\right)$$

Mostre que $g(z) = \pi \cot \pi z$. *Sugestão* Use o princípio do máximo na bola de raio 2 e centro 0.

Agora considere a equação diferencial de *Riccati*

$$w' + w^2 + 1 = 0$$

ii) Mostre que as funções $g(z) \equiv i$ e $g(z) = \cot z = i \frac{e^{2iz} + 1}{e^{2iz} - 1}$, satisfazem a equação diferencial acima.

- iii) Mostre que se $w = g(z)$ é uma função meromorfa num domínio Ω tal que $w \neq i$, então a *transformação de Cayley* $f(z) = \frac{w+i}{w-i}$, satisfaz a *equação linear* $f' = 2if$.
- iv) Mostre que se g é uma função meromorfa numa vizinhança da origem, satisfazendo a equação de Riccati acima, *que tem um pólo na origem*, então $g(z) = \cot z$.
- 13) Considere Ω um domínio *qualquer* de \mathbb{C} . Seja f uma função meromorfa em Ω . Seja z_0 um ponto de Ω fixado e seja γ_z um caminho (seccionalmente C^1) ligando z_0 à z onde $z \in \Omega$, que it nao passa nem pelos zeros nem pelos pólos de f
- a) Em que condições a função

$$\int_{\gamma_z} f(\zeta) d\zeta$$

determina uma *bem definida* função meromorfa em Ω ? Exiba exemplos.

- b) Em que condições a função

$$\int_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta$$

determina uma *bem definida* função meromorfa em Ω ? O que isto significa ?

- c) Mostre que se f é holomorfa em Ω e não se anula em Ω então

$$f(z) = f(z_0) e^{\int_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)} d\zeta}$$

O quê este resultado permite concluir sobre

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$$

onde γ é uma curva fechada *qualquer* em Ω .

- d) Suponha que toda função holomorfa em Ω que não se anula tenha uma raíz quadrada que é uma função holomorfa em Ω . Mostre que toda função

holomorfa em Ω que não se anula tem também um logaritmo holomorfo em Ω .

- 14) Seja f uma função holomorfa numa vizinhança do disco fechado $\overline{B}_R(0)$. Mostre a fórmula de Poisson

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(Re^{i\theta}) \Re \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta$$

Tomando-se a parte real na identidade acima, obtém-se a fórmula de Poisson para funções harmônicas.

- i) Usando continuação analítica e a fórmula de Poisson acima, ou outro método mostre a fórmula integral de Schwarz

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re f(Re^{i\theta}) \frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z} d\theta + i \operatorname{Im} f(0) \quad \forall z \in B_R(0)$$

- 15) Sejam f e g funções meromorfas em \mathbb{C} .
- Mostre que se ambas f e g não tem pólos e satisfazem $f^2 + g^2 = 1$, então existe uma função inteira h tal que $f(z) = \cos h(z)$ e $g(z) = \sin h(z)$.
 - Mostre que se f, g satisfazem $f^n + g^n = 1$, $n \in \mathbb{N}, n \geq 3$ então, ou bem f e g tem pólos comuns, ou bem são constantes.
- 16) Discuta singularidades de uma função meromorfa.
- Exiba um exemplo em que $z = 0$ é uma singularidade que é um ponto de acumulação de pólos.
 - Exiba um exemplo em que $z = 0$ é uma singularidade que é um ponto de acumulação de singularidades essenciais.
 - Exercício-pesquisa: Discuta fronteira natural e domínio de holomorfia. Dê um exemplo que o círculo unitário é a fronteira natural. Enuncie o teorema de “gap” de Hadamard. Veja refs. 3, 14, 18.
 - Exercício pesquisa: É possível encontrar uma função meromorfa em \mathbb{C} cujas singularidades sejam exatamente um conjunto de Cantor? Veja refs. 3, 7.
- 17) Exercício pesquisa. Enuncie e demonstre as várias formas do teorema de Phragmen-Lindelöf. Veja refs. 7, 18.

Produtos infinitos

18) Exercício- pesquisa: Defina convergência de produtos infinitos. Para todo este item veja refs.7, 9, 14, 15, 16 e 18.

- a) Investigue os vários resultados relacionando convergência de produtos infinitos com certas séries obtidas a partir do termo geral do produto.
- c) Investigue o critério relacionando convergência de produtos infinitos com a série dos logaritmos do termo geral do produto.
- d) Investigue convergência uniforme e normal de produtos infinitos e os vários critérios de convergência uniforme de produtos infinitos.
- e) Investigue o resultado de *derivada logarítmica* e convergência de produtos infinitos.
 - i) Usando derivação logarítmica e a decomposição em somas parciais da função $\pi \cot \pi z$, mostre que

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \quad z \in \mathbb{C}$$

- i) Conclua o *produto de Wallis (1665)*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{5} \frac{6}{7} \cdots = \prod_1^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \quad (\pi = 3,14159 \cdots)$$

- f) (*Os produtos de Euler*) Mostre que

$$Q(z, q) := \prod_1^{\infty} (1 + q^n z)$$

converge normalmente em \mathbb{C} para todo q com $|q| < 1$. Conclua que é uma função inteira em z .

- i) Mostre a seguinte relação funcional:

$$Q(z, q) = (1 + qz)Q(qz, q)$$

para $|q| < 1$, e $z \in \mathbb{C}$. Conclua

- ii)

$$\prod_1^{\infty} (1 + q^n z) = 1 + \sum_1^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2) \cdots (1-q^n)} z^n$$

- g) (*Teorema de representação de produto de Jacobi*) Investigue o seguinte teorema de Jacobi (veja ref. 14) Para cada q , $|q| < 1$, e cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ vale

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n = \prod_1^{\infty} ((1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1}z)(1 + q^{2n-1}z^{-1}))$$

deduza a representação da *série theta clássica*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} = 1 + 2 \sum_1^{\infty} q^{n^2} = \prod_1^{\infty} ((1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})^2)$$

- i) Deduza o *teorema do número pentagonal de Euler*.
- 19) Exercício- pesquisa: Defina os *fatores de Weierstrass* e deduza o *teorema de produto de Weierstrass* em \mathbb{C} .
- a) Conclua o *teorema de fatoração de Weierstrass* para uma função inteira não identicamente nula.
- b) Conclua que toda função meromorfa em \mathbb{C} pode ser representada como quociente de duas funções inteiras sem zeros comuns.
- c) Defina *produto canônico de Weierstrass* e exiba exemplos.
- d) Mostre o *teorema de produto* para funções holomorfas em abertos quaisquer de \mathbb{C} .
- i) Conclua o *teorema de fatoração* num domínio qualquer de \mathbb{C} .
- ii) Conclua que toda função meromorfa definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ pode ser representada como quociente de duas funções holomorfas em Ω , sem zeros comuns.

Seja f uma função holomorfa definida num domínio Ω . Dizemos que Ω é o *domínio maximal de existência* de f , se $\widehat{\Omega} \supset \Omega$ for um domínio para o qual existe uma função holomorfa \widehat{f} com $\widehat{f}|_{\Omega} = f$, então necessariamente $\widehat{\Omega} \equiv \Omega$.

- e) Mostre que todo domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$, é o *domínio maximal de existência* de uma função holomorfa em Ω .

Dizemos que um domínio Ω é um *domínio de holomorfia* de uma função holomorfa em Ω , se para todo ponto $z_0 \in \Omega$, o disco ao redor de z_0 no qual a série de Taylor de f converge está inteiramente contido em Ω .

- 20) Exercício-pesquisa: Mostre o seguinte teorema de existência de Runge- Besse: Para todo domínio Ω do plano complexo existe uma função holomorfa em Ω , tal que Ω é o domínio de holomorfia de f . Veja ref. 14.
- Discuta a relação entre domínio de holomorfia e domínio maximal de existência.
 - Exiba exemplos de funções holomorfas e seus domínios de holomorfia.

Funções meromorfas especiais

A Função Theta de Jacobi

- 21) Considere a série Theta

$$\theta(z, \tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-n^2\pi\tau} e^{2\pi inz}$$

- Mostre que a série Theta é normalmente convergente para $\Re\tau > 0$, e todo $z \in \mathbb{C}$. Além disso mostre que satisfaz a equação do calor

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = 4\pi \frac{\partial \theta}{\partial \tau}$$

$\Re\tau > 0$, e todo $z \in \mathbb{C}$.

- Mostre que $\theta(z + 1, \tau) = \theta(z, \tau)$, e que $\theta(z + i\tau, \tau) = e^{\pi\tau} e^{-2\pi iz} \theta(z, \tau)$.

Dizemos que uma função meromorfa em \mathbb{C} é *elíptica* se possui dois períodos linearmente independente sobre os reais. Tal função também é chamada de duplamente periódica.

- Mostre que as funções

$$\theta\left(z + \frac{1}{2}, \tau\right) / \theta(z, \tau) \quad e \quad \left(\theta\left(z + \frac{1}{2}, \tau\right) / \theta(z, \tau) \right)^2$$

são funções elípticas, determinando os respectivos períodos.

- Seja f uma função inteira satisfazendo $f(z + 1) = f(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$ (Dizemos que f tem período 1). Mostre que f pode ser expandida numa única *série de Fourier*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{2\pi inz}$$

onde $c_n = \int_0^1 f(z) e^{-2\pi inz} dz$.

Mostre que para cada τ , $\Re\tau > 0$, a função $e^{-z^2\pi\tau} \theta(i\tau z, z)$ é uma função inteira de período 1 e expansão de Fourier dada por

$$e^{-z^2\pi\tau} \theta(i\tau z, z) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \sum_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{n^2\pi}{\tau}} e^{2\pi inz}$$

i) Conclua as fórmulas de transformação para a função Theta

$$\theta\left(z, \frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\tau} e^{-z^2\pi\tau} \theta(i\tau z, \tau) \quad z \in \mathbb{C}, \Re\tau > 0$$

$$\theta\left(\frac{1}{\tau}\right) = \sqrt{\tau} \theta(\tau)$$

A função Gamma

22) Considere o produto

$$F(z) = z e^{\gamma z} \prod_1^{\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right) e^{-\frac{z}{n}}$$

a) Mostre que o produto acima define uma função inteira $F(z)$, cujos zeros são precisamente os inteiros negativos e a origem. Mostre ainda que

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

O número γ é chamada de *constante de Euler*, $\gamma = 0,5772156\dots$.

b) Mostre as seguintes relações funcionais

$$F(z) = zF(z+1)$$

$$\pi F(z)F(1-z) = \sin \pi z$$

c) Mostre a seguinte fórmula de multiplicação

$$(2\pi)^{(k-1)/2} F\left(\frac{1}{k}\right) F\left(\frac{2}{k}\right) \dots F\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sqrt{k} \quad k = 2, 3, \dots$$

- e) Mostre que a função Gamma definida por $\Gamma(z) = \frac{1}{F(z)}$ é uma função meromorfa que não se anula, os pólos de $\Gamma(z)$ são precisamente os inteiros negativos e a origem, todos estes são pólos simples; e $\Gamma(z)$ satisfaz a seguinte relação funcional

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \text{com } \Gamma(1) = 1$$

- i) Mostre que

$$\text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

Note que a equação funcional acima não caracteriza a função Gamma. Por quê ?

- ii) Mostre a *representação produto de Gauss*

$$\Gamma(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

- iii) Mostre que $\Gamma(z)$ é limitada em toda faixa fechada vertical $\{0 < a \leq \Re z \leq b\}$.

- f) Mostre a *fórmula de suplemento de Gauss*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

- i) Mostre que

$$\Gamma(n+1/2) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$$

- ii) Mostre o cálculo de Raabe (1843)

$$\int_0^1 \log \Gamma(t) dt = \log \sqrt{2\pi}$$

Sugestão É preciso mostrar primeiramente que

$$\int_0^1 \log \sin \pi t dt = -\log 2$$

Para demonstrar a fórmula acima (que também aparece na dedução da *fórmula de Jensen*) use a fórmula de *duplicação do seno*: $\sin 2\pi z = 2 \sin \pi z \sin \pi(z + \frac{1}{2})$.

Para concluir, use a fórmula de suplemento de Euler.

g) Encontre a representação em séries da derivada logarítmica $\frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$. Encontre também relações funcionais para esta função. Mostre que $\Gamma(z)$ é *convexa logarítmica*, i.e. $\log \Gamma$ é convexa em $(0, \infty)$.

h) Mostre o *teorema de unicidade de Wielandt (1939)* a função Γ é a única função holomorfa no semi-plano à direita $\Re z > 0$, satisfazendo $\Gamma(1) = 1$, satisfazendo a relação funcional $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, e sendo limitada na faixa $\{1 \leq \Re z < 2\}$. *Sugestão* Suponha que exista uma função g com as propriedades dadas. Mostre que a diferença $f(z) = g(z) - \Gamma(z)$ é uma função inteira limitada na faixa $\{0 \leq \Re z \leq 1\}$. Aplique o teorema de Liouville à função $f(z)f(1 - z)$.

Investigue o *teorema de unicidade de Bohr-Mollerup (1922)*: Este diz que a relação funcional $\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z)$, $z > 0$, o fato que $\Gamma(1) = 1$, e o fato que $\Gamma(z)$ é *convexa logarítmica* caracterizam a função Gamma. Veja refs. 7), 14).

i) Mostre o teorema de *representação de Euler* A integral $\int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt$, converge uniformemente e absolutamente à $\Gamma(z)$ em toda faixa vertical fechada $\{0 < a \leq \Re z \leq b\}$.

i) Use a fórmula acima para calcular

$$\int_0^\infty x^{2n} e^{-x^2} dx = \frac{\Gamma(n + 1/2)}{2}$$

Conclua que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Considere $r > 0$ e $c + di \in C_r$, $c < 0, d > 0$ onde C é o círculo de raio r centrado na origem. Seja α o arco orientado de C_r saindo de $c - di$ e chegando à $c + di$. Seja α_1 a semi-reta orientada horizontal, inteiramente contida no segundo quadrante, partindo de $c + di$. Seja α_2 a semi-reta orientada, inteiramente contida no terceiro quadrante, chegando em $c - di$. Considere o *caminho fechada* $\gamma := \alpha_2 + \alpha + \alpha_1$.

j) Mostre que $\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma w^{-z} e^w dw$, converge uniformemente em compactos e absolutamente em \mathbb{C} a uma função inteira h , satisfazendo $h(1) = 1$ e

$h(-n) = 0$, $n \in \mathbb{N}$. Além disso, mostre que $h(z) e^{-\pi|\operatorname{Im} z|}$ é limitada em toda faixa $\{a \leq \Re z \leq b\}$. *Sugestão* Mostre que se β é um segmento vertical orientado ligando um ponto do traço de α_2 a um ponto do traço de α_2 , em $\Re z = -t$, então $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_{\beta} w^{-m} e^w dw = 0, \forall m \in \mathbb{Z}$. Aplique o teorema dos resíduos para demonstrar que os valores de h na origem e nos inteiros negativos são os desejados.

i) Mostre as representações integrais de Hankel:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} w^{-z} e^w dw \quad z \in \mathbb{C}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i \sin \pi z} \int_{\gamma} w^{z-1} e^w dw \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{-1, -2, -3, \dots\}$$

k) Mostre que a função

$$B(z, w) = \int_0^1 t^{w-1} (1-t)^{z-1} dt$$

é holomorfa em $z \in \{\Re z > 0\}$, para cada $w \in \{\Re w > 0\}$ fixado. Idem trocando-se os papéis de z e w . A função $B(z, w)$ é chamada de função Beta de Euler.

i) Mostre a identidade de Euler

$$B(z, w) = \frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(z+w)} \quad \forall z \in \Re z > 0, w \in \Re w > 0$$

Sugestão Fixe $w \in \{\Re w > 0\}$, e aplique o teorema de unicidade. Para tal você terá que demonstrar antes algumas propriedades quase diretas da função Beta de Euler.

l) Exercício-pesquisa: Investigue as fórmulas de Stirling para a função Gamma:

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-1/2} e^{-z} \quad \text{quando } |z| \rightarrow \infty \quad |\arg z| \leq \pi - \delta, \quad 0 < \delta < \pi$$

Conclua:

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} e^{a_n}$$

onde $a_n \rightarrow 0$ (quando $n \rightarrow \infty$).

A função Zeta de Riemann

23) Mostre que a *função Zeta de Riemann* definida por

$$\zeta(z) = \sum_1^{\infty} n^{-z}$$

é holomorfa em $\{\Re z > 1\}$.

a) Exercício-pesquisa: Mostre que a função Zeta de Riemann pode ser definida para ser uma função meromorfa no plano complexo \mathbb{C} , com um único pólo simples em $z = 1$ e $\text{Res}(\zeta, 1) = 1$. Para $z \neq 1$, a função ζ satisfaz a relação funcional de Riemann (Veja refs. 7), 15), 16))

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1} \Gamma(1-z) \zeta(1-z) \sin\left(\frac{\pi z}{2}\right)$$

i) Mostre que $\zeta(z) = 0$ para $z = -2, -4, -6, \dots$. Mostre também que ζ não tem outros zeros fora da faixa fechada *crítica* $\{0 \leq \Re z \leq 1\}$.

A hipótese de Riemann afirma que um zero de ζ na faixa crítica ocorre apenas na reta vertical $\Re z = \frac{1}{2}$. É sabido que nesta reta vertical ζ possui uma infinidade de zeros (Hardy, 1914).

b) Exercício-pesquisa: Mostre o teorema de Euler: Se $\Re z > 1$ então

$$\zeta(z) = \prod_1^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_n^{-z}} \right)$$

onde $\{p_n\}$ é a seqüência de números primos.

Fórmula de Jensen

24) Seja f uma função holomorfa em $B_1(0)$, a bola aberta de raio 1, centrada na origem. Suponha que $f(0) \neq 0$. Seja a_1, a_2, \dots, a_n , os zeros de f (aparecendo com suas respectivas multiplicidades) na bola de raio r , centrada na origem $B_r(0)$.

Mostre a *fórmula de Jensen*

$$\log |f(0)| + \log \frac{r^n}{|a_1 a_2 \cdots a_n|} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r e^{i\theta})| d\theta$$

Quando f tem zeros no círculo de raio r , a integral direita da desigualdade é uma integral imprópria. *Sugestão* Mostre a fórmula quando f não tem zeros no disco fechado de raio r . Em seguida demonstre que

$$\int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = 0$$

Uma maneira de demonstrar o fato acima é deduzir a seguinte identidade (veja uma outra resolução nas refs. 9), 15) e 18)) :

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \log |1 - e^{i\theta}| d\theta = \pi \log 2 + \int_0^{\pi} \log \sin \theta d\theta$$

mas a última integral à direita da igualdade logo acima já foi calculada antes. É preciso tomar certa precaução quando f se anula no círculo $C_r = \partial B_r(0)$ de raio r : Considere a função

$$g(z) := f(z) \prod_1^n \frac{\overline{a_k} z - r^2}{r(z - a_k)} \prod_1^m \frac{b_j}{b_j - z}$$

onde b_1, b_2, \dots, b_m , são os zeros de f em C_r . Mostre que quando f não se anula em C_r (como ocorre nas aplicações), a demonstração se simplifica consideravelmente.

a) Conclua a *desigualdade de Jensen*

$$|f(0)| \leq |a_1 a_2 \cdots a_n| |f|_{B_1(0)}$$

i) Conclua que se f é uma função holomorfa ($f \not\equiv 0$) e *limitada* em $B_1(0)$, e se a_1, a_2, \dots , é a seqüência de zeros de f , contados com multiplicidade, então

$$\sum (1 - |a_n|) < \infty \quad (\text{condição de Blaschke})$$

ii) Seja $\{a_1, a_2, \dots\}$ um subconjunto enumerável de $B_1(0)$, tal que $\sum (1 - |a_n|) = \infty$. Mostre que se f e g são duas funções holomorfas e limitadas em $B_1(0)$, então, se $f(a_j) = g(a_j)$, $j = 1, 2, \dots$ tem-se que $f \equiv g$.

Seja $\{a_n\}$, uma seqüência na bola $B_1(0)$. O *produto de Blaschke* está definido por

$$B(z) = z^k \prod_1^\infty \frac{z - a_n}{\overline{a_n}z - 1} \cdot \frac{|a_n|}{a_n}, \quad z \in B_1(0)$$

onde k é um inteiro não negativo

- b) Mostre que se $\sum (1 - |a_n|) < \infty$, então o produto de Blaschke $B(z)$ define uma função holomorfa e limitada na bola $B_1(0)$, cujos zeros são exatamente os pontos a_n (a origem também é um zero se $k > 0$.)

Mostre que não existe uma função holomorfa em $B_1(0)$, que se anula, com um zero de ordem n , nos pontos $1 - 1/n^2$.

- i) Conclua que dada uma função holomorfa limitada em $B_1(0)$, existe um produto de Blaschke $B(z)$ e uma função holomorfa g em $B_1(0)$, tal que $f = e^g \cdot B$.
- c) Mostre que a equivalente condição de Blaschke no semi-plano à direita $\{\Re z > 0\}$ é dada por

$$\sum \frac{\Re a_n}{|1 + a_n|^2} < \infty$$

Definimos $\log^+ t = \log t$, se $t \geq 1$, e $\log^+ t = 0$, se $0 < t < 1$. Observe que $\log t = \log^+ t - \log^+(1/t)$. A *família de Nevanlinna*, denotada por \mathcal{N} , é o conjunto de funções holomorfas em $B_1(0)$, satisfazendo

$$\sup_{0 < r < 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(r e^{i\theta})| d\theta < \infty$$

- c) Mostre que se $f \in \mathcal{N}$ ($f \not\equiv 0$), e a_1, a_2, \dots são os zeros de f com suas multiplicidades, então

$$\sum (1 - |a_n|) < \infty \quad (\text{condição de Blaschke})$$

Seja f uma *função inteira*. Definimos $M(r) = \sup_{\theta} |f(r e^{i\theta})|$, $0 < r < \infty$. Seja $n(r)$, o número de zeros de f no disco fechado $\overline{B}_r(0)$.

- d) Suponha que $f(0) = 1$. Mostre que

$$n(r) \log 2 \leq \log M(r)$$

- i) Conclua que se $M(r) < e^{Ar^k}$, para $A > 0, k > 0$ e r suficientemente grande, então

$$\limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\log n(r)}{\log r} \leq k$$

Mostre com um exemplo que a igualdade no limite acima pode ser atingida.

Considere f uma função meromorfa no disco fechado $\overline{B}_r(0)$. Seja c um zero ou pólo de ordem $m > 0$. Definimos

$$n_f(c) = \text{ord}_c(f) := m \quad \text{se } c \text{ é um zero, } -m \quad \text{se } c \text{ é um pólo,}$$

$$0 \quad \text{quando } c \text{ não é zero nem pólo}$$

Suponha que $f(z) = c_f z^m + \text{termos de maior ordem}$, numa vizinhança da origem. Ou seja f tem ordem m (segundo a definição acima), i.e. $n_f(0) = m$.

- f) Seja f uma função meromorfa e não constante no disco fechado $\overline{B}_r(0)$. Mostre a seguinte versão da *fórmula de Jensen generalizada*

$$\log |c_f| + \sum_{c \in B_r(0), c \neq 0} n_f(c) \log \frac{r}{|a|} + n_f(0) \log r = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(r e^{i\theta})| d\theta$$

- g) Exercício-pesquisa: Investigue a *fórmula de Poisson-Jensen* para $\log |f(z)|$ e $\log f(z)$. Veja refs 1), 9), 15), 18).

Vamos fazer uma pequena incursão na *teoria de Nevanlinna* (Veja refs 3), 15)).

Defina-se $n_f^+(0) = \max(0, n_f(0))$. Defina-se também

$$N_f(\infty, R) = \sum_{\substack{a \in B_R(0), a \neq 0 \\ f(a) = \infty}} -(\text{ord}_a f) \log \frac{R}{|a|} + n_{1/f}^+(0) \log R$$

$$N_f(0, R) = \sum_{\substack{a \in B_R(0), a \neq 0 \\ f(a) = 0}} (\text{ord}_a f) \log \frac{R}{|a|} + n_f^+(0) \log R$$

- h) Mostre que a fórmula de Jensen generalizada pode ser escrita da forma

$$\log |c_f| = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \log |f(R e^{i\theta})| d\theta + N_f(\infty, R) - N_f(0, R)$$

Agora seja f uma função meromorfa em \overline{B}_R . Para $r < R$, define-se

$$m_f(r) = \int_0^{2\pi} \log^+ |f(re^{i\theta})| d\theta \quad \text{função proximidade}$$

e

$$G = G_{R,f}^\infty(z) = \prod_{\substack{a \in B_R \\ f(a) = \infty}} G_R(z, a)^{-\text{ord}_a f}$$

onde $G_R(z, a) := \frac{R^2 - \bar{a}z}{R(z - a)}$.

i) Mostre as seguintes propriedades da função proximidade (f_1, f_2, \dots, f_n são funções meromorfas)

$$m_{f_1 f_2} \leq m_{f_1} + m_{f_2}$$

$$m_{f_1 + \dots + f_n} \leq m_{f_1} + \dots + m_{f_n} + \log n$$

i) Mostre que

$$m_G(r) = N_f(\infty, R) - N_f(\infty, r)$$

A função altura de Nevanlinna está definida por

$$T_f(r) = m_f(r) + N_f(\infty, r)$$

j) Mostre a versão da fórmula de Jensen generalizada de Nevanlinna

$$T_{1/f}(r) = T_f(r) - \log |c_f|$$

Agora defina-se $n_f(0, r)$ como sendo o número total de zeros na bola aberta $B_r(0)$, de raio r , contados com suas multiplicidades.

Seja $N_f(b, r) = N_{f-b}(0, r)$ (Veja item g) acima).

k) Exercício-pesquisa: Mostre o seguinte *teorema de Cartan* (Veja ref. 15)).

Se f é uma função inteira com $f(0) \neq 0$, então

$$m_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_f(e^{i\theta}, r) d\theta + \log^+ |f(0)|$$

Conclua que m_f é uma função crescente de r

- l) Mais geralmente prove o seguinte *teorema de Cartan*: Se $f(z)$ é meromorfa em $\{|z| < R \leq \infty\}$, e $f(0) \neq \infty$ (Veja ref. 3))

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_f(e^{i\theta}, r) d\theta + \log^+ |f(0)|$$

Lembremos a definição : $M(r) = \sup_{\theta} |f(re^{i\theta})|$, $0 < r < \infty$.

Defina $M_f(r) = \log M(r)$.

- m) Mostre que se f é uma função inteira, então para $r < R$

$$M_f(r) \leq \frac{R+r}{R-r} m_f(R)$$

Em particular, conclua que $M_f(r) \leq 3m_f(2r)$. *Sugestão* Quando f não se anula, aplique a fórmula de Poisson à função $\log |f(z)|$. No caso geral use a fórmula de Poisson-Jensen.

- i) Mostre que a desigualdade acima vale para funções holomorfas na bola unitária $B_1(0)$, impondo que $r < R < 1$. Mostre com isso que a família de funções holomorfas definida na bola unitária satisfazendo $m_f(r) < A$, $\forall 0 < r < 1$ para $A > 0$, é *normal*.
- ii) Conclua que se f é uma função inteira, e se m_f fica limitada, quando $r \rightarrow \infty$, então f é constante. Mostre que se existe uma constante k tal que $m_f(R_j) \leq k \log R_j$, para uma seqüência de números tal que $R_j \rightarrow \infty (j \rightarrow \infty)$, então f é um polinômio de grau no máximo k .
- n) Exercício-pesquisa: Seja f uma função meromorfa em $\{|z| < R \leq \infty\}$, $a \in \mathbb{C}$. Deduza o *primeiro teorema fundamental de Nevanlinna* (Veja refs. 3), 15))

$$T_f(r) = T_{f-a}(r) + O_a(1) \quad 0 < r < R$$

onde $|O_a(1)| \leq \log^+ |a| + \log 2$.

Miscelânea

O teorema de Mittag-Leffler

- 25) Exercício-pesquisa: Enuncie e demonstre o *teorema de Mittag-Leffler no plano complexo* \mathbb{C} (Veja ref. 9)).
- Exiba séries de Mittag-Leffler canônicas: Séries de Eisenstein, série derivada logarítmica da função $\Gamma(z)$, série de Eisenstein-Weierstrass) (Veja ref. 14)).
 - Enuncie e demonstre o teorema de Mittag-Leffler para abertos arbitrários (Veja refs. 14), 18)).
 - Mostre o *teorema de oscilação de Mittag-Leffler* (Veja ref.14)). Conclua o *teorema de interpolação para funções holomorfas*.
 - Conclua o *lemma de Wedderburn*: Se f e g são duas funções holomorfas num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$, *relativamente primas*, i. e sem zeros comuns, então existem funções holomorfas a e b tal que

$$af + bg = 1$$

Na verdade a pode ser escolhida de modo a não se anular em Ω .

O teorema de Runge

- 26) Exercício-pesquisa: Mostre o *teorema geral de aproximação de Runge* (Veja refs. 7), 14), 18)).
- Deduza do teorema de Runge, uma formulação do teorema de Mittag-Leffler.
 - Mostre que o teorema de Runge implica no teorema geral de Cauchy para domínios simplesmente conexos.
 - Prove a seguinte versão do teorema de Runge (Seja $\{D_n\}$ uma seqüência de círculos fechados concêntricos, de modo que D_n reside no interior de D_{n+1} e a união é $B_1(0)$, o disco aberto unitário centrado na origem. Em D_n escolha um compacto K_n contido no interior de D_n , porém não tocando D_{n-1} . Suponha que cada K_n tenha um complemento conexo no plano complexo \mathbb{C} . Aplique o teorema de Runge para mostrar que qualquer função holomorfa definida numa vizinhança da união dos K'_n s pode ser aproximada nesta união por funções analíticas definidas em $B_1(0)$. *Sugestão* (Veja o livro de Kenneth Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, 1962). Dados f e ϵ aproxime f em D_1 por um polinômio p_1 , uniformemente relativo a $\epsilon/2$. Escolha um polinômio p_2

que aproxima p_1 em D_1 uniformemente relativo a $\epsilon/4$ e f em K_2 uniformemente relativo a $\epsilon/4$. Então aproxime p_2 em D_2 e f em K_3 por p_3 uniformemente relativo a $\epsilon/8$. Mostre que a seqüência $\{p_n\}$ converge à uma função holomorfa em $B_1(0)$ aproximando como desejado f .

- i) Mostre que pode ser construída uma função analítica no disco aberto unitário $B_1(0)$ que não possua limite radial em algum ponto do círculo unitário (Compare com o teorema de Fatou, veja refs. 7), 18).
- ii) Mostre que pode ser construída uma seqüência de funções analíticas no disco aberto unitário $B_1(0)$ que convergem ponto a ponto à zero, mas não uniformemente.
- iv) (Veja ref. 14) Mostre que existe uma seqüência de polinômios p_n com as seguintes propriedades
 - 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(0) = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} p_n(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.
 - 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n^{(k)}(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{C}, \quad (\forall k \in \mathbb{N})$.
 - 3) Toda seqüência $p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \dots (k \in \mathbb{N})$, converge uniformemente em compactos em $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}, x \geq 0\}$, mas nenhuma destas seqüência converge uniformemente em compactos em nenhuma vizinhança de um ponto $x \geq 0$.

Funções elípticas

- 27) Exercício-pesquisa (Veja refs 3), 8)): Defina função elíptica, reticulado, domínio fundamental. Estabeleça as propriedades básicas das funções elípticas, em particular, demonstre o *lema de Abel*. Defina a função $\wp(z)$ de Weierstrass e estabeleça suas propriedades básicas. Defina a função $\zeta(z)$ de Weierstrass e deduza suas propriedades básicas. Deduza a *relação de Legendre*. Defina a função $\sigma(z)$ de Weierstrass. Encontre os zeros de $\wp'(z)$.
- a) Mostre a expressão de toda função elíptica em termos de $\wp(z)$ e $\wp'(z)$.
 - b) Mostre que $\wp(z)$ satisfaz uma certa equação diferencial de primeira ordem.
 - c) Mostre o *teorema de adição* para a função $\wp(z)$ e para $\zeta(z)$.
 - d) Defina e discuta as funções Theta de Jacobi. Mostre a representação das funções Theta como um produto infinito. Calcule a derivada logarítmica das funções Theta de Jacobi.

- e) Defina e estude as funções *sinus amplitudinis*, *cosinus amplitudinis* e *delta amplitudinis* de Jacobi. Mostre os teoremas de adição para tais funções . Defina a função Zeta de Jacobi .

Equações singulares regulares de segunda ordem

28) Exercício-pesquisa (Veja refs. 4), 8)): Defina equação linear homogênea cujos pontos singulares (pontos singulares isolados de algum coeficiente (que são funções meromorfas)) são *singulares-regulares*.

- a) Mostre o *teorema de Fuchs* que diz que uma condição necessária e suficiente para que uma singularidade isolada de uma equação diferencial linear de primeira ordem

$$w' + p(z)w = 0$$

seja regular-singular é que esta singularidade seja no máximo um pólo simples do coeficiente $p(z)$.

- b) Mostre o *teorema de Fuchs* que diz que uma condição necessária e suficiente para singularidade isolada da equação

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

seja regular-singular é que seja no máximo um pólo simples de $p(z)$, e no máximo um pólo duplo do coeficiente $q(z)$.

- i) Defina e estude as propriedades do *Wronskiano*. Mostre que o Wronskiano satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem e integre tal solução. O que acontece quando $p(z) \equiv 0$?

Considere a *equação indicial*

$$\rho(\rho - 1) + p_{-1}\rho + q_{-2} = 0$$

onde p_{-1} e q_{-2} são dados pelos seguintes desenvolvimentos de Laurent de p e q em $z = 0$

$$p(z) = \frac{p_{-1}}{z} + p_0 + p_1z + \dots$$

$$q(z) = \frac{q_{-2}}{z^2} + \frac{q_{-1}}{z} + q_0 + q_1z + \dots$$

- c) Exercício-pesquisa : Suponha que $z = 0$ seja um ponto regular-singular da equação diferencial de segunda ordem do item b) acima. Sejam ρ_0 e ρ_1 as raízes da equação indicial com $\rho_0 \geq \rho_1$, caso as raízes forem reais. Assuma que a diferença $\rho_0 - \rho_1$, não seja um inteiro. Mostre que neste caso existem duas soluções linearmente independentes da forma

$$w_0(z) = z^{\rho_0} \varphi_0(z), \quad w_1(z) = z^{\rho_1} \varphi_1(z)$$

onde φ_0 e φ_1 , são holomorfas na origem. Quando $\rho_0 - \rho_1$, é um inteiro, mostre que existem duas soluções linearmente independentes da forma

$$w_0(z) = z^{\rho_0} \varphi_0(z), \quad w_1(z) = z^{\rho_0} c \varphi_0(z) \log z + z^{\rho_1} \varphi_1(z)$$

A derivada Schwarziana de w com respeito a z está definida por

$$[w]_z = \left(\frac{w''}{w'} \right)' - \frac{1}{2} \left(\frac{w''}{w'} \right)^2$$

onde as derivadas acima estão tomadas com respeito a z .

- d) Sejam w_1 e w_2 duas soluções linearmente independentes da equação

$$w''(z) + Q(z)w(z) = 0 \quad (*)$$

definidas e holomorfas num domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Mostre que $w(z) := \frac{w_1(z)}{w_2(z)}$, satisfaz a equação

$$[w]_z = 2Q(z) \quad (**)$$

em todos os pontos $z \in \Omega$ onde $w_2(z) \neq 0$. Reciprocamente, mostre que se $w(z)$ é uma solução de (**), holomorfa numa vizinhança de $z = z_0 \in \Omega$, então existem duas soluções linearmente independentes $u(z)$ e $v(z)$, de (*), definidas em Ω , tal que

$$w(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$$

Além disso, u e v são unicamente determinadas pela condição $v(z_0) = 1$.

- i) Mostre que a derivada Schwarziana é invariante pelo grupo de Möbius.
 e) Estude a equação de Bessel

$$z^2 w'' + zw' + (z^2 - \kappa^2)w = 0$$

onde κ é uma constante arbitrária. Mostre que $z = 0$ é uma singularidade regular-singular e que ∞ , não é uma singularidade regular-singular. Mostre que uma solução da equação de Bessel é a chamada *função de Bessel de primeiro tipo e ordem κ* , dada por

$$J_\kappa(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{\Gamma(\kappa + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\kappa+2n}$$

Obtenha também as seguintes relações de recorrência

$$J_{\kappa+1}(z) + J_{\kappa-1}(z) = \frac{2\kappa}{z} J_\kappa(z)$$

Conclua que $J_{1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \sin z$ e $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos z$

Além disso, obtenha a *representação integral de Schlöfli* para as funções de Bessel de primeiro tipo, usando a representação integral de Hankel para $\frac{1}{\Gamma(z)}$ (Veja item 22) j):

$$J_\kappa(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^\kappa \int_\gamma w^{-(\kappa+1)} e^{(w-z^2/(4w))} dw$$

- f) Considere a equação diferencial de Legendre

$$(z^2 - 1)w'' + 2zw' - n(n + 1)w = 0$$

onde n é um inteiro não negativo. Mostre que $z = \pm 1$ são pontos regulares singulares e que ∞ é também regular-singular. Encontre duas soluções linearmente independentes numa vizinhança do ∞ , mostrando que uma destas é um polinômio de grau n (chamado de *polinômio de Legendre*).

- g) Exercício-pesquisa: Uma equação *Fuchsiana* é aquela cujas singularidades são todas regulares singulares, inclusive no ∞ . Mostre que $z = \infty$ é uma regular singularidade, se $p(z)$ tem ao menos um zero simples no ∞ , e $q(z)$

tem ao menos um zero duplo no ∞ . Estude as equações Fuchsianas com uma ou duas singularidades. As equações de Riemann são as equações Fuchsianas com três pontos singulares. Elabore um estudo geral das equações Fuchsianas. Mostre que a equação diferencial hipergeométrica

$$z(1-z)w'' - ((a+b+1)z - c)w' - abw = 0$$

possui uma solução holomorfa numa vizinhança de $z = 0$, que vem a ser exatamente a série hipergeométrica $F(a, b, c, z)$ estudada no item 6).

***Aplicações adicionais do princípio
do máximo para funções holomorfas***

- 29) Mostre o seguinte teorema de Borel-Carathéodory (Veja refs. 15), 3): Se f é uma função holomorfa numa vizinhança do disco fechado $\overline{B}_R(0)$, de raio R , então para todo $r < R$, (Veja notação no item 24)k)

$$M(r) \leq \frac{2r}{R-r} \sup_R \Re f + \frac{R+r}{R-r} |f(0)|$$

- a) Seja f uma função inteira. Suponha que

$$\sup_R \Re f \leq AR^\sigma \quad A > 0 \quad \sigma > 0$$

para R suficientemente grande. Mostre que f é um polinômio de grau no máximo σ .

- b) Deduza o seguinte teorema de Hadamard: Se f é uma função inteira sem zeros satisfazendo $M(R) \leq A^{R^\sigma}$, para $A \geq 1$ e todo R suficientemente grande, então $f(z) = e^{p(z)}$, onde p é um polinômio de grau no máximo σ .
- c) Discuta as várias formas do teorema de Phragmén-Lindelöf. Veja as refs. 7), 18).

Família de funções meromorfas

- 30) Discuta os teoremas de Montel, Vitali e Picard. Veja refs. 3), 7), 9), 12), 18).
- a) Mostre que a família das funções holomorfas na bola unitária $B_1(0)$ com imagem em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ é normal.

- b) Mostre que o teorema de Vitali é equivalente ao teorema de Montel.
- c) Mostre que o teorema de Vitali pode ser aplicado na representação integral de funções holomorfas.
- d) Mostre o grande teorema de Picard a partir do teorema de Montel.
- e) Considere \mathcal{S} , a família das funções univalentes na bola unitária $B_1(0)$, satisfazendo $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ (cf. lista 8). Mostre que \mathcal{S} é compacta no conjunto de todas as funções contínuas em $B_1(0)$, com a topologia da convergência uniforme.
- i) Conclua que para cada $0 < r < 1$, existe uma constante $C(r)$, tal que se f é uma função univalente na bola unitária, então

$$\log \frac{|f'(z)|}{|f'(w)|} \leq C(r), \quad \forall z, w \in B_r(0)$$

Compare também com o *teorema de distorção de Koebe* estabelecido na lista 8.

- f) Exercício-pesquisa: Discuta os primeiros resultados na Dinâmica Complexa obtidos por Julia, usando o teorema de Montel. Veja ref. 19).
- 31) Discuta os espaços de Bergman, Hardy e Nevanlinna. Veja refs. 3), 7), 12), 18).
- 32) Discuta funções inteiras de *ordem finita*. Demonstre o teorema de Hadamard. Veja refs. 3), 7), 15), 18).

Funções multivalentes

- 33) Seja f uma função holomorfa definida num aberto U do semi-plano superior $\{\text{Im } z > 0\}$. Suponha que f se estenda continuamente ao intervalo $(-1, 1)$ do eixo real. Seja $f(1/2) = b$. Assuma que f leva o segmento aberto $(-1, 1)$, em dois segmentos de reta que se intersectam em b formando um ângulo de $\pi\alpha$. Mostre que f pode ser escrito numa vizinhança de $z = 1/2$ na seguinte forma

$$f(z) = b + (z - 1/2)^\alpha g(z)$$

onde $g(z)$ é holomorfa numa vizinhança de $z = 1/2$, e $g(1/2) \neq 0$.

- 34) Seja $\mathcal{D}^* := \{0 < |z| < 1\}$ o disco unitário perfurado no plano complexo \mathbb{C} . Seja $A(z)$ uma “função multivalente” em \mathcal{D}^* definida e holomorfa em todo

subconjunto *simplesmente conexo* $U \subset \mathcal{D}^*$. Suponha que $|A(z)|$ esteja bem definida em todo o disco perfurado \mathcal{D}^* , e que não se anula neste. A finalidade deste exercício é estudar a “cara” de A . Você vai precisar saber do conceito de *conjugada harmônica* e *períodos* largamente explorados na lista 9.

a) Considere a função harmônica $u = \log |A(z)|$, definida em \mathcal{D}^* . Seja

${}^*u = \int_{z_0}^z d^*u$, $\int_{S^1} d^*u = a \in \mathbb{R}$, onde *u é a conjugada harmônica de u de modo que $u + i^*u$ é uma “multi-função holomorfa”. Mostre que $C(z)$ definida por

$$C(z) := e^{2\pi/a(u + i^*u)}$$

está bem definida e é holomorfa em \mathcal{D}^* . Mostre que

$$A(z)|_U = e^{a/2\pi \log C(z)}|_U.$$

i) Suponha que 0 não é uma singularidade essencial de C . Mostre que $C(z) = z^p D(z)$, $p \in \mathbb{Z}$ onde $D(z)$ é uma função holomorfa que não se anula em $z = 0$. Conclua que $A(z)$ pode ser escrita da forma

$$A(z) = z^\mu B(z)$$

onde $B(z)$ é uma função holomorfa em \mathcal{D} que não se anula.

ii) Quando $z = 0$ é singularidade essencial de C , mostre com exemplos que $B(z)$ acima pode ter singularidade essencial em $z = 0$. Mostre que quando A pode se anular perto de $z = 0$, a função B acima pode ter uma singularidade essencial em $z = 0$, mostrando explicitamente com um exemplo que B pode se anular numa seqüência de zeros convergindo a $z = 0$.

BIBLIOGRAFIA

1. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variables I, II, III*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
2. Alan F. Beardon. *Iteration of rational functions*. Springer, 1999.
3. Einar Hille. *Analytic function theory I,II*. Chelsea, Nova York, 1982.

4. Einar Hille. *Lectures on ordinary differential equations*. Addison-Wesley, 1969.
5. Georges Valiron. *Théorie des fonctions*. Troisième édition, Masson, 1966.
6. Henri Cartan. *Teoria elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas*. Selecciones Científicas, Madrid, 1968.
7. John B. Conway. *Functions of one complex variable I, II*. Springer, 1995.
8. J. Gerretsen e G. Sansone. *Lectures on the theory of functions of complex variable I, II*. Wolters-Noordhoff Publishing Goningen 1969.
9. Lars Ahlfors. *Complex analysis*. Mc Graw-Hill, 1996.
10. Norman Levinson e Raymond M. Redheffer. *Complex variables*. Holden-Day, SãoFrancisco, 1970.
11. Patrice Tauvel. *Analyse complexe*. Exercices corrigés. Dunod, 1999.
12. Raghavan Narasimhan e Yves Nievergelt. *Complex analysis in one variable*. Birkäuser, 2001.
13. Reinhold Remmert. *Theory of complex functions*. Springer, 1991 (*Readinds in Mathematics*).
14. Reinhold Remmert. *Classical topics in complex function theory*. Springer, 1998.
15. Serge Lang. *Complex Analysis*. Fourth Edition, Springer, 1999.
16. Sristi Chatterji. *Cours d'analyse 2, Analyse complexe*. Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Suíça, 1997.
17. Stephen D. Fisher. *Complex variables*. Second Edition. Dover Public., N. Y, 1999.
18. Walter Rudin. *Real and complex analysis*. Mc Graw-Hill, 1987.
19. Welington de Melo. *Ferramentas mateáticas em dinâmica unidimensional*. Matemática universitária, No 29, 75-113, 2000.
20. Zeev Nehari. *Conformal maps*. Dover Publi., N. Y. 1975.