VCOMPLEXAS-2001.2–Lista 7

prof: Ricardo Sá Earp

SÍNTESE DE FUNÇÕES MEROMORFAS

Suplemento de séries

1) (*Lema da soma parcial de Abel*): Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}$ duas seqüências de números complexos, $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Coloquemos $A_n = a_0 + \cdots + a_n, n \geqslant 0$; então para $n \geqslant 0, k \geqslant 1$, temos que

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} a_j b_j = \sum_{j=n+1}^{n+k-1} A_j (b_j - b_{j+1}) - A_n b_{n+1} + A_{n+k} b_{n+k}$$

Deduza: $\sum_{n \geqslant 0} a_n b_n$ converge se $\sum_{n \geqslant 0} A_n (b_n - b_{n+1})$ converge e $\lim_{n \to \infty} A_n b_n$ existe.

a) (*Critério de Abel*) Da fórmula de Abel deduza que se $\sum_{n \geqslant 0} a_n$ é convergente e se $\{b_n\}$ é uma seqüência monótona limitada; então $\sum_{n \geqslant 0} a_n b_n$ converge.

b) (*Critério de Dirichlet*) Mostre que se a seqüência das somas parciais $\{A_n\}$ de $\sum_n a_n$é limitada e se a seqüência $\{b_n\}$ é uma seqüência real monótona tendendo a zero, então $\sum_{n \geqslant 0} a_n b_n$ converge.

Daí deduza o critério de Leibniz: Seja $\{\alpha_n\}$ uma seqüência monótona de números reais tendendo a zero, então $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \alpha_n$ converge. Dê exemplos de séries convergentes, mas não absolutamente convergentes.

Também deduza o seguinte:*Se* $\sum_n |b_n - b_{n+1}| < \infty$ *e se* $\sum_n a_n$ *converge então* $\sum_{n \geqslant 0} a_n b_n$ *converge.*

2) Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ seqüências de números reais estritamente positivos com
$\sum_n c_n < \infty, \sum_n d_n = \infty$.

a) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leqslant \frac{c_{n+1}}{c_n}, \qquad n \geqslant N,$$

então $\sum\limits_n a_n < \infty$.

b) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geqslant \frac{d_{n+1}}{d_n}, \qquad n \geqslant N,$$

então $\sum\limits_n a_n = \infty$.

Sugestão: Para o item a) observe que a seqüência $\{a_n/c_n\}$ é uma seqüência decrescente.

3) (*Critério de Kummer*): Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ seqüências de números reais estritamente positivos com $\sum_n d_n = \infty$.

a) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$ e um número $\rho > 0$ temos que

$$b_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} b_{n+1} \geqslant \rho > 0, \qquad n \geqslant N,$$

então $\sum\limits_n a_n < \infty$.

b) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$ temos que

$$\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{d_{n+1}} \leqslant 0, \qquad n \geqslant N,$$

então $\sum\limits_n a_n = \infty$.

Sugestão: Para o item b) veja o exercício anterior item b). Para o item a) observe que $w_n := a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geqslant a_n \rho > 0, n \geqslant N$. Também observe que $\sum_n w_n$ é convergente.

4) (*Critério de Raabe-Duhamel*). Guardando as notaçõesdo exercício anterior, tomando $b_n = n - 1 (n \geqslant 2)$ no exercício anterior e $d_n = 1/(n-1)$ no item b) obtém-se

$$\sum_n a_n < \infty \quad \text{se, para algum } \alpha > 1 \quad \text{e um } N \in \mathbb{N},\ n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) \geqslant \alpha,\ n \in N$$

$$\sum_n a_n = \infty \quad \text{se, para algum } N \in \mathbb{N},\ n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) < 1,\ n \in N$$

Em particular, se $\lim\limits_{n\to\infty} n\Big(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\Big) = L$ então $\sum_n a_n < \infty$ se $L > 1$ e $\sum_n a_n = \infty$ se $L < 1$. Mostre que se $L = 1$, todas as hipóteses podem ocorrer.

5) (*Critério de Gauss*) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais estritamente positivos tais que, para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^p}, \qquad n \geqslant N$$

onde $p > 1, \alpha \in \mathbb{R}$ e $\sup_{n \geqslant N} |\beta_n| < \infty$.

a) Mostre que $\sum\limits_n a_n < \infty$, se $\alpha > 1$ e $\sum\limits_n a_n = \infty$, se $\alpha \leqslant 1$.

Sugestão: Se $\alpha \neq 1$ utilize exercício anterior). Para $\alpha = 1$ utilize o exercício anterior com $1/d_n = (n-1)\log(n-1),\ n \geqslant 3$ verificando que

$$\lim_{n \to \infty} \Big(\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{d_{n+1}} \Big) = -1.$$

b) Seja $a \in \mathbb{C}$. Seja $z_n = \binom{a}{n}$, onde $\binom{a}{0} = 1,\ \binom{a}{1} = a$,

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\cdots(a-n+1)}{n!}, \qquad n \geqslant 1.$$

Mostre que $\sum\limits_n |z_n| < \infty$ se $\Re a > 0$ ou $a = 0$ e, $\sum\limits_n |z_n| = \infty$ se $\Re a \leqslant 0$, $a \neq 0$.

Sugestão: Considere

$$r_n = \Big| \frac{z_{n+1}}{z_n} \Big| = \Big| \frac{a-n}{n+1} \Big|$$

Quando $\Re a \neq 0$ aplique exercício anterior), verificando que

$$n(1 - r_n) = \frac{n}{1 + r_n} \cdot \frac{1 - |a|^2 + 2n(1 + \Re a)}{(n+1)^2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{n \to \infty} n(1 - r_n) = 1 + \Re a$$

Quando $\Re a = 0, a \neq 0, a = it, t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ e

$$r_n = \frac{n}{n+1} \Big(1 + \frac{t^2}{n^2} \Big)^{1/2}$$

verifica-se que

$$n^2 \big(r_n - 1 + \frac{1}{n} \big) = \frac{n^3}{n+1} \Big(\big(1 + \frac{t^2}{n^2} \big)^{1/2} - 1 \Big) + \frac{n^2}{n(n+1)} \to \frac{t^2}{2} + 1$$

O resultado agora segue do item a).

6) (*Série hipergeométrica*) Sejam $a, b, c \in \mathbb{C}$. Suponha que $-c \notin \mathbb{N}$. Então a série dada por

$$F(a,b,c,z) := 1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)b(b+1)}{2c(c+1)}z^2 + \cdots + \\ + \frac{a(a+1)\cdots(a+n-1)b(b+1)\cdots(b+n-1)}{n!c(c+1)\cdots(c+n-1)}z^n + \cdots$$

é chamada de *série hipergeométrica* e aparece na teoria das equações *Fuchsianas* de segunda ordem (Veja refs. 4) e 8).

Também aparecem na teoria das aplicações conformes, mais precisamente nos *triângulos Schwarzianos* e na *pavimentação do disco hiperbólico por triângulos geodésicos*(Veja ref. 20) .

a) Exercício-estudo (Veja ref. 20)): Estude as relações entre a *derivada Schwarziana* e as soluções de equações diferenciais lineares de segunda ordem cujos coeficientes são funções meromorfas. Estude as relações entre tais equações com a série hipergeométrica culminando na solução explícita do problema de se encontrar uma transformação conforme que leva o semi-espaço superior $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$ sobre um triângulo *hiperbólico* ou *curvilíneo*, cujos lados são arcos de círculos ("geodésicas no plano hiperbólico") de ângulos $\pi\alpha, \pi\beta, \pi\gamma$, satisfazendo a relação da geometria não -Euclideana: $\alpha + \beta + \gamma < 1$.
b) Mostre que a *série hipergeométrica* tem raio de convergência 1.
c) Se $\Re(a+b-c) < 0$, a série converge absolutamente para $|z| = 1$. *Sugestão* Aplique o critério de Gauss.

Cálculo dos resíduos, e etc...

7) (*Fórmulas de somatório*)

$$\sum f(n)$$

Seja f uma função holomorfa em $\mathbb{C}$, exceto por um número finito de singularidades. Suponha que nenhuma das singularidades seja um número inteiro. Seja $\gamma_n,\ n \in \mathbb{N}$ uma seqüência de curvas simples fechadas disjuntas das singularidades de f e que não passa pelos inteiros, satisfazendo a seguinte propriedade: Se $\mathcal{D}_n$ é o domínio delimitado por γ_n, então $\bigcup_n \mathcal{D}_n$ é uma exaustão de $\mathbb{C}$.

a) Mostre que

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\gamma_n}(\pi\cot\pi z)f(z)\,\mathrm{d}z = 0 \Rightarrow \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(n) = -\sum_{z\in\mathrm{Sing}\,(f)}\mathrm{Res}(g;z)$$

onde Sing (f) é o conjunto das singularidades de f.

b) Mostre que

$$\sup\{|\cot\pi z|;\ z\in\mathbb{C}\setminus\bigcup_{n\in\mathbb{Z}}B_\epsilon(n),\ 0<\epsilon<1/2\}<\infty$$

onde $B_\epsilon(n) := \{|z-n|<\epsilon\}$. Mostre uma limitação análoga para as seguintes funções $f(z) = 1/(\mathrm{e}^z-1), f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{tz}}{\mathrm{e}^z-1}(t\in[0,1]), f(z) = \sec z$.

c) Mostre que se f satisfaz a uma desigualdade do tipo

$$|f(z)|\leqslant\frac{M}{|z|^2}\qquad M>0$$

para $|z|$ suficientemente grande, então a hipótese do item a) será satisfeita. Exiba exemplos gerais disto.

d) Mostre que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{n^2+a^2} = \pi/a\frac{1+\mathrm{e}^{-2\pi a}}{1-\mathrm{e}^{-2\pi a}}$$

Conclua que $\displaystyle\sum_{1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi}{6}$.

Exiba outros exemplos de fórmulas de somatório do mesmo tipo.

e) Elabore uma análise parecida usando $\pi\csc\pi z$ para encontrar fórmulas de somatório para $\sum(-1)^n f(n)$.

8) (*Expansão de algumas funções meromorfas clássicas*)

Sejam $a_k,\ k=1,2,\ldots$ os pólos de uma função meromorfa definida num aberto $U\subset\mathbb{C}$. Suponha que a parte principal de f em a_k seja dada por

$$h_k(z) = \sum_{j=1}^{m_k}\frac{c_{kj}}{(z-a_k)^j}$$

a) Seja $B_\epsilon(a_n)$ um disco aberto ao redor de a_n, de raio ϵ suficientemente pequeno, contendo apenas um único pólo de f. Seja w um ponto de $B_\epsilon(a_n)\setminus\{a_n\}$. Mostre que

$$\operatorname{Res}\left(\frac{f(z)}{z-w}; a_n\right) = -h_n(w)$$

b) Seja γ é uma curva simples fechada positivamente orientada que é bordo de um domínio Ω interceptando o conjunto dos pólos de f apenas nos pontos $a_1, a_2, \ldots, a_m$. Mostre que se w é um ponto de Ω que não é um pólo de f, então

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(z)}{z-w}\,\mathrm{d}z = f(w) - \sum_1^m h_k(w)$$

Agora seja γ_N uma seqüência de curvas simples fechadas positivamente orientadas bordando domínios Ω_N formando uma exaustão de $\Omega \equiv \mathbb{C}$, com $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \cdots$. Suponhamos também que $\Omega_N \cap \{a_1, a_2, \ldots\} = \{a_1, \ldots, a_{nN}\}$. Mostre que se

$$\sup_{z\in[\gamma_N]} |f(z)| \longrightarrow 0 \qquad \text{quando} \quad N \to \infty$$

onde $[\gamma_N]$ é o traço de γ_N, então para $w \in \mathbb{C} \setminus \{a_1, a_2, \ldots\}$

$$f(w) = \lim_{N\to\infty} \sum_1^{nN} h_k(w)$$

Além disso mostre que se todos os pólos de f são simples deduz-se que a fórmula

$$f(w) = \lim_{N\to\infty} \sum_1^{nN} \frac{c_k}{w-a_z}$$

c) Agora suponha que f seja holomorfa em $z=0$. Mostre que se w não é um pólo de f tem-se que

$$w\int_{\gamma_N} \frac{f(z)}{z(z-w)}\,\mathrm{d}z \longrightarrow 0 \quad (n\to\infty) \Rightarrow f(w) = f(0) + \lim_{N\to\infty}\sum_1^{nN}(h_k(w) - h_k(0))$$

Sugestão Use a identidade $\dfrac{1}{z-w} = \dfrac{1}{z} + \dfrac{w}{z(z-w)}\cdot$ Deduza que se todos os pólos de f são simples então

$$f(w) = f(0) + \lim_{n\to\infty}\sum_1^{nN}\left(\frac{c_k}{w-a_k} + \frac{c_k}{a_k}\right)$$

Usando o item 7)b) deduza as seguintes expansões :

$$\sec z = 4\pi \sum_0^\infty \frac{(-1)^k(2k+1)}{(2k+1)^2\pi^2 - 4z^2}$$

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_1^\infty \frac{2z}{z^2 - k^2\pi^2}$$

$$\csc z = \frac{1}{z} + \sum_1^\infty \frac{(-1)^k 2z}{z^2 - k^2\pi^2}$$

$$\frac{1}{\mathrm{e}^z - 1} = \frac{-1}{2} + \frac{1}{z} + \sum_1^\infty \frac{2z}{z^2 + 4k^2\pi^2}$$

9) (*Soma de Gauss*) Este exercício deve ser com consulta. Veja por exemplo ref. 12) ou ref. 13). Mostra a fórmula de Gauss

$$\sum_0^{n-1} \mathrm{e}^{2\pi\nu^2/n} = \frac{1 + (-i)^n}{1 - i}\sqrt{n}$$

10) (*resíduo no infinito*) Considere f uma função holomorfa em $\mathbb{C}$ com finitas singularidades. O resíduo no infinito está definido por

$$\operatorname{Res}(f, \infty) := -\frac{1}{2\pi} \int_{|z|=R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

para R suficientemente grande.

a) Mostre que $\operatorname{Res}(f,\infty) = -a_{-1}$, onde a_{-1} é o coeficiente de $1/z$ no desenvolvimento de Laurent de f no infinito. Qual é a relação com o resíduo da função $-\frac{1}{\zeta^2} f(1/\zeta)$ na origem ?

b) Mostre que a soma dos resíduos de f na esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ é zero, concluindo que a soma dos resíduos de uma função meromorfa na esfera de Riemann é igual a zero. Mostre que o resíduo de uma função racional pode ser calculado via determinantes.

c) Calcule a integral

$$\int_{-1}^{1} \frac{2\sqrt{1-x^2}}{(\sqrt{2}-1)(1+x^2)}\,\mathrm{d}x = 2\pi$$

11) (*Teorema de Rouché*)

a) Use o teorema dos resíduos para estabelecer uma fórmula para contar zeros e pólos de uma função meromorfa. Aplique na dedução do teorema de Rouché para uma função *meromorfa*. Aplique Rouché para dar uma demonstração do teorema Hurwitz.

i) Mostre que se $\{a_n\}$ é uma seqüência decrescente de números reais positivos então $f(z) := \sum_0^\infty a_n z^n$ define uma função holomorfa sem zeros na bola unitária centrada na origem.

ii) Estude a equação

$$\tan z = az, \qquad a > 0$$

considerando os quadrados com vértice $n\pi(1+i), n\pi(-1+i), n\pi(-1-i), n\pi(1-i)$.

11) (*Funções inversas*) Suponha que f seja meromorfa num aberto que contenha um domínio Ω cujo bordo é uma curva simples fechada positivamente orientada γ, que não contém nem zeros nem pólos de f. Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_n$ e $b_1, b_2, \ldots, b_m$, respectivamente, os zeros e os pólos de f. Mostre que

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma g(z)\frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z = \sum_{j=1}^{n} g(a_j) - \sum_{k=1}^{m} g(b_k)$$

onde cada zero e cada pólo são contados de acordo com sua multiplicidade. Deduza os seguintes resultados

a) Seja $f(z)$ uma função holomorfa numa bola $B_\epsilon(0)$ centrada na origem de raio ϵ, tal que $f(0) = 0,\ f'(0) \neq 0$. Suponha que $f(z) \neq 0$ para $0 < |z| < \epsilon$. Seja C_r o círculo de raio r centrado na origem com $r < \epsilon$. Mostre que

$$g(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{C_r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{f(\zeta) - w}\,\mathrm{d}\zeta$$

define uma função holomorfa para $|w| < \min_\theta |f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|$. Para tais valores de w, $z = g(w)$ é a única solução da equação

$$f(z) = w$$

que tende a zero quando w tende a zero. Além disso mostre que

$$g(w) = \sum_0^\infty \frac{1}{2\pi i} \int_{C_r} \frac{\zeta f'(\zeta)}{(f(\zeta))^{n+1}}\, \mathrm{d}\zeta \quad w^n$$

sendo que a série converge uniformemente com respeito a ζ e w, desde que t percorra C_r e $|w| \leqslant c < \min_\theta |f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|$.

i) Considere $F(a, b, c, z)$ a série hipergeométrica dada no item 6). Mostre que a raíz da equação

$$z^3 + 3z - w = 0$$

que tende a zero quando $w \to 0$ é dada por uma série hipergeométrica.

b) Com as mesmas condições do item a) anterior mostre que se h é uma função holomorfa num aberto contendo a bola $B_\epsilon(0)$, então

$$h(g(w)) = h(0) + \sum_1^\infty \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} h'(z)(\psi(z))^n \Big|_{z=0} w^n$$

onde $\psi(z) = \dfrac{z}{f(z)}$. As séries obtidas nos itens a) e b) obtidas são chamadas de *séries de Lagrange.*

i) Escreva enunciados analogos aos dos itens a) e b) relativos a inversa da equação

$$w = f(z)$$

num ponto $w_0 = f(z_0)$ (note que em a) e b) $z_0 = w_0 = 0$)

ii) Escreva as expansões de Lagrange do item b) quando $f(z) = \dfrac{z}{\mathrm{e}^{2z}}$, e $g(z) = \mathrm{e}^{\lambda z}$.

iii) Exercício-pesquisa (Para fazer este exercício você precisa consultar refs. 1), 4) ou 8)): Mostre que os *polinômios de Legendre* aparecem naturalmente no estudo de certa série de Lagrange e mostre suas propriedades tais como: *Funções geradoras, fórmula de Rodrigues, ortogonalidade.* Mostre também que satisfazem uma certa equação de segunda ordem linear, com propriedades interessantes posto que esta é um caso especial das equações hipergeométricas.

c) Seja

$$F(z,w)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}a_{mn}z^m w^n,\ a_{00}=0 \quad \text{e} \qquad a_{01}\neq 0$$

sendo que a série dupla é absolutamnete convergente para $|z|\leqslant r_1$ e $|w|\leqslant r_2$. Mostre que existe uma única função holomorfa $f(z)$ numa vizinhança da origem, com $f(0)=0$ e

$$F(z,f(z))=0$$

nesta vizinhança. Além disso f pode ser representada por

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_C w\frac{F_w(z,w)}{F(z,w)}\,\mathrm{d}w$$

onde C é um círculo de raio r para $r<r_2$.

Sabe-se da álgebra que qualquer função simétrica das raízes de uma equação algébrica é expressa de maneira única como um polinômio nas somas das potências destas raízes. Use isto para mostrar o seguinte

d) Se f é uma função holomorfa na bola $B_\epsilon(0)$ e se 0 é um zero de ordem k de f em 0, então para valores pequenos de $|w|$, a equação

$$f(z)=w$$

tem k raízes $z_1(w),\dots,z_k(w)$, que tendem a zero, quando $w\to 0$. Além disso, estas raízes satisfazem uma equação algébrica de grau k

$$z^k+g_1(w)z^{k-1}+\cdots+g_k(w)=0$$

cujos coeficientes são funções holomorfas que tendem a zero quando $w\to 0$. Aproveite o momento para enunciar e demonstrar o *teorema de preparação de Weierstrass* e o *teorema das funções implícitas* para funções analíticas de duas variáveis complexas.

e) Nas hipóteses do item d) acima, mostre que existe uma função $h(\zeta))$, holomorfa para $|\zeta|$ suficientemente pequeno, tal que para cada valor pequeno fixado de w, as k determinações de $h(w^{1/n}$ representam as raízes $z_1(w),\dots,z_k(w)$, em alguma ordem. Quando w percorre um circuito fechado em torno da origem, as raízes são permutadas ciclicamente. Além disso, a generalização das séries de Lagrange no caso que 0 é um zero de ordem k, toma a seguinte forma ($f(z) = w$)

$$z = f^{-1}(w) = h(w^{1/n}) = \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}z^{n-1}} (\psi(z))^n \bigg|_{z=0} w^{n/k}$$

onde $\psi(z) = \dfrac{z}{f(z)^{1/k}}$.

12) (*Séries de funções trigonométricas clássicas*)

a) Mostre que

$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(z-n)^2}$$

comparando os pólos e parte principal das duas funões meromorfas acima, periodicidade e comportamento quando $|\mathrm{Im}(z)| \to \infty$.

b) Usando o resultado anterior mostre que

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{1}^{\infty} \frac{2z}{z^2 - n^2}$$

c) (*Caracterizações da função cotangente*)

i) Seja g uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ cujos pólos são exatamente os números inteiros. Suponha que para cada $n \in \mathbb{Z}$ a parte principal é $1/(z-n)$. Suponha ainda que g seja uma função ímpar e que satisfaça *fórmula de duplicação do ângulo*

$$2g(2z) = g(z) + g(z + \frac{1}{2})$$

Mostre que $g(z) = \pi \cot \pi z$. *Sugestão* Use o princípio do máximo na bola de raio 2 e centro 0.

Agora considere a equação diferencial de *Riccati*

$$w' + w^2 + 1 = 0$$

ii) Mostre que as funções $g(z) \equiv i$ e $g(z) = \cot z = i\dfrac{\mathrm{e}^{2iz} + 1}{\mathrm{e}^{2iz} - 1}$, satisfazem a equação diferencial acima.

iii) Mostre que se $w = g(z)$ é uma função meromorfa num domínio Ω tal que $w \not\equiv i$, então a *transformação de Cayley* $f(z) = \dfrac{w+i}{w-i}$, satisfaz a *equação linear* $f' = 2if$.

iv) Mostre que se g é uma função meromorfa numa vizinhança da origem, satisfazendo a equação de Riccati acima, *que tem um pólo na origem* , então $g(z) = \cot z$.

13) Considere Ω um domínio *qualquer* de $\mathbb{C}$. Seja f uma função meromorfa em Ω. Seja z_0 um ponto de Ω fixado e seja γ_z um caminho (seccionalmente C^1) ligando z_o à z onde $z \in \Omega$, que it nao passa nem pelos zeros nem pelos pólos de f

a) Em que condições a função

$$\int_{\gamma_z} f(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta$$

determina uma *bem definida* função meromorfa em Ω ? Exiba exemplos.

b) Em que condições a função

$$\int_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta$$

determina uma *bem definida* função meromorfa em Ω ? O que isto significa ?

c) Mostre que se f é holomorfa em Ω e não se anula em Ω então

$$f(z) = f(z_0)\,\mathrm{e}^{\int_{\gamma_z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\,\mathrm{d}\zeta}$$

O quê este resultado permite concluir sobre

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)}\,\mathrm{d}z$$

onde γ é uma curva fechada *qualquer* em Ω.

d) Suponha que toda função holomorfa em Ω que não se anula tenha uma raíz quadrada que é uma função holomorfa em Ω. Mostre que toda função holomorfa em Ω que não se anula tem também um logaritmo holomorfo em Ω.

14) Seja f uma função holomorfa numa vizinhança do disco fechado $\overline{B}_R(0)$. Mostre *a fórmula de Poisson*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(R\,\mathrm{e}^{i\theta})\, \Re\frac{R\,\mathrm{e}^{i\theta}+z}{R\,\mathrm{e}^{i\theta}-z}\,\mathrm{d}\theta$$

Tomando-se a parte real na identidade acima, obtém-se a *fórmula de Poisson para funções harmônicas.*

i) Usando continuação analítica e a fórmula de Poisson acima, ou outro método mostre a *fórmula integral de Schwarz*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Re f(R\,\mathrm{e}^{i\theta})\,\frac{R\,\mathrm{e}^{i\theta}+z}{R\,\mathrm{e}^{i\theta}-z}\,\mathrm{d}\theta + i\,\mathrm{Im}\, f(0) \qquad \forall\, z\in B_R(0)$$

15) Sejam f e g funções meromorfas em $\mathbb{C}$.

a) Mostre que se ambas f e g não tem pólos e satisfazem $f^2+g^2=1$, então existe uma função inteira h tal que $f(z)=\cos h(z)$ e $g(z)=\sin h(z)$.

b) Mostre que se f, g satisfazem $f^n+g^n=1,\ n\in\mathbb{N}, n\geqslant 3$ então , ou bem f e g tem pólos comuns, ou bem são constantes.

16) Discuta singularidades de uma função meromorfa.

a) Exiba um exemplo em que $z=0$ é uma singularidade que é um ponto de acumulação de pólos.

b) Exiba um exemplo em que $z=0$ é uma singularidade que é um ponto de acumulação de singularidades essenciais.

c) Exercício-pesquisa: Discuta fronteira natural e domínio de holomorfia. Dê um exemplo que o círculo unitário é a fronteira natural. Enuncie o teorema de “gap”de Hadamard. Veja refs. 3, 14, 18.

d) Exercício pesquisa: É possível encontrar uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ cujas singularidades sejam exatamente um conjunto de Cantor ? Veja refs. 3, 7.

17) Exercício pesquisa. Enuncie e demonstre as várias formas do teorema de Phragmen-Lindelöf. Veja refs. 7, 18.

Produtos infinitos

18) Exercício- pesquisa: Defina convergência de produtos infinitos. Para todo este item veja refs.7, 9, 14, 15, 16 e 18.

a) Investigue os vários resultados relacionando convergência de produtos infinitos com certas séries obtidas a partir do termo geral do produto.

c) Investigue o critério relacionando convergência de produtos infinitos com a série dos logaritmos do termo geral do produto.

d) Investigue convergência uniforme e normal de produtos infinitos e os vários critérios de convergência uniforme de produtos infinitos.

e) Investigue o resultado de *derivada logarítmica* e convergência de produtos infinitos.

i) Usando derivação logarítmica e a decomposição em somas parciais da função $\pi \cot \pi z$, mostre que

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z^2}{n^2}\right), \qquad z \in \mathbb{C}$$

i) Conclua o *produto de Wallis (1665)*

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{1}\frac{2}{3}\frac{4}{3}\frac{4}{5}\frac{6}{5}\frac{6}{7} \cdots = \prod_{1}^{\infty} \frac{2n}{2n-1} \cdot \frac{2n}{2n+1} \qquad (\pi = 3,14159\cdots)$$

f) (*Os produtos de Euler*) Mostre que

$$Q(z,q) := \prod_{1}^{\infty}(1 + q^n z)$$

converge normalmente m $\mathbb{C}$ para todo q com $|q| < 1$. Conclua que é uma função inteira em z.

i) Mostre a seguinte relação funcional:

$$Q(z,q) = (1 + qz)Q(qz,q)$$

para $|q| < 1$, e $z \in \mathbb{C}$. Conclua

ii)

$$\prod_{1}^{\infty}(1 + q^n z) = 1 + \sum_{1}^{\infty} \frac{q^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(1-q)(1-q^2)\cdots(1-q^n)} z^n$$

g) (*Teorema de representação de produto de Jacobi*) Investigue o seguinte teorema de Jacobi (veja ref. 14) Para cada q, $|q| < 1$, e cada $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ vale

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} z^n = \prod_{1}^{\infty} \big((1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1}z)(1 + q^{2n-1}z^{-1})\big)$$

deduza a representação da *série theta clássica*

$$\sum_{-\infty}^{\infty} q^{n^2} = 1 + 2\sum_{1}^{\infty} q^{n^2} = \prod_{1}^{\infty} \big((1 - q^{2n})(1 + q^{2n-1})^2\big)$$

i) Deduza o *teorema do número pentagonal de Euler*.

19) Exercício- pesquisa: Defina os *fatores de Weierstrass* e deduza o *teorema de produto de Weierstrass* em $\mathbb{C}$.
   a) Conclua o *teorema de fatoração de Weierstrass* para uma função inteira não identicamente nula.
   b) Conclua que toda função meromorfa em $\mathbb{C}$ pode ser representada como quociente de duas funções inteiras sem zeros comuns.
   c) Defina *produto canônico de Weierstrass* e exiba exemplos.
   d) Mostre o *teorema de produto* para funções holomorfas em abertos quaisquer de $\mathbb{C}$.
      i) Conclua o *teorema de fatoração* num domínio qualquer de $\mathbb{C}$.
      ii) Conclua que toda função meromorfa definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ pode ser representada como quociente de duas funções holomorfas em Ω, sem zeros comuns.

Seja f uma função holomorfa definida num domínio Ω. Dizemos que Ω é o *domínio maximal de existência* de f, se $\widehat{\Omega} \supset \Omega$ for um domínio para o qual existe uma função holomorfa $\widehat{f}$ com $\widehat{f}\Big|_{\Omega} = f$, então necessariamente $\widehat{\Omega} \equiv \Omega$.

   e) Mostre que todo domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$, é o *domínio maximal de existência* de uma função holomorfa em Ω.

Dizemos que um domínio Ω é um *domínio de holomorfia* de uma função holomorfa em Ω, se para todo ponto $z_0 \in \Omega$, o disco ao redor de z_0 no qual a série de Taylor de f converge está inteiramente contido em Ω.

20) Exercício-pesquisa: Mostre o seguinte teorema de existência de Runge- Besse: Para todo domínio Ω do plano complexo existe uma função holomorfa em Ω, tal que Ω é o domínio de holomorfia de f. Veja ref. 14.
   a) Discuta a relação entre domínio de holomorfia e domínio maximal de existência.
   b) Exiba exemplos de funções holomorfas e seus domínios de holomorfia.

Funções meromorfas especiais

A Função Theta de Jacobi

21) Considere a série Theta

$$\theta(z,\tau) = \sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2\pi\tau}\,\mathrm{e}^{2\pi i n z}$$

   a) Mostre que a série Theta é normalmente convergente para $\Re\tau > 0$, e todo $z \in \mathbb{C}$. Além disso mostre que satisfaz a equação do calor

$$\frac{\partial^2\theta}{\partial z^2} = 4\pi\frac{\partial\theta}{\partial\tau}$$

   $\Re\tau > 0$, e todo $z \in \mathbb{C}$.
   b) Mostre que $\theta(z+1,\tau) = \theta(z,\tau)$, e que $\theta(z+i\tau,\tau) = \mathrm{e}^{\pi\tau}\,\mathrm{e}^{-2\pi i z}\,\theta(z,\tau)$.

Dizemos que uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ é *elíptica* se possui dois períodos linearmente independente sobre os reais. Tal função também é chamada de duplamente periódica.

   c) Mostre que as funções

$$\theta(z+\frac{1}{2},\tau)/\theta(z,\tau) \qquad e \qquad \Big(\theta(z+\frac{1}{2},\tau)/\theta(z,\tau)\Big)^2$$

são funções elípticas, determinando os respectivos períodos.

   d) Seja f uma função inteira satisfazendo $f(z+1) = f(z)$, para todo $z \in \mathbb{C}$ (Dizemos que f tem período 1). Mostre que f pode ser expandida numa única *série de Fourier*

$$f(z) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n\,\mathrm{e}^{2\pi i n z}$$

onde $c_n = \displaystyle\int_0^1 f(z)\,\mathrm{e}^{-2\pi i n z}\,\mathrm{d}z$.

Mostre que para cada τ, $\Re\tau > 0$, a função $\mathrm{e}^{-z^2\pi\tau}\,\theta(i\tau z, z)$ é uma função inteira de período 1 e expansão de Fourier dada por

$$\mathrm{e}^{-z^2\pi\tau}\,\theta(i\tau z, z) = \frac{1}{\sqrt{\tau}}\sum_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{\frac{-n^2\pi}{\tau}}\,\mathrm{e}^{2\pi i n z}$$

i) Conclua as fórmulas de transformação para a função Theta

$$\theta(z, \frac{1}{\tau}) = \sqrt{\tau}\,\mathrm{e}^{-z^2\pi\tau}\,\theta(i\tau z, \tau) \qquad z \in \mathbb{C},\ \Re\tau > 0$$
$$\theta(\frac{1}{\tau}) = \sqrt{\tau}\theta(\tau)$$

A função Gamma

22) Considere o *produto*

$$F(z) = z\,\mathrm{e}^{\gamma z}\prod_{1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)\mathrm{e}^{-\frac{z}{n}}$$

a) Mostre que o produto acima define uma função inteira $F(z)$, cujos zeros são precisamente os inteiros negativos e a origem. Mostre ainda que

$$\gamma = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n\right)$$

O número γ é chamada de *constante de Euler*,$\gamma = 0,5772156\cdots$.

b) Mostre as seguintes relações funcionais

$$F(z) = zF(z+1)$$
$$\pi F(z)F(1-z) = \sin\pi z$$

c) Mostre a seguinte *fórmula de multiplicação*

$$(2\pi)^{(k-1)/2}F\left(\frac{1}{k}\right)F\left(\frac{2}{k}\right)\cdots F\left(\frac{k-1}{k}\right) = \sqrt{k} \qquad k = 2, 3\ldots$$

e) Mostre que a função Gamma definida por $\Gamma(z) = \dfrac{1}{F(z)}$ é uma função meromorfa que não se anula, os pólos de $\Gamma(z)$ são precisamente os inteiros negativos e a origem, todos estes são pólos simples; e $\Gamma(z)$ satisfaz a seguinte relação funcional

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \qquad \text{com} \quad \Gamma(1) = 1$$

i) Mostre que
$$\mathrm{Res}(\Gamma, -\mathrm{n}) = \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}, \quad \mathrm{n} \in \mathbb{N}$$
Note que a equação funcional acima não caracteriza a função Gamma. Por quê ?

ii) Mostre a *representação produto de Gauss*

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)}$$

iii) Mostre que $\Gamma(z)$ é limitada em toda faixa fechada vertical $\{0 < a \leqslant \Re z \leqslant b\}$.

f) Mostre a *fórmula de suplemento de Gauss*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}$$

i) Mostre que
$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$$

ii) Mostre o cálculo de Raabe (1843)

$$\int_0^1 \log \Gamma(t)\, \mathrm{d}t = \log \sqrt{2\pi}$$

Sugestão É preciso mostrar primeiramente que

$$\int_0^1 \log \sin \pi t\, \mathrm{d}t = -\log 2$$

Para demonstrar a fórmula acima (que também aparece na dedução da *fórmula de Jensen*) use a fórmula de *duplicação do seno*: $\sin 2\pi z = 2 \sin \pi z \sin \pi(z + \frac{1}{2})$.

Para concluir, use a fórmula de suplemento de Euler.

g) Encontre a representação em séries da derivada logarítmica $\dfrac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)}$. Encontre também relações funcionais para esta função . Mostre que $\Gamma(z)$ é *convexa logarítmica*, i .e $\log\Gamma$ é convexa em $(0,\infty)$.

h) Mostre o *teorema de unicidade de Wielandt (1939)* a função Γ é a única função holomorfa no semi-plano à direita $\Re z > 0$, satisfazendo $\Gamma(1) = 1$, satisfazendo a relação funcional $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, e sendo limitada na faixa $\{1 \leqslant \Re z < 2\}$. *Sugestão* Suponha que exista uma função g com as propriedades dadas. Mostre que a diferença $f(z) = g(z) - \Gamma(z)$ é uma função inteira limitada na faixa $\{0 \leqslant \Re z \leqslant 1\}$. Aplique o teorema de Liouville à função $f(z)f(1-z)$.

Investigue o *teorema de unicidade de Bohr-Mollerup* (1922): Este diz que a relação funcional $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z),\ z > 0$, o fato que $\Gamma(1) = 1$, e o fato que $\Gamma(z)$ é *convexa logarítmica* caracterizam a função Gamma. Veja refs. 7), 14).

ı) Mostre o teorema de *representação de Euler* A integral $\int\limits_0^\infty t^{z-1}\, \mathrm{e}^{-t}\, \mathrm{d}t$, converge uniformemente e absolutamente à $\Gamma(z)$ em toda faixa vertical fechada $\{0 < a \leqslant \Re z \leqslant b\}$.

i) Use a fórmula acima para calcular

$$\int_0^\infty x^{2n}\, \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\Gamma(n+1/2)}{2}$$

Conclua que $\displaystyle\int_0^\infty \mathrm{e}^{-x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Considere $r > 0$ e $c+di \in C_r,\ c < 0, d > 0$ onde C é o círculo de raio r centrado na origem. Seja α o arco orientado de C_r saindo de $c-di$ e chegando à $c+di$. Seja α_1 a semi-reta orientada horizontal, inteiramente contida no segundo quadrante, partindo de $c+di$. Seja α_2 a semi-reta orientada, inteiramente contida no terceiro quadrante, chegando em $c-di$. Considere o *caminho fechada* $\gamma := a_2 + \alpha + \alpha_1$.

j) Mostre que $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma w^{-z}\, \mathrm{e}^{w}\, \mathrm{d}w$, converge uniformemente em compactos e absolutamente em $\mathbb{C}$ a uma função inteira h, satisfazendo $h(1) = 1$ e

$h(-n) = 0,\ n \in \mathbb{N}$. Além disso, mostre que $h(z)\,\mathrm{e}^{-\pi|\operatorname{Im} z|}$ é limitada em toda faixa $\{a \leqslant \Re z \leqslant b\}$. *Sugestão* Mostre que se β é um segmento vertical orientado ligando um ponto do traço de α_2 a um ponto do traço de α_2, em $\Re z = -t$, então $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{\beta} w^{-m}\,\mathrm{e}^{w}\,\mathrm{d}w = 0, \forall m \in \mathbb{Z}$. Aplique o teorema dos resíduos para demonstrar que os valores de h na origem e nos inteiros negativos são os desejados.

i) Mostre as representações integrais de Hankel:

$$\frac{1}{\Gamma(z)} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} w^{-z}\,\mathrm{e}^{w}\,\mathrm{d}w \qquad z \in \mathbb{C}$$

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2i\sin \pi z}\int_{\gamma} w^{z-1}\,\mathrm{e}^{w}\,\mathrm{d}w \qquad z \in \mathbb{C}\setminus\{-1,-2,-3,\ldots\}$$

k) Mostre que a função

$$B(z,w) = \int\limits_{0}^{1} t^{w-1}(1-t)^{z-1}\,\mathrm{d}t$$

é holomorfa em $z \in \{\Re z > 0\}$, para cada $w \in \{\Re w > 0\}$ fixado. Idem trocando-se os papéis de z e w. A função $B(z,w)$ é chamada de função Beta de Euler.

i) Mostre a identidade de Euler

$$B(z,w) = \frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(z+w)} \qquad \forall z \in \Re z > 0, w \in \Re w > 0$$

Sugestão Fixe $w \in \{\Re w > 0\}$, e aplique o teorema de unicidade. Para tal você terá que demonstrar antes algumas propriedades quase diretas da função Beta de Euler.

l) Exercício-pesquisa: Investigue as fórmulas de Stirling para a função Gamma:

$$\Gamma(z) \sim \sqrt{2\pi} z^{z-1/2}\,\mathrm{e}^{-z} \qquad \text{quando} \quad |z| \to \infty \ |\arg z| \leqslant \pi - \delta,\ 0 < \delta < \pi$$

Conclua:

$$n! = \sqrt{2\pi} n^{n+\frac{1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n}\,\mathrm{e}^{a_n}$$

onde $a_n \longrightarrow 0$ (quando $n \to \infty$).

A função Zeta de Riemann

23) Mostre que a *função Zeta de Riemann* definida por

$$\zeta(z) = \sum_1^{\infty} n^{-z}$$

é holomorfa em $\{\Re z > 1\}$.

a) Exercício-pesquisa: Mostre que a função Zeta de Riemann pode ser definida para ser uma função meromorfa no plano complexo $\mathbb{C}$, com um único pólo simples em $z = 1$ e $\mathrm{Res}(\zeta, 1) = 1$. Para $z \neq 1$, a função ζ satisfaz a relação funcional de Riemann (Veja refs. 7), 15), 16))

$$\zeta(z) = 2(2\pi)^{z-1}\Gamma(1-z)\zeta(1-z)\sin(\frac{\pi z}{2})$$

i) Mostre que $\zeta(z) = 0$ para $z = -2, -4, -6, \ldots$. Mostre também que ζ não tem outros zeros fora da faixa fechada *crítica* $\{0 \leqslant \Re z \leqslant 1\}$.

A hipótese de Riemann afirma que um zero de ζ na faixa crítica ocorre apenas na reta vertical $\Re z = \frac{1}{2}$. É sabido que nesta reta vertical ζ possui uma infinidade de zeros (Hardy, 1914).

b) Exercício-pesquisa: Mostre o teorema de Euler: Se $\Re z > 1$ então

$$\zeta(z) = \prod_1^{\infty} \left(\frac{1}{1 - p_n^{-z}} \right)$$

onde $\{p_n\}$ é a seqüência de números primos.

Fórmula de Jensen

24) Seja f uma função holomorfa em $B_1(0)$, a bola aberta de raio 1, centrada na origem. Suponha que $f(0) \neq 0$. Seja $a_1, a_2, \ldots, a_n$, os zeros de f (aparecendo com suas respectivas multiplicidades) na bola de raio r, centrada na origem $B_r(0)$.

Mostre a *fórmula de Jensen*

$$\log|f(0)| + \log\frac{r^n}{|a_1 a_2 \cdots a_n|} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(r\,e^{i\theta})|\,d\theta$$

Quando f tem zeros no círculo de raio r, a integral direita da desigualdade é uma integral imprópria. *Sugestão* Mostre a fórmula quando f não tem zeros no disco fechado de raio r. Em seguida demonstre que

$$\int_0^{2\pi} \log|1 - e^{i\theta}|\, d\theta = 0$$

Uma maneira de demonstrar o fato acima é deduzir a seguinte identidade (veja uma outra resolução nas refs. 9), 15) e 18)) :

$$\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \log|1 - e^{i\theta}|\, d\theta = \pi \log 2 + \int_0^{\pi} \log \sin\theta\, d\theta$$

mas a última integral à direita da igualdade logo acima já foi calculada antes. É preciso tomar certa precaução quando f se anula no círculo $C_r = \partial B_r(0)$ de raio r : Considere a função

$$g(z) := f(z) \prod_1^n \frac{\overline{a_k} z - r^2}{r(z - a_k)} \prod_1^m \frac{b_j}{b_j - z}$$

onde $b_1, b_2, \ldots, b_m$, são os zeros de f em C_r. Mostre que quando f não se anula em C_r (como ocorre nas aplicações), a demonstração se simplifica consideravelmente.

a) Conclua a *desigualdade de Jensen*

$$|f(0)| \leqslant |a_1 a_2 \cdots a_n| |f|_{B_1(0)}$$

i) Conclua que se f é uma função holomorfa ($f \not\equiv 0$) e *limitada* em $B_1(0)$,e se $a_1, a_2, \ldots,$ é a seqüência de zeros de f, contados com multiplicidade, então

$$\sum (1 - |a_n|) < \infty \qquad \text{(condição de Blaschke)}$$

ii) Seja $\{a_1, a_2, \ldots\}$ um subconjunto enumerável de $B_1(0)$, tal que $\sum(1 - |a_n|) = \infty$. Mostre que se f e g são duas funções holomorfas e limitadas em $B_1(0)$, então , se $f(a_j) = g(a_j),\ j = 1, 2, \ldots$ tem-se que $f \equiv g$.

Seja $\{a_n\}$, uma seqüência na bola $B_1(0)$. O *produto de Blaschke* está definido por

$$B(z) = z^k \prod_1^\infty \frac{z - a_n}{\overline{a_n} z - 1} \cdot \frac{|a_n|}{a_n}, \qquad z \in B_1(0)$$

onde k é um inteiro não negativo

b) Mostre que se $\sum (1 - |a_n|) < \infty$, então o produto de Blaschke $B(z)$ define uma função holomorfa e limitada na bola $B_1(0)$, cujos zeros são exatamente os pontos a_n (a origem também é um zero se $k > 0$.)

Mostre que não existe uma função holomorfa em $B_1(0)$, que se anula, com um zero de ordem n, nos pontos $1 - 1/n^2$.

i) Conclua que dada uma função holomorfa limitada em $B_1(0)$, existe um produto de Blaschke $B(z)$ e uma função holomorfa g em $B_1(0)$, tal que $f = \mathrm{e}^g \cdot B$.

c) Mostre que a equivalente condição de Blaschke no semi-plano à direita $\{\Re z > 0\}$ é dada por

$$\sum \frac{\Re a_n}{|1 + a_n|^2} < \infty$$

Definimos $\log^+ t = \log t$, se $t \geqslant 1$, e $\log^+ t = 0$, se $0 < t < 1$. Observe que $\log t = \log^+ t - \log^+(1/t)$. A *família de Nevanlinna*, denotada por $\mathcal{N}$, é o conjunto de funções holomorfas em $B_1(0)$, satisfazendo

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|\, \mathrm{d}\theta < \infty$$

c) Mostre que se $f \in \mathcal{N}$ ($f \not\equiv 0$), e $a_1, a_2, \dots$ são os zeros de f com suas multiplicidades, então

$$\sum (1 - |a_n|) < \infty \qquad \text{(condição de Blaschke)}$$

Seja f uma *função inteira*. Definimos $M(r) = \sup_\theta |f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|, \quad 0 < r < \infty$. Seja $n(r)$, o número de zeros de f no disco fechado $\overline{B}_r(0)$.

d) Suponha que $f(0) = 1$. Mostre que

$$n(r) \log 2 \leqslant \log M(r)$$

i) Conclua que se $M(r) < \mathrm{e}^{Ar^k}$, para $A > 0, k > 0$ e r suficientemente grande, então

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log n(r)}{\log r} \leqslant k$$

Mostre com um exemplo que a igualdade no limite acima pode ser atingida.

Considere f uma função meromorfa no disco fechado $\overline{B}_r(0)$. Seja c um zero ou pólo de *ordem* $m > 0$. Definimos

$$n_f(c) = \mathrm{ord}_c(f) := m \quad \text{se } c \text{ é um zero}, \quad -m \quad \text{se } c \text{ é um pólo},$$
$$0 \text{ quando } c \text{ não é zero nem pólo}$$

Suponha que $f(z) = c_f z^m +$ *termos de maior ordem*, numa vizinhança da origem. Ou seja f tem ordem m (segundo a definição acima) , i .e $n_f(0) = m$.

f) Seja f uma função meromorfa e não constante no disco fechado $\overline{B}_r(0)$. Mostre a seguinte versão da *fórmula de Jensen generalizada*

$$\log|c_j| + \sum_{c\in B_r(0),\ c\neq 0} n_f(c)\log\frac{r}{|a|} + n_f(0)\log r = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta$$

g) Exercício-pesquisa: Investigue a *fórmula de Poisson-Jensen* para $\log|f(z)|$ e $\log f(z)$. Veja refs 1), 9), 15), 18).

Vamos fazer uma pequena incursão na *teoria de Nevanlinna* (Veja refs 3), 15)).

Defina-se $n_f^+(0) = \max(0, n_f(0))$. Defina-se também

$$N_f(\infty, R) = \sum_{\substack{a\in B_R(0), a\neq 0\\ f(a)=\infty}} -(\mathrm{ord}_a f)\log\frac{R}{|a|} + n_{1/f}^+(0)\log R$$

$$N_f(0, R) = \sum_{\substack{a\in B_R(0), a\neq 0\\ f(a)=0}} (\mathrm{ord}_a f)\log\frac{R}{|a|} + n_f^+(0)\log R$$

h) Mostre que a fórmula de Jensen generalizada pode ser escrita da forma

$$\log|c_f| = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|f(R\,\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{e}\theta + N_f(\infty, R) - N_f(0, R)$$

Agora seja f uma função meromorfa em $\overline{B}_R$. Para $r < R$, define-se

$$m_f(r) = \int_0^{2\pi} \log^+ |f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta \qquad \textit{função proximidade}$$

e

$$G = G^{\infty}_{R,f}(z) = \prod_{\substack{a\in B_R\\ f(a)=\infty}} G_R(z,a)^{-\operatorname{ord}_a f}$$

onde $G_R(z,a) := \dfrac{R^2 - \overline{a}z}{R(z-a)}$.

i) Mostre as seguintes propriedades da função proximidade ($f_1, f_2, \ldots, f_n$ são funções meromorfas)

$$m_{f_1 f_2} \leqslant m_{f_1} + m_{f_2}$$
$$m_{f_1+\cdots+f_n} \leqslant m_{f_1} + \cdots + m_{f_n} + \log n$$

ı) Mostre que

$$m_G(r) = N_f(\infty, R) - N_f(\infty, r)$$

A *função altura de Nevanlinna* está definida por

$$T_f(r) = m_f(r) + N_f(\infty, r)$$

j) Mostre a versão da fórmula de Jensen generalizada de Nevanlinna

$$T_{1/f}(r) = T_f(r) - \log |c_f|$$

Agora defina-se $n_f(0,r)$ como sendo o número total de zeros na bola aberta $B_r(0)$, de raio r, contados com suas multiplicidades.

Seja $N_f(b,r) = N_{f-b}(0,r)$ (Veja item g) acima).

k) Exercício-pesquisa: Mostre o seguinte *teorema de Cartan* (Veja ref. 15)) . Se f é uma função inteira com $f(0) \neq 0$, então

$$m_f(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} N_f(\mathrm{e}^{i\theta}, r)\,\mathrm{d}\theta + \log^+ |f(0)|$$

Conclua que m_f é uma função crescente de r

l) Mais geralmente prove o seguinte *teorema de Cartan*: Se $f(z)$ é meromorfa em $\{|z| < R \leqslant \infty\}$,e $f(0) \neq \infty$ (Veja ref. 3))

$$T_f(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_f(\mathrm{e}^{i\theta}, r)\,\mathrm{d}\theta + \log^+ |f(0)|$$

Lembremos a definição : $M(r) = \sup_\theta |f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|, \quad 0 < r < \infty.$

Defina $M_f(r) = \log M(r)$.

m) Mostre que se f é uma função inteira, então para $r < R$

$$M_f(r) \leqslant \frac{R+r}{R-r} m_f(R)$$

Em particular, conclua que $M_f(r) \leqslant 3m_f(2r)$. *Sugestão* Quando f não se anula, aplique a fórmula de Poisson à função $\log |f(z)|$. No caso geral use a fórmula de Poisson-Jensen.

i) Mostre que a desigualdade acima vale para funções holomorfas na bola unitária $B_1(0)$, impondo que $r < R < 1$. Mostre com isso que a família de funções holomorfas definida na bola unitária satisfazendo $m_f(r) < A$, $\forall\ 0 < r < 1$ para $A > 0$, é *normal*.

ii) Conclua que se f é uma função inteira, e se m_f fica limitada, quando $r \to \infty$, então f é constante. Mostre que se existe uma constante k tal que $m_f(R_j) \leqslant k \log R_j$, para uma seqüência de números tal que $R_j \to \infty (j \to \infty)$, então f é um polinômio de grau no máximo k.

n) Exercício-pesquisa: Seja f uma função meromorfa em $\{|z| < R \leqslant \infty\}$, $a \in \mathbb{C}$. Deduza o *primeiro teorema fundamental de Nevanlinna* (Veja refs. 3), 15))

$$T_f(r) = T_{f-a}(r) + O_a(1) \qquad 0 < r < R$$

onde $|O_a(1)| \leqslant \log^+ |a| + \log 2$.

Miscelânea

O teorema de Mittag-Leffler

25) Exercício-pesquisa: Enuncie e demonstre o *teorema de Mittag-Leffler no plano complexo* $\mathbb{C}$ (Veja ref. 9)).

a) Exiba séries de Mittag-Leffler canônicas: Séries de Eisenstein, série derivada logarítmica da função $\Gamma(z)$, série de Eisenstein-Weierstrass) Veja ref. 14)).

b) Enuncie e demonstre o teorema de Mittag-Leffler para abertos arbitrários (Veja refs. 14), 18)).

c) Mostre o *teorema de oscilação de Mittag-Leffler* (Veja ref.14)). Conclua o *teorema de interpolação para funções holomorfas*.

d) Conclua o *lemma de Wedderburn*: Se f e g são duas funções holomorfas num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$, *relativamente primas*, i. e sem zeros comuns, então existem funções holomorfas a e b tal que

$$af + bg = 1$$

Na verdade a pode ser escolhida de modo a não se anular em Ω.

O teorema de Runge

26) Exercício-pesquisa: Mostre o *teorema geral de aproximação de Runge* (Veja refs. 7), 14), 18)).

a) Deduza do teorema de Runge, uma formulação do teorema de Mittag-Leffler.

b) Mostre que o teorema de Runge implica no teorema geral de Cauchy para domínios simplesmente conexos.

c) Prove a seguinte versão do teorema de Runge (Seja $\{D_n\}$ uma seqüência de círculos fechados concêntricos, de modo que D_n reside no interior de D_{n+1} e a união é $B_1(0)$, o disco aberto unitário centrado na origem. Em D_n escolha um compacto K_n contido no interior de D_n, porém não tocando D_{n-1}. Suponha que cada K_n tenha um complemento conexo no plano complexo $\mathbb{C}$. Aplique o teorema de Runge para mostrar que qualquer função holomorfa definida numa vizinhança da união dos K_n' s pode ser approximada nesta união por funções analílicas definidas em $B_1(0)$. *Sugestão* (Veja o livro de Kenneth Hoffman, *Banach spaces of analytic functions*, Prentice-Hall, 1962). Dados f e ϵ aproxime f *em* D_1 por um polinômio p_1, uniformemente relativo a $\epsilon/2$. Escolha um polinômio p_2

que aproxima p_1 em D_1 uniformemente relativo a $\epsilon/4$ e f em K_2 uniformemente relativo a $\epsilon/4$. Então aproxime p_2 em D_2 e f em K_3 por p_3 uniformemente relativo a $\epsilon/8$. Mostre que a seqüência $\{p_n\}$ converge à uma função holomorfa em $B_1(0)$ aproximando como desejado f.

i) Moste que pode ser construída uma função analítica no disco aberto unitário $B_1(0)$ que não possua limite radial em algum ponto do círculo unitário (Compare com o teorema de Fatou, veja refs. 7), 18).

ii) Mostre que pode ser construída uma seqüência de funções analíticas no disco aberto unitário $B_1(0)$ que convergem ponto a ponto à zero, mas não uniformemente.

iv) (Veja ref. 14) Mostre que existe uma seqüência de polinômios p_n com as seguintes propriedades

1) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n(0) = 1, \ \lim\limits_{n\to\infty} p_n(z) = 0, \quad \forall \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$

2) $\lim\limits_{n\to\infty} p_n^{(k)}(z) = 0, \quad \forall \quad z \in \mathbb{C}, \quad (\forall k \in \mathbb{N}).$

3) Toda seqüência $p_1^{(k)}, p_2^{(k)}, \ldots$ $(k \in \mathbb{N})$, converge uniformemente em compactos em $\mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}, x \geqslant 0\}$, mas nenhuma destas seqüência converge uniformemente em compactos em nenhuma vizinhança de um ponto $x \geqslant 0$.

Funções elípticas

27) Exercício-pesquisa (Veja refs 3), 8)): Defina função elíptica, reticulado, domínio fundamental. Estabeleça as propriedades básicas das funções elípticas, em particular, demonstre o *lema de Abel*. Defina a função $\wp(z)$ de Weierstrass e estabeleça suas propriedades básicas. Defina a função $\zeta(z)$ de Weierstrass e deduza suas propridades básicas. Deduza a *relação de Legendre*. Defina a função $\sigma(z)$ de Weierstrass. Encontre os zeros de $\wp'(z)$.

a) Mostre a expressão de toda função elíptica em termos de $\wp(z)$ e $\wp'(z)$.

b) Mostre que $\wp(z)$ satisfaz uma certa equação diferencial de primeira ordem.

c) Mostre o *teorema de adição* para a função $\wp(z)$ e para $\zeta(z)$.

d) Defina e discuta as funções Theta de Jacobi. Mostre a representação das funções Theta como um produto infinito. Calcule a derivada logarítmica das funções Theta de Jacobi.

e) Defina e estude as funções *sinus amplitudinis*, *cosinus amplitudinis* e *delta amplitudinis* de Jacobi. Mostre os teoremas de adição para tais funções . Defina a função Zeta de Jacobi .

Equações singulares regulares de segunda ordem

28) Exercício-pesquisa (Veja refs. 4), 8)): Defina equação linear homogênea cujos pontos singulares (pontos singulares isolados de algum coeficiente (que são funções meromorfas)) são *singulares-regulares*.

a) Mostre o *teorema de Fuchs* que diz que uma condição necessária e suficiente para que uma singularidade isolada de uma equação diferencial linear de primeira ordem

$$w' + p(z)w = 0$$

seja regular-singular é que esta singularidade seja no máximo um pólo simples do coeficiente $p(z)$.

b) Mostre o *teorema de Fuchs* que diz que uma condição necessária e suficiente para singularidade isolada da equação

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0$$

seja regular-singular é que seja no máximo um pólo simples de $p(z)$, e no máximo um pólo duplo do coeficiente $q(z)$.

i) Defina e estude as propriedades do *Wronskiano*. Mostre que o Wronskiano satisfaz uma equação diferencial de primeira ordem e integre tal solução. O que acontece quando $p(z) \equiv 0$?

Considere a *equação indicial*

$$\rho(\rho - 1) + p_{-1}\rho + q_{-2} = 0$$

onde p_{-1} e q_{-2} são dados pelos seguintes desenvolvimentos de Laurent de p e q em $z = 0$

$$p(z) = \frac{p_{-1}}{z} + p_0 + p_1 z + \cdots$$
$$q(z) = \frac{q_{-2}}{z^2} + \frac{q_{-1}}{z} + q_0 + q_1 z + \cdots$$

c) Exercício-pesquisa : Suponha que $z = 0$ seja um ponto regular-singular da equação diferencial de segunda ordem do item b) acima. Sejam ρ_0 e ρ_1 as raízes da equação indicial com $\rho_0 \geqslant \rho_1$, caso as raízes forem reais. Assuma que a diferença $\rho_0 - \rho_1$, não seja um inteiro. Mostre que neste caso existem duas soluções linearmente independentes da forma

$$w_0(z) = z^{\rho_0}\varphi_0(z), \qquad w_1(z) = z^{\rho_1}\varphi_1(z)$$

onde φ_0 e φ_1, são holomorfas na origem. Quando $\rho_0 - \rho_1$, é um inteiro, mostre que existem duas soluções linearmente independentes da forma

$$w_0(z) = z^{\rho_0}\varphi_0(z), \qquad w_1(z) = z^{\rho_0}c\varphi_0(z)\log z + z^{\rho_1}\varphi_1(z)$$

A *derivada Schwarziana* de w com respeito a z está definida por

$$[w]_z = \left(\frac{w''}{w'}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{w''}{w'}\right)^2$$

onde as derivadas acimas estão tomadas com respeito a z.

d) Sejam w_1 e w_2 duas soluções linearmente independentes da equação

$$w''(z) + Q(z)w(z) = 0 \qquad (*)$$

definidas e holomorfas num domínio simplesmente conexo $\Omega \subset \mathbb{C}$. Mostre que $w(z) := \dfrac{w_1(z)}{w_2(z)}$, satisfaz a equação

$$[w]_z = 2Q(z) \qquad (**)$$

em todos os pontos $z \in \Omega$ onde $w_2(z) \neq 0$. Reciprocamente, mostre que se $w(z)$ é uma solução de $(**)$, holomorfa numa vizinhança de $z = z_0 \in \Omega$, então existem duas soluções linearmente independentes $u(z)$ e $v(z)$, de $(*)$, definidas em Ω, tal que

$$w(z) = \frac{u(z)}{v(z)}$$

Além disso, u e v são unicamente determinadas pela condição $v(z_0) = 1$.

i) Mostre que a derivada Schwarziana é invariante pelo grupo de Möbius.

e) Estude a *equação de Bessel*

$$z^2w'' + zw' + (z^2 - \kappa^2)w = 0$$

onde κ é uma constante arbitrária. Mostre que $z = 0$ é uma singularidade regular-singular e que ∞, não é uma singularidade regular-singular. Mostre que uma solução da equação de Bessel é a chamada *função de Bessel de primeiro tipo e ordem* κ, . dada por

$$J_\kappa(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \cdot \frac{1}{\Gamma(\kappa + n + 1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{\kappa+2n}$$

Obtenha também as seguintes relações de recurrência

$$J_{\kappa+1}(z) + J_{\kappa-1}(z) = \frac{2\kappa}{z} J_\kappa(z)$$

Conclua que $J_{1/2}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}} \sin z$ e $J_{-1/2}(z) = \sqrt{\dfrac{2}{\pi z}} \cos z$

Além disso, obtenha a *representação integral de Schläfli* para as funções de Bessel de primeiro tipo, usando a representação integral de Hankel para $\dfrac{1}{\Gamma(z)}$ (Veja item 22) j)):

$$J_\kappa(z) = \frac{1}{2\pi i} \left(\frac{z}{2}\right)^\kappa \int_\gamma w^{-(\kappa+1)}\, \mathrm{e}^{\left(w - z^2/(4w)\right)}\, \mathrm{d}w$$

f) Considere a equação diferencial de Legendre

$$(z^2 - 1)w'' + 2zw' - n(n+1)w = 0$$

onde n é um inteiro não negativo. Mostre que $z = \pm 1$ são pontos regulares singulares e que ∞ é também regular-singular. Encontre duas soluções linearmente independentes numa vizinhança do ∞, mostrando que uma destas é um polinômio de grau n (chamado de *polinômio de Legendre*).

g) Exercício-pesquisa: Uma *equação Fuchsiana* é aquela cujas singularidades são todas regulares singulares, inclusive no ∞. Mostre que $z = \infty$ é uma regular singularidade, se $p(z)$ tem ao menos um zero simples no ∞, e $q(z)$

tem ao menos um zero duplo no ∞. Estude as equações Fuchsianas com uma ou duas singularidades. As *equações de Riemann* são as equações Fuchsianas com três pontos singulares. Elabore um estudo geral das equações Fuchsianas. Mostre que a *equação diferencial hipergeométrica*

$$z(1-z)w'' - ((a+b+1)z - c)w' - abw = 0$$

possui uma solução holomorfa numa vizinhança de $z = 0$, que vem a ser exatamente a *série hipergeométrica* $F(a, b, c, z)$ estudada no item 6).

Aplicações adicionais do princípio do máximo para funções holomorfas

29) Mostre o seguinte *teorema de Borel-Caracthéodory* (Veja refs. 15), 3)): Se f é uma função holomorfa numa vizinhança do disco fechado $\overline{B}_R(0)$, de raio R, então para todo $r < R$, (Veja notação no item 24)k))

$$M(r) \leqslant \frac{2r}{R-r} \sup_R \Re f + \frac{R+r}{R-r}|f(0)|$$

a) Seja f uma função inteira. Suponha que

$$\sup_R \Re f \leqslant AR^\sigma \qquad A > 0 \quad \sigma > 0$$

para R suficietemente grande. Mostre que f é um polinômio de grau no máximo σ.

b) Deduza o seguinte *teorema de Hadamard*: Se f é uma função inteira sem zeros satisfazendo $M(R) \leqslant A^{R^\sigma}$, para $A \geqslant 1$ e todo R suficientemente grande, então $f(z) = e^{p(z)}$, onde p é um polinômio de grau no máximo σ.

c) Discuta as várias formas do *teorema de Phragmèn-Lindelöf*. Veja as refs. 7), 18).

Família de funções meromorfas

30) Discuta os teoremas de Montel, Vitali e Picard. Veja refs. 3), 7), 9), 12), 18).

a) Mostre que a família das funções holomorfas na bola unitária $B_1(0)$ com imagem em $\mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ é normal.

b) Mostre que o teorema de Vitali é equivalente ao teorema de Montel.
c) Mostre que o teorema de Vitali pode ser aplicado na representação integral de funções holomorfas.
d) Mostre o grande teorema de Picard a partir do teorema de Montel.
e) Considere $\mathcal{S}$, a família das funções univalentes na bola unitária $B_1(0)$, satisfazendo $f(0) = 0$ e $f'(0) = 1$ (cf. lista 8). Mostre que $\mathcal{S}$ é compacta no conjunto de todas as funções contínuas em $B_1(0)$, com a topologia da convergência uniforme.
   i) Conclua que para cada $0 < r < 1$, existe uma constante $C(r)$, tal que se f é uma função univalente na bola unitária, então

$$\log \frac{|f'(z)|}{|f'(w)|}| \leqslant C(r), \qquad \forall z, w \in B_r(0)$$

Compare também com o *teorema de distorção de Koebe* estabelecido na lista 8.
   f) Exercício-pesquisa: Discuta os promeiros resultados na Dinâmica Complexa obtidos por Julia, usando o teorema de Montel. Veja ref. 19).

31) Discuta os espaços de Bergman, Hardy e Nevanlinna. Veja refs. 3), 7), 12), 18).
32) Discuta funções inteiras de *ordem finita*. Demonstre o teorema de Hadamard. Veja refs. 3), 7), 15), 18).

Funções multivalentes

33) Seja f uma função holomorfa definida num aberto U do semi-plano superior $\{\operatorname{Im} z > 0\}$. Suponha que f se estenda continuamente ao intevalo $(-1, 1)$ do eixo real. Seja $f(1/2) = b$. Assuma que f leva o segmento aberto $(-1, 1)$, em dois segmentos de reta que se intersectam em b formando um ângulo de $\pi\alpha$. Mostre que f pode ser escrito numa vizinhança de $z = 1/2$ na seguinte forma

$$f(z) = b + (z - 1/2)^\alpha g(z)$$

onde $g(z)$ é holomorfa numa vizinhança de $z = 1/2$, e $g(1/2) \neq 0$.

34) Seja $\mathcal{D}^* := \{0 < |z| < 1\}$ o disco unitário perfurado no plano complexo $\mathbb{C}$. Seja $A(z)$ uma "função multivalente"em $\mathcal{D}^*$ definida e holomorfa em todo

subconjunto *simplesmente conexo* $U \subset \mathcal{D}^*$. Suponha que $|A(z)|$ esteje bem definida em todo o disco perfurado $\mathcal{D}^*$, e que não se anula neste. A finalidade deste exercício é estudar a "cara"de A. Você vai precisar saber do conceito de *conjugada harmônica* e *períodos* largamente explorados na lista 9.

a) Considere a função harmônica $u = \log|A(z)|$, definida em $\mathcal{D}^*$. Seja $^*u = \int_{z_0}^{z} d^*u$, $\int_{S^1} d^*u = a \in \mathbb{R}$, onde $^*u$ é a conjugada harmônica de u de modo que $u + i^*u$ é uma "multi-função holomorfa". Mostre que $C(z)$ definida por

$$C(z) := e^{2\pi/a(u+i^*u)}$$

está bem definida e é holomorfa em $\mathcal{D}^*$. Mostre que

$$A(z)|_U = e^{a/2\pi \log C(z)|_U}\,.$$

i) Suponha que 0 não é uma singularidade essencial de C. Mostre que $C(z) = z^p D(z)$, $p \in \mathbb{Z}$ onde $D(z)$ é uma função holomorfa que não se anula em $z = 0$. Conclua que $A(z)$ pode ser escrita da forma

$$A(z) = z^{\mu} B(z)$$

onde $B(z)$ é uma função holomorfa em $\mathcal{D}$ que não se anula.

ii) Quando $z = 0$ é singularidade essencial de C, mostre com exemplos que $B(z)$ acima pode ter singularidade essencial em $z = 0$. Mostre que quando A pode se anular perto de $z = 0$, a função B acima pode ter uma singularidade essencial em $z = 0$, mostrando explicitamente com um exemplo que B pode se anular numa seqüência de zeros convergindo a $z = 0$.

BIBLIOGRAFIA

1. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variables I, II, III.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.

2. Alan F. Beardon. *Iteration of rational functions.* Springer, 1999.

3. Einar Hille. *Analytic function theory I,II.* Chelsea, Nova York, 1982.

4. Einar Hille. *Lectures on ordinary differential equations.* Addison-Wesley, 1969.

5. Georges Valiron. *Théorie des functions.* Troisième edition, Masson, 1966.

6. Henri Cartan. *Teoria elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas.* Selecciones Cientificas, Madrid, 1968.

7. John B. Conway. *Functions of one complex variable I, II.* Springer, 1995.

8. J. Gerretsen e G. Sansone. *Lectures on the theory of functions of complex variable I, II.* Wolters-Noordhoff Publishing Goningen 1969.

9. Lars Ahlfors. *Complex analysis.* Mc Graw-Hill, 1996.

10. Norman Levinson e Raymond M. Redheffer. *Complex variables.* Holden-Day, SãoFrancisco, 1970.

11. Patrice Tauvel. *Analyse complexe.* Exercices corrigés. Dunod, 1999.

12. Raghavan Narasimhan e Yves Nievergelt. *Complex analysis in one variable.* Birkäuser, 2001.

13. Reinhold Remmert. *Theory of complex functions.* Springer, 1991 (*Readinds in Mathematics*).

14. Reinhold Remmert. *Classical topics in complex function theory.* Springer, 1998.

15. Serge Lang. *Complex Analysis.* Fourth Edition, Springer, 1999.

16. Sristi Chatterji. *Cours d'analyse 2, Analyse complexe.*Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Suiça, 1997.

17. Stephen D. Fisher. *Complex variables.* Second Edition. Dover Public., N. Y, 1999.

18. Walter Rudin. *Real and complex analysis.* Mc Graw-Hill,1987.

19. Welington de Melo. *Ferramentas mateáticas em dinâmica unidimensional.* Matemática universitária, No 29, 75-113, 2000.

20. Zeev Nehari. *Conformal maps.* Dover Publi.,N. Y. 1975.