VCOMPLEXAS-2001.2–Lista 8

prof: Ricardo Sá Earp

SÍNTESE DE APLICAÇÕES E TRANSFORMAÇÕES CONFORMES

Transfornações conformes básicas

1) Considere a aplicação f dada por $z \longrightarrow z^2$.

   a) Seja H um semi-plano aberto determinado pela reta $e^{i\theta}\mathbb{R}$, para θ real qualquer. Mostre que $f(H) = \mathbb{C} \setminus L, \quad L = e^{2i\theta}\mathbb{R}_+$ e que $f : H \longrightarrow f(H)$ é uma transformação conforme. Determine a inversa.

   b) Seja $w = u + iv = z^2,\ z = x + iy$. Mostre que $u = u_0$ e $v = v_0$ determina duas famílias de hipérboles ortogonais. Também mostre que $x = x_0$ e $y = y_0$ determina duas famílias de parábolas ortogonais.

   c) Mostre que a imagem por f do círculo $S = \{z,\ |z-1| = 1\}$ é um cardióide. Mostre que f fornece uma equivalência conforme entre o domínio aberto delimitado pelo cardióide e o disco aberto delimitado por S.

   d) Mostre que $z \mapsto z^{1/2}$ leva conformemente $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}^- \cup \{0\}$ sobre o semiplano $\Re z > 0$, e leva conformemente o semi-plano superior (aberto) sobre o primeiro quadrante. Mostre que $w = \sqrt{\dfrac{z-1}{z+1}}$, leva conformemente $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$, sobre $\{\operatorname{Im} z > 0\}$.

2) Mostre que o ramo principal do logaritmo $z \mapsto w = \log z$ dá uma equivalência conforme entre $\mathcal{H} := \{z, \operatorname{Im} z > 0\}$ e a faixa $\{0 < \operatorname{Im} z < \pi\}$. Obtenha daí uma equivalência conforme entre uma faixa qualquer $\mathcal{F} \subset \mathbb{C}$ e o disco aberto unitário $\mathcal{D} := B_1(0)$.

3) Considere a função $w = u+iv = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,\ z = x+iy$.

   a) Mostre que a imagem das retas $\{y = y_0 \neq 0\}$ e $\{x = x_0,\ \sin x_0 \neq 0,\ \cos x_0 \neq 0\}$ dão elipses e hipérboles ortogonais e confocais, respectivamente. Observando que $\cos \bar{z} = \overline{\cos z},\ \cos(-z) = \cos(z)$, estude as imagens das retas quando $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$ e $-\pi < x < \pi$.

   b) Mostre que $z \mapsto w = \cos z$ leva conformemente a semi-faixa aberta $\{0 < x < \pi,\ y > 0\}$ sobre o semi-plano inferior $\{\operatorname{Im} z < 0\}$. Mostre ainda que

$z \mapsto w = \cos z$ envia conformente a faixa $0 < x < \pi$ sobre o domínio $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$.

c) Considere $g(w) = \dfrac{1}{i} \log\left(w + i\sqrt{1-w^2}\right)$. Mostre que $1 - w^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow w$ é real e $|w| \geqslant 1$. Mostre que $w + i\sqrt{1-w^2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$ para $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$. Conclua que $w \mapsto w + i\sqrt{1-w^2}$ é holomorfa para $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$. Mostre que $\arccos x = g(x),\ \forall x \in (-1, 1)$. Conclua finalmente que a inversa de $z \mapsto \cos z$ (ramo principal de $w = \arccos z$) é dada por $\arccos w = g(w),\ \forall w \in \widetilde{\mathbb{C}}$ e que $\dfrac{d}{dw}(\arccos w) = -(1-w^2)^{-1/2},\ \forall w \in \widetilde{\mathbb{C}}$.

c) A aplicação $w = \sin z$, leva conformemente uma semi-faixa sobre um semi-plano ? Leva a faixa $\{-\pi/2 < \Re z < \pi/2\}$ sobre que domínio ? Elabore um estudo da função $f(w) = \arcsin w$ definida em

$\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \Big((-\infty, -1] \cup [1, \infty)\Big)$, nos moldes que foi feito no exercício 8) para $\arccos w$, onde f é a inversa da função $z \mapsto \sin z$ restrita à $-\pi/2 < \Re z < \pi/2$ (ramo principal de $w = \arcsin z$). Mostre que $\arcsin w = \dfrac{1}{i} \log(iw + \sqrt{1-w^2}),\ \forall w \in \widetilde{\mathbb{C}}$ e que $\dfrac{d}{dw}(\arcsin w) = (1-w^2)^{-1/2},\ \forall w \in \widetilde{\mathbb{C}}$.

4) Mostre que $z \mapsto w = \tan z$ envia conformemente a faixa aberta $\{-\pi/2 < \Re z < \pi/2\}$ sobre $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$, onde $\mathcal{L} = \{it,\ t \in \mathbb{R},\ |t| \geqslant 1\}$. Mostre que a função inversa (ramo principal de $w = \arctan z$) é dada por $\arctan w = \dfrac{1}{2i} \log\left(\dfrac{i-w}{i+w}\right)$ e que $\dfrac{d}{dw} \arctan w = \dfrac{1}{1+w^2}$.
   i) Mostre que $w = \arctan z$ leva a bola unitária $B_1(0)$, sobre a faixa $\{-\pi/4 < \Re z < \pi/4\}$.

5) Encontre explicitamente uma transformação conforme que se anula na origem e que leva a bola $B_1(0)$ conformemente sobre $\mathbb{C} \setminus ((-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, \infty))$, $\quad \alpha > 0$.

6) Estude *amplamente* a função de Zhukovsky dada por $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, seguindo as seguintes linhas:
   a) Mostre que nos abertos contendo $+1$ ou -1 f não pode ser injetiva.
   b) Mostre que o grau de f é 2. "Quais são os pontos de ramificação de f?"
   c) Mostre que f não pode ser injetiva num domínio que contenha z e $1/z$ simultâneamente. Reciprocamente num domínio que contenha no máximo um dos números $z,\ 1/z\ (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$, mostre que f restrita a

este domínio injetiva. Mostre que f é injetiva nos seguintes domínios: $\mathcal{D} \setminus \{0\}$ $V = \{z;\ |z| > 1\}$ e $\mathbb{H}^2$ (Lembremos que $\mathcal{D}$ é a bola unitária aberta e que $\mathbb{H}^2$ é o semi-plano superior).

d) Mostre que $f\ : \mathcal{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus L$, onde $L = [-1, 1]$, é uma equivalência conforme . Idem para $f\ : V \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus L$, onde $L = [-1, 1]$,

e) Mostre que $f\ : \mathbb{H}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus S$, onde $S =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$, é uma equivalência conforme.

f) Considere $A = \{z;\ |z + x_0| < 1 + x_0\}$, $B = \{z;\ |z + x_0| > 1 + x_0\}$ e $C = \{z;\ |z + x_0| = 1 + x_0\}$, onde $0 < x_0 < 1$. Faça figuras !!

g) Seja $\tilde{C} = f(C)$. Mostre que $\tilde{C}$ é uma curva simétrica com respeito ao eixo real passando por 1 e cortando ortogonalmente a reta real no ponto $f(-1 - 2x_0)$.

h) Mostre que f é injetiva em C e que a curva de Jordan $\tilde{C}$ é regular, exceto no ponto 1. Mostre que $\tilde{C}$ faz um ângulo tipo "quina" em $w = 1$.

ix) Seja D_1 o domínio limitado cuja fronteira é $\tilde{C}$ e D_2 o domínio exterior $\tilde{C}$. Mostre que f injetiva em $V \Rightarrow f(B) \subset D_2$, $f(A \setminus \mathcal{D}) \subset D_1$, concluindo assim que $f(B) = D_2$ e $f(A \setminus \mathcal{D}) = D_1$. *Sugestão*: Use a fórmula (de maneira apropriada)

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\tilde{\gamma}} \frac{\mathrm{d}\, w}{w - w_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z) - w_0} \,\mathrm{d}\, z$$

$\imath$) Considere as aplicações $f(z) = \log \dfrac{1+z}{1-z}$ para $|z| < 1$, e considere também $\sin z$ para $-\pi/2 < \Re z < \pi/2$. Encontre uma relação funcional entre estas funções e a função de Zhukovsky.

$\jmath$) Estude a transformação $f(z) = \log \dfrac{z^2 + 1}{2z}$, restrita ao semi-disco $|z| < 1, \operatorname{Im} z > 0$.

κ) Usando o conhecimento da função de Zhukovsky mostre que $w = \sin z$ leva as retas $y = \text{const}$ em elipses e hipérboles co-focais cujos focos são os pontos ± 1.

6) Mostre que a *aplicação de Koebe* dada por $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ leva conformente a bola aberta unitária (centrada na origem) sobre $\mathbb{C} \setminus \left(-\infty, -\dfrac{1}{4}\right]$. Logo, note que a imagem da bola unitária contém uma bola de raio $1/4$. Isto tem um significado mais geral ?

7) Sejam $\alpha, \beta > 0$, números reais positivos. Considere a função

$$f(z) = \frac{\delta z}{(\gamma + z)(1 + \gamma z)} \qquad \gamma < 1$$

Mostre que se $\gamma = \dfrac{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}}$, e $\delta = \dfrac{4\alpha\beta}{\left(\sqrt{\beta} + \sqrt{\alpha}\right)^2}$, então f leva conformemente a bola aberta unitária $B_1(0)$ conformemente sobre $\mathbb{C} \cup \{\infty\} \setminus [\alpha, \beta]$.

8) Estudes as aplicações abaixo nos domínios especificados.

a)

$$f(z) = \frac{\alpha - \mathrm{e}^{\log \alpha \left(\frac{1+z}{1-z}\right)}}{1 - \alpha\, \mathrm{e}^{\log \alpha \left(\frac{1+z}{1-z}\right)}} \qquad (0 < \alpha < 1) \quad \forall\, |z| < 1$$

b)

$$f(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^{\frac{2\alpha}{\pi}} \qquad (0 < \alpha < 1) \qquad |z| < 1.$$

9) Mostre:

a) A transformação

$$f(z) = \frac{z}{\sqrt{z^2 + 1}}$$

leva $\{\mathrm{Im}\, z > 0\} \setminus \{it,\ t \geqslant 1\}$ conformemente sobre o semi-plano superior $\{\mathrm{Im}\, z > 0\}$.

Funções univalentes

Lembremos que uma função f que aplica o domínio Ω sobre $G \subset \mathbb{C}$ é chamada *univalente* se

i) f é holomorfa em Ω

ii) f é injetiva (um-a-um)

10) Mostre o seguinte *critério de univalência*: Seja f uma função holomorfa num domínio convexo Ω satisfazendo a condição :

$$\mathrm{Re} f'(z) > 0, \qquad \forall z \in \Omega$$

Conclua que

a) f é univalente em Ω.
b) Se $\Omega = \mathcal{D} := \{|z| < 1\}$ e f é contínua em $\overline{\Omega}$ então $f(\Omega)$ é um domínio de Jordan (i. e $\partial\Omega$ é uma curva de Jordan).

11) Considere $f(z) = z + \sum_{2}^{\infty} a_n z^n$. Assuma que

$$\sum_{2}^{\infty} n|a_n| \leqslant 1$$

a) Mostre que f aplica $\mathcal{D}$ conformemente num domínio de Jordan.

12) Seja f uma função holomorfa em um domínio Ω que seja localmente injetiva. A *derivada Schwarziana* de f denotada por S_f (Atenção : Na lista 7 a notação foi outra $[f]_z$!!) está definida por

$$S_f := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

a) Mostre que se $w = T(z)$ e $w = Q(z)$ são aplicações de Möbius então

$$S_{T\circ f\circ Q}(z) = S_f(Q(z))Q'(z)^2$$

e assim é invariante por aplicações de Möbius, isto é $S_{T\circ f}(z) = S_f(z)$. Conclua que a derivada Schwarziana de uma aplicação de Möbius é nula. Para um teorema de existência, envolvendo equações lineares complexas de segunda ordem, veja lista 7. A derivada Schwarziana tem papel importante na Análise Complexa, como já enfatizamos na lista 7.

b) Agora, considere f uma função analítica e univalente em $\mathcal{D} := \{|z| < 1\}$. Seja $\mathcal{S}$ (*schlicht functions*) o conjunto das funções da forma $f(z) = z + a_2 z^2 + a_3 z^3 + \cdots$ que são analíticas e univalentes em $\mathcal{D}$. Seja $z_0 \in \mathcal{D}$.

Considere a *transformação de Koebe* h, definida como segue: Se f uma função holomorfa e univalente definida no disco unitário aberto $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$, se $z_0 \in \mathcal{D}$, então h está definida por

$$h(z) := \frac{f\left(\dfrac{z+z_0}{1+\overline{z_0}z}\right) - f(z_0)}{(1-|z_0|^2)\, f'(z_0)} = z + \left(\frac{1}{2}\left(1-|z_0|^2\right)\frac{f''(z_0)}{f'(z_0)} - \overline{z_0}\right)z^2 + \cdots$$

i) Mostre que h (definida acima) pertence a classe $\mathcal{S}$

Queremos comentar aqui que a *conjectura de Bieberbach* demonstrada por de Branges em 1985 diz o seguinte

$$(B) \qquad |a_n| \leqslant n \quad \text{para} \quad f \in \mathcal{S}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

ii) Mostre que daí e da transformação de Koebe segue imediatamente que se f leva conformemente $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C}$ então

$$(*) \qquad \left|\left(1 - |z|^2\right) \frac{f''(z)}{f'(z)} - 2\overline{z}\right| \leqslant 4, \qquad \text{para} \quad z \in \mathcal{D}$$

iii) Mostre que a igualdade em (B) vale para a função de Koebe $f_0(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$. Estude a função de Koebe f_0 mostrando que a imagem por f_0 de $\mathcal{D}$ contém a bola aberta $\mathcal{B}$ de raio $1/4$ centrada na origem. Esta é uma propriedade satisfeita por todas as funções *schlicht.* No caso da função de Koebe $f_0(z)$ tal bola $\mathcal{B}$ é extremal ?

c) A classe Σ consiste das funções $g(z)$ definidas no disco perfurado $\mathcal{D}^*$ satisfazendo

$$g(\zeta) = \zeta + b_0 + b_1\zeta^{-1} + \cdots (|\zeta| > 1)$$

i) Mostre que se $f \in \mathcal{S}$ então $g(\zeta) := 1/f(\zeta^{-1})$satisfaz

$$g(\zeta) = \zeta - a_2 + (a_2^2 - a_3)\zeta^{-1} + \cdots (|\zeta| > 1)$$

concluindo que g pertence a Σ e que omite 0. Reciprocamente, mostre que se $g \in \Sigma$ e $g(\zeta) \neq 0$ para $\zeta \in \mathcal{D}^*$, então

$$f(z) = 1/g(z^{-1}) = z - b_0 z^2 + \left(b_0^2 - b_1\right) z^3 + \cdots (|z| < 1)$$

pertence à $\mathcal{S}$.

ii) Mostre o *teorema da área*

$$\operatorname{dist}\left(\mathbb{C} \setminus g(\mathcal{D}^*)\right) = \pi\left(1 - \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2\right) \qquad \text{para} \quad g \in \Sigma$$

inferindo

$$|b_1| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} n|b_n|^2 \leqslant 1 \qquad \text{para} \quad g \in \Sigma$$

Nota : Segue do teorema da área o caso particular do teorema de de Branges $|a_2| \leqslant 2$.

d) Mostre que se f é uma função schlicht então $|a_2^2 - a_3| \leqslant 1$. Deduza daí que se f leva conformemente $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C}$, então a derivada Schwarziana S_f de f satisfaz

$$|S_f(z)| \leqslant 6\left(1 - |z|^2\right)^{-2}$$

onde $S_f(z) := \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\dfrac{f''(z)}{f'(z)} - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$

13) Exercício-pesquisa: Mostre o *teorema de distorção de Koebe* (Veja refs. 3), 4), 20)).

Seja $f\ : \mathcal{D} \to \mathbb{C}$ uma aplicação conforme que leva $\mathcal{D}$ no plano complexo $\mathbb{C}$. Para $z \in \mathcal{D}$ valem as seguinte desigualdades

$$|f'(0)|\frac{|z|}{(1+|z|)^2} \leqslant |f(z) - f(0)| \leqslant |f'(0)|\frac{|z|}{(1-|z|)^2} \tag{2}$$

$$|f'(0)|\frac{1-|z|}{(1+|z|)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant |f'(0)|\frac{1+|z|}{(1-|z|)^3} \tag{3}$$

Observemos que o resultado pode ser demonstrado integrando-se a equação $(*)$ duas vezes. Vamos definir agora $d_f(z) = \operatorname{dist}(f(z), \partial f(\mathcal{D}))$, (distância Euclideana de $f(z)$ ao bordo de $f(\mathcal{D})$. Claro que $d_f(z_0) = \liminf\limits_{|\zeta|\to 1} |f(\zeta) - f(z_0)|$.

a) Seja novamente h a transformação de Koebe. Usando (2) e o princípio do mínimo mostre que

$$\frac{1}{4} \leqslant \liminf_{|z|\to 1}\left|\frac{h(z)}{z}\right| \leqslant |h'(0)| = 1$$

Conclua

b) Se f leva $\mathcal{D}$ conformente em $\mathbb{C}$ então

$$\frac{1}{4}\left(1 - |z|^2\right)|f'(z)| \leqslant d_f(z) \leqslant (1-|z|^2)|f'(z)| \qquad \text{para} \;\; z \in \mathcal{D}$$

Tire as seguintes consequências: Primeiramente, mostre que se f leva $\mathcal{D}$ conformemente sobre um domínio limitado, então $(1 - |z|)|f'(z)| \to 0$ (quando $|z| \to 1$). Segundo, mostre que se f leva conformemente $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C} \setminus \{c\}$, com f satisfazendo $f(0) = 0$, então

$$|f(z)| \leqslant \frac{4|cz|}{(1-|z|)^2} \qquad z \in \mathcal{D}$$

14) (*Woff's lemma*) Seja h uma aplicação que envia o aberto $H \subset \mathbb{C}$ conformemente dentro de $\mathcal{D}_R := \{|z| < R\}$. Seja $C(r) := H \cap \{|z - c| = r\}$ para $c \in \mathbb{C}$. Mostre que

$$\inf_{\lambda < r < \sqrt{\lambda}} \operatorname{dist}(h(C(r)) \leqslant \frac{2\pi R}{\sqrt{\log 1/\lambda}}, \qquad \text{para } \ 0 < \lambda < 1$$

Consequentemente, mostre que existe uma seqüência decrescente $\{r_n\}$, $r_n \to 0$ (quando) $n \to \infty$) satisfazendo

$$\operatorname{dist}(h(C(r_n))) \to 0 \ \text{ quando } \ n \to \infty$$

Sugestão : Denote $l(r) := \operatorname{dist}(h(C(r_n)))$. Use a desigualdade de Schwarz para obter

$$l(r)^2 \leqslant 2\pi r \int_{c + r\,e^{it} \in H} |h'(c + r\,e^{it})|^2 r \ \mathrm{d}t$$

Em seguida, divida ambos os lados por r e integre em r, com r variando de 0 à ∞, concluindo

$$\int_0^\infty l(r)^2 \frac{\mathrm{d}r}{r} \leqslant 2\pi \operatorname{dist} h(H)$$

Mostre usando o mesmo método que *se f envia conformemente $\mathcal{D}$ sobre um conjunto limitado, então quase todo raio* $[0, \zeta)$, $\zeta \in \partial\mathcal{D}$, *é enviado sobre curvas de comprimento limitado.*

Queremos tecer alguns comentários seguindo Pommerenke (Veja ref. 3)): Precisaremos em seguida do conceito de *ângulo de Stolz*. Um *ângulo de Stolz* em $\zeta \in \partial\mathcal{D} := S^1$ é da forma

$$\triangle := \{z \in \mathcal{D}; |\arg(1 - \overline{\zeta} z)| < \alpha, \ |z - \zeta| < \rho\} \ \left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}, \ \rho < 2\cos\alpha\right)$$

Agora seja f uma função de $\mathcal{D}$ em $\mathbb{C}$. Diz-se que f tem o *limite angular* $a \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ em $\zeta \in S^1$ se

$$f(z) \to a, \qquad \text{quando} \quad z \to \zeta, \ z \in \triangle$$

para qualquer ângulo de Stolz $\triangle$ em ζ; sendo o ângulo de abertura 2α de $\triangle$ qualquer número $< \pi$.

O conceito de limite radial é bem claro: Diz-se que f tem o *limite radial* $\alpha \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ em $\zeta \in S^1$ se

$$f(\zeta) := a = \lim_{r \to 1} f(r\zeta)$$

Os seguintes teoremas notáveis remontam a Carathéodory e Lindelöf:
Teorema : *Se f é uma aplicação conforme de $\mathcal{D}$ sobre $\Omega \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ então f tem limite angular a em $\zeta \in S^1 \Leftrightarrow f$ tem limite radial a em ζ.*

Teorema : *Seja f uma equivalência conforme que leva $\mathcal{D}$ sobre um domínio simplesmente conexo Ω. Seja γ um arco de Jordan em Ω que termina em $z_0 \in \partial\Omega$. Então a curva $f^{-1} \circ \gamma$ em $\mathcal{D}$ termina num ponto $\zeta_0 \in S^1$, e $\varphi(\zeta) \to z_0$ quando $\zeta \to \zeta_0$ dentro de qualquer ângulo de Stolz $\triangle$ em ζ_0, ou seja f tem limite angular z_0 em ζ_0.*

Agora, considere f uma aplicação conforme da bola unitária aberta $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$ em $\mathbb{C}$. Vamos mostrar, seguindo o livro de Pommerenke (veja ref. 3)) que

$$f(\zeta) = \lim_{r \to 1} f(r\zeta) \neq \infty$$

existe para *quase todo* $\zeta \in S^1$ e

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r\,\mathrm{e}^{it}) - f(0)|^{2/5} \leqslant 5|f'(0)|^{2/5} \qquad \text{para} \quad 0 \leqslant r < 1$$

Com efeito:

Assuma agora que $f \in \mathcal{S}$. É um fato que a função

$$g(z) = f(z^5)^{1/5} = z\left(\frac{f(z^5)}{z^5}\right)^{1/5} = \sum_1^\infty b_n z^n$$

é analítica e univalente em $\mathcal{D}$. A fórmula de Parseval implica

$$\frac{1-r}{2\pi} \int_0^\pi |g'(r\,\mathrm{e}^{it})|^2 \,\mathrm{d}t = (1-r) \sum_{n=1}^\infty n^2 |b_n|^2 r^{2n-2}$$

para $0 \leqslant r < 1$. Note que como $n(1-r)r^{n-1} \leqslant 1$, e como g é univalente, então

$$\begin{aligned}\sum_{1}^{\infty} n|b_n|^2 r^{n-1} &= \frac{1}{\pi r}\operatorname{dist}\{g(z);\ |z| \leqslant \sqrt{r}\}\\ &= \frac{1}{r}\max_{|z|\leqslant\sqrt{r}} |g(z)|^2 \leqslant (1-r^{5/2})^{-4/5} \leqslant (1-r)^{-4/5},\end{aligned}$$

usando a primeira equação do teorema de distorção de Koebe e a definição de g, pode-se concluir que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^1\int_0^{2\pi}(1-r)^{9/10}|g'(r\,\mathrm{e}^{it})|^2\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}r \leqslant \int_0^1 (1-r)^{-9/10}\,\mathrm{d}r = 10$$

Aplicando a desigualdade de Schwarz segue que

$$\left(\int_0^1 |g'(r\,\mathrm{e}^{it})|\,\mathrm{d}r\right)^2 \leqslant \int_0^1 (1-r)^{-9/10}\,\mathrm{d}r \int_0^1 (1-r)^{9/10}|g'|^2\,\mathrm{d}r$$

Integrando, e usando a penúltima inequação obtém-se

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\int_0^1 |g'(r\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}r\right)^2 \leqslant 100$$

Logo, a integral que está entre parêntesis é finita para quase todo t e $\lim_{r\to 1} g(r\,\mathrm{e}^{it}) \neq \infty$ existe para estes valores de t pelo item anterior. Finalmente, a fórmula de Parseval aplicada de novo leva a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(r^5\,\mathrm{e}^{it})|^{2/5}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|g(r\,\mathrm{e}^{it})|^2\,\mathrm{d}t \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}|b_n|^2 \leqslant 5$$

Nota: Segue da estimativa acima obtida segue que f pertence ao espaço de Hardy $H^{2/5}$; na verdade $f \in H^p$ para $p < 1/2$ ($H^p \subset H^q$, se $0 < q < p$). Se g é uma função analítica limitada (ou seja, $f \in H^\infty$) definida em $\mathcal{D}$ então o *teorema de Fatou* diz que o *limite radial* $\lim\limits_{r\to 1} g(r\,\mathrm{e}^{\theta})$ existe para quase todo ponto de S^1, e se f não é identicamente zero, $\lim\limits_{r\to 1} g(r\,\mathrm{e}^{\theta}) \neq 0$, para quase todo ponto de S^1. Este resultado vale também para $f \in H^p$, para $0 < p \leqslant \infty$. Para estes resultados você pode consultar refs 8), 19). Existe ainda um belíssimo resultado de Plessner ainda mais geral (Veja ref. 3))

Teorema de Plessner : Se g é meromorfa em $\mathcal{D}$ então , para quase todo $\zeta \in S^1$, ou bem g tem limite angular finito em ζ, ou bem $g(\triangle)$ é denso em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ para qualquer ângulo de Stolz $\triangle$ em ζ.

Portanto, o comportamento no bordo, em quase todos os pontos, é bom ou muito ruim.

É interessante deduzir do teorema de Plessner, o seguinte ***teorema de unicidade de Privalov***: Se uma função meromorfa em $\mathcal{D}$ tem limite ângular 0 num conjunto de medida positiva de S^1. então esta se anula identicamente.

Lemma de Schwarz

15) Mostre uma variante do *lema de Schwarz* para funções holomorfas limitadas definidas na bola unitária $B_1(0)$, que possuem um número finito de zeros. E para um número infinito de zeros ?

16) Seja f uma função holomorfa definida em $B_1(0)$ satisfazendo $\Re f(z) \geqslant 0$. Suponha a normalização $f(0) = 1$. Mostre que

$$|F(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

17) (*Princípio de subordinação*) Vamos seguir agora o livro de Nehari que é uma obra prima das transformações conformes. Veja ref. 21). Sejam $f(z)$ e $F(z)$, duas funções holomorfas que levam a bola unitária $B_1(0)$, sobre domínios Ω_f e Ω_F, respectivamente. Assuma que F seja univalente no seu domínio de definição Suponha que $\Omega_f \subset \Omega_F$ e que $f(0) = F(0)$. Mostre que

$$f(z) = F(g(z)) \tag{1}$$

onde $g(z)$ é uma função holomorfa em $B_1(0)$, satisfazendo

$$|g(z)| \leqslant |z|$$

verificando-se a igualdade na desigualdade logo acima, se e somente se $\Omega_f \equiv \Omega_F$. Conclua que (quando $f(0) = F(0)$)

$$|f(z)| \leqslant \max_{|z|=r} |f(z)|, \qquad |z| = r < 1$$

$$|f'(0)| \leqslant |F'(0)|$$

Observe que a relação (1), pode ser verificada mesmo que F não seja univalente. Dizemos neste caso que f *está subordinada* a F.

a) Mostre que se f é holomorfa, $\Re f(z) \geqslant 0$, e $f(0) = 1$, então f satisfaz a estimativa a priori $|f'(0)| \leqslant 2$.

b) Mostre que se f é holomorfa em $B_1(0)$, satisfazendo $f(0) = 0$, então se f omite todos os valores no intervalo $(-\infty, -1/4]$, então necessariamante f verifica as seguintes estimativas

$$|f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2}, \qquad |z| = r \qquad \text{e} \quad |f'(0)| \leqslant 1.$$

c) Levando em conta as equivalências conformes básicas, construidas no início desta lista, use o princípio de subordinação para obter outras estimativas a priori, semelhante aquelas que foram obtidas nos dois itens anteriores. Para os dois exercícios que se seguem a sugestão é elaborar uma construção baseada na função de Zhukovsky (veja exerc. 6) acima).

i) Seja $f(z) = \dfrac{\alpha}{z} + b_0 + b_1 z + \cdots$ o desenvolvimento de Laurent de uma função holomorfa em $0 < |z| < 1$. Suponha que f omita todos os pontos do intervalo $[a, b]$ contido no eixo real. Mostre que α satisfaz a seguinte estimativa

$$|\alpha| \geqslant \frac{b-a}{4}$$

O quê acontece no caso que uma tal f omita um segmento de reta do plano complexo $\mathbb{C}$ de comprimento ℓ qualquer ?

i) Considerando a função f do item anterior e supondo que o contradomínio de f é a região exterior da elipse dada por $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1,\ b > a > 0$, qual é a estimativa correspondente para α ? E no caso de uma elipse E com eixos a e b, situada numa posição qualquer de $\mathbb{C}$?

18) Exercício-pesquisa: Vamos mostrar a versão do *lemma de Schwarz* devida a Pick. Veja refs. 4), 13), 14), 15) e 21). Tal versão tem várias aplicações na Geometria Hiperbólica e na Dinâmica Complexa. Para fazer o próximo exercício você terá que saber que as transformações conformes do disco $\mathcal{D}$ são exatamente as transformações de Möbius que preservam $\mathcal{D}$. Você poderia escrever a forma geral destas transformações ? Idem para as equivalências conformes do plano de Poincaré $\mathbb{H}^2 := \{\operatorname{Im} z > 0\}$.

a) Seja $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ uma função holomorfa do disco unitário em si mesmo. Sejam $z, \zeta \in \mathcal{D}$. Mostre que

$$\frac{|f(z) - f(\zeta)|}{|1 - \overline{f(\zeta)} f(z)|} \leqslant \frac{|z - \zeta|}{|1 - \overline{\zeta} z|}$$

Além disso mostre que vale a igualdade na desigualdade acima para dois pontos distintos $z, \zeta \in \mathcal{D}$ se e somente se f é uma equivalência conforme do disco $\mathcal{D}$ e vale a igualdade na desigualdade.

b) Seja $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$, uma função holomorfa do disco unitário em si mesmo. Seja $z \in \mathcal{D}$. Mostre que

$$\frac{2|f'(z)|}{1 - |f(z)|^2} \leqslant \frac{2}{1 - |z|^2}$$

Além disso mostre que vale a igualdade na desigualdade acima para um ponto $z \in \mathcal{D}$ se e somente se f é uma equivalência conforme do disco $\mathcal{D}$ e vale a igualdade na desigualdade.

c) Seja $f : \mathbb{H}^2 \to \mathbb{H}^2$ uma função holomorfa do semi-plano superior $\mathbb{H}^2 := \{\operatorname{Im} z > 0\}$ em si mesmo. Sejam $z, \zeta \in \mathbb{H}^2$. Mostre que

$$\left| \frac{f(z) - f(\zeta)}{f(z) - \overline{f(\zeta)}} \right| \leqslant \left| \frac{z - \zeta}{z - \overline{\zeta}} \right|$$

Além disso mostre que vale a igualdade na desigualdade acima para dois pontos distintos $z, \zeta \in \mathbb{H}^2$ se e somente se f é uma equivalência conforme do semi-plano $\mathbb{H}^2$ e vale a igualdade na desigualdade.

$\imath$) Exercício-pesquisa (Ver ref. 15)): O lema de Schwarz acima pode ser usado para demonstrar que uma aplicação holomorfa f que leva $\mathbb{H}^2$ em si mesmo, com a propriedade de que $f(ai) = af(i)$, para algum real positivo $a \neq 1$, é uma homotetia de razão $\lambda = |f(i)|$.

d) O quê você poderia dizer sobre uma aplicação holomorfa f que leva o disco $\mathcal{D}$ no semi-plano $\mathbb{H}^2$ satisfazendo $f(0) = i$?

Para ver interessantes aplicações do lema de Schwarz na Dinâmica Complexa, consulte o belo *survey didático* de Welington de Melo (Veja ref. 20). Vamos dar aqui um resultado relativamente simples, mas que pode ser usado para a demonstração do teorema de uniformização de Riemann. Mais detalhes podem ser vistos no referido artigo de Welington . Para o segundo exercício você vai precisar conhecer o teorema fundamental de *levantamento* da teoria de recobrimentos e vai precisar usar o lema de Schwarz. Denotaremos por $\mathcal{D}$ o disco unitário centrado na origem.

e) Dado qualquer ponto $v \in \mathcal{D}$ mostre que existe uma aplicação holomorfa $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ com um único ponto crítico c tal que f seja um recobrimento de grau dois de $\mathcal{D} \setminus \{c\}$ sobre $\mathcal{D} \setminus \{v\}$ satisfazendo $f(0) = 0$.

f) Seja $\Omega \subset \mathcal{D}$ um aberto simplesmente conexo do plano complexo $\mathbb{C}$ contendo $z = 0$. Assuma que $\Omega \neq \mathcal{D}$. Mostre que existe uma função univalente $F : U \to \mathcal{D}$, tal que $F(0) = 0$ e $|F'(0)| > 1$. Este exercício pode ser combinado como o *teorema de Montel* ("famílias normais") para mostrar o *teorema de Riemann* no caso de um domínio simplesmente conexo *limitado.* Veja ref. 20). Você saberia demonstrar isto ?

19) Exercício-pesquisa: Estude a bela aplicação do lema de Schwarz feita por Study: Veja ref. 14.

20) Exercício-pesquisa: Estude a demonstração do *grande teorema de Picard*, dada por Narasimhan e Nievergelt no livro deles (veja ref. 13), que faz uso de técnicas que aparecem na Geometria Diferencial e que são "primas" do teorema de Schwarz-Pick.

21) (*A ultramétrica de Ahlfors*) Geralmente uma métrica Riemanniana é dada em "coordenadas isotérmicas $z = x + iy$"(ou conforme) na seguinte forma

$$\mathrm{d}s^2 = \rho^2(\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2)$$

onde $\rho > 0$ e $\mathrm{d}s$ é conforme à métrica Euclideana. A quantidade

$$K(\rho) := -\frac{\mathcal{D}\log\rho}{\rho^2}, \quad \rho \in C^2$$

é a bem conhecida *curvatura de Gauss* da métrica. A curvatura de Gauss da métrica hiperbólica é -1, e $K \equiv 1$ para a esfera unitária em $\mathbb{R}^3$.

a) Mostre que $K(\rho)$ é um invariante conforme. Mais precisamente, dada uma aplicação conforme $w = f(z)$, define-se $\tilde{\rho}(w)$ obrigando que $\rho|\,\mathrm{d}z| = \tilde{\rho}|\,\mathrm{d}w|$, ou mais explicitamente, $\rho(z) = \tilde{\rho}(f(z))|f'(z)|$.

Doravante consideraremos a métrica hiperbólica em $\mathcal{D}$ denotada por $\lambda(z)|\,\mathrm{d}z|$, isto é $\lambda(z) = 2/(1 - |z|^2)$.

b) Mostre que se ρ satisfaz $K(\rho) \leqslant -1$ em $\mathcal{D}$, então $\lambda(z) \geqslant \rho(z)$ para todo $z \in \mathcal{D}$. *Sugestão* : Assuma primeiramente que ρ tem extensão contínua e estritamente positiva ao disco fechado, e em seguida reduza a situação geral a este caso.

c) Uma métrica $\rho|\,\mathrm{d}z|$, $\rho \geqslant 0$ é chamada de ultramétrica num domínio Ω se tem as seguintes propriedades:

i) ρ é semi-contínua superiormente.

ii) Para cada $z_0 \in \Omega$ com $\rho(z_0) > 0$ existe uma "métrica suporte" ρ_0 de classe C^2 numa vizinhança V de z_0, tal que $\mathcal{D}\log\rho_0 \geqslant \rho_0^2$ e $\rho \geqslant \rho_0$ em V, com $\rho(z_0) = \rho_0(z_0)$. Note que $\log\lambda - \log\rho$ é semi-contínua inferiormente, a existência de um mínimo no raciocínio acima está assegurada. Tal mínimo será também um mínimo local de $\log\lambda - \log\rho_0$, e o resto do raciocínio se aplica como antes. A desigualdade $\lambda(z) \geqslant \rho(z)$ pode ser verificada sempre que ρ é ultramétrica. Mostre a seguinte versão forte do *lema de Schwarz*:

iii) Seja f uma função analítica de $\mathcal{D}$ em uma região Ω na qual está dada uma métrica ultrahiperbólica ρ. Mostre que

$$\rho(f(z))|f'(z)| \leqslant \frac{2}{(1-|z|^2)}$$

Observe que a quantidade da esquerda é uma métrica ultrahiperbólica em $\mathcal{D}$, os zeros de $f'(z)$ são as singularidades desta métrica. Você saberia dar exemplos de métricas ultrahiperbólicas em $\mathcal{D}$?
Nota: A métrica ultrahiperbólica de Ahlfors já foi utilizada num importante teorema (tipo Picard) das superfícies mínimas do espaço Euclideano demonstrado por Fugimoto. Diga-se de passagens que a teoria das superfícies mínimas tem grande afinidade com as Variáveis Complexas *via* a famosa *representação de Weierstrass*.

O princípio de reflexão de Schwarz

22) Exercício-pesquisa: Mostre as várias formas do *princípio de reflexão de Schwarz*. Veja na ref. 10) uma belísima discussão de Ahlfors sobre o assunto. Veja também refs. 3), 8), 16), 21). De fato:

- ***Sejam*** Ω ***e*** $\mathcal{H}$ ***domínios do plano complexo*** $\mathbb{C}$, ***e sejam*** Ω^* ***e*** $\mathcal{H}^*$ ***as reflexões com respeito a círculos*** C_1 ***e*** C_2 ***na esfera de Riemann***

$\mathbb{C} \cup \{\infty\}$, ***respectivamente. Assuma que*** $\partial\Omega \cap C_1 \neq \emptyset$ ***e que*** $\partial\mathcal{H} \cap C_2 \neq \emptyset$. ***Seja*** $f : \Omega \to \mathcal{H}$ ***uma aplicação analítica que leva*** Ω ***sobre*** $\mathcal{H}$. ***Suponha que***

$$f(z) \longrightarrow C_2 \qquad \text{quando} \quad z \to C_1, \quad z \in \Omega$$

Mostre que f ***pode ser estendida analíticamente a uma aplicação conforme cujo domínio é o conjunto de pontos interiores de*** $\Omega \cup \Omega^* \cup (C_1 \cap \partial\Omega)$. ***Além disso se*** f ***é uma transformação conforme sua extensão definida no domínio dado acima é ainda uma transformação conforme.***

- Uma função real ou complexa $\varphi(t)$ da variável real t, definida no intervalo $a < t < b$ é chamada de *analítica real* se, para cada t_0 no intervalo, a série de Taylor $\varphi(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varphi^{(n)}(t_0)}{n!}(t - t_0)^n$ converge em algum intervalo pequeno ao redor de t_0. Mostre que existe uma função analítica $f(z)$ definida num domínio simétrico ao eixo real, de maneira que $f(t) = \varphi(t), \forall t \in (a, b)$. Suponhamos agora que $\varphi(t)$ seja uma função complexa que seja analítica real. Dado um arco de curva γ dada por uma parametrização analítica real $\varphi(t)$, dizemos que $[\gamma]$ é um arco analítico, onde $[\gamma]$ é o traço de γ. Lembramos que a curva γ dada pela parametrização $\varphi(t)$ é chamada de simples se $\varphi(t_1) = \varphi(t_2) \Rightarrow t_1 = t_2$, e é chamada de *regular* se $\varphi'(t) \neq 0, \forall t \in (a, b)$. ***Mostre que o princípio de reflexão de Schwarz enunciado acima é ainda válido se no enunciado*** C_1 ***é trocado por um arco analítico simples e regular.*** O mesmo é válido para C_2 ? Conclua com isso que uma função analítica f definida num domínio Ω que contenha na sua fronteira uma arco analítico $[\gamma]$ pode ser estendida (ou prolongada) analíticamente para além de $\Omega \cup [\gamma]$.

23) Seja f uma função holomorfa num domínio Ω, que leva a parte de $\Omega \cap \mathbb{R}$ no eixo real, e que leva a parte de Ω contida no semi-plano superior de forma um-a-um no próprio semi-plano superior. Também leva a parte de Ω contida no semi-plano inferior de forma um-a-um no próprio semi-plano inferior . Mostre que f produz uma equivalência conforme entre Ω com sua imagem.
24) Exiba várias aplicações do princípio de reflexão de Schw1arz.

a) Seja f uma função holomorfa no semi-plano superior $\{\operatorname{Im} z > 0\}$, satisfazendo a relação

$$f(z)f(1-z) = 1 \tag{1}$$

Suponha que $f(z) \to w \in \mathbb{R}$ quando $z \to x$, $0 < x < 1$. Mostre que f leva a semi-reta $\{\Re z = 1/2,\ \operatorname{Im} z \geqslant 0\}$, no círculo de raio 1 centrado na origem.

i) Exiba várias funções meromorfas que satisfazem (1), verificando o resultado deste exercício. Veja na lista 7 a *fórmula do suplemento de Euler* da função Gamma e use-a para construir uma função meromorfa (holomorfa no semi-plano superior) que satisfaz (1).

25) Mostre que a função $f(z) = \log \sin z$ pode ser bem definida no domínio $\Omega = \mathbb{C} \backslash (-\infty, 0] \cup [1, \infty)$. Usando o desenvolvimento de $\sin \pi z$ como produto infinito (veja por exemplo, lista 7 ou refs. 8), 10) ou 15)) conclua que

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{\substack{n \in \mathbb{Z} \\ n \neq 0}} \left(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n} \right)$$
$$\frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}$$

26) Considere $\mathcal{Q}$ o retângulo em $\mathbb{C}$ de vértices $-b, a, a+ci, -b+ci,\ a > 0, b > 0, c > 0$. Sejam $L_1 = \{-b+ti,\ 0 \leqslant t \leqslant c\}, L_2 = [-b, a], L_3 = \{a+ti,\ 0 \leqslant t \leqslant c\}, L_4 = \{t+ci,\ -b \leqslant t \leqslant a\}$. Seja f uma função holomorfa definida no retângulo, e que leva o lado L_2 num segmento de reta no eixo real positivo, leva o lado L_4 num segmento de reta no eixo imaginário positivo , leva o lado L_1 na parte do círculo de raio $r > 0$ contida no primeiro quadrante, e finalmente, leva L_3 na parte do círculo de raio R, $R > r$ contida no primeiro quadrante. Mostre que a quantidade

$$\frac{f'(z)}{f(z)}$$

restrita ao bordo do retângulo é real. O quê você pode afirmar sobre f ? Estude os detalhes da transformação no caso de que $c = \pi/2$ e $f(z) = e^z$.

27) Exercício-pesquisa: Elabore um estudo sobre a fórmula de Schwarz-Christoffel.

a) Em particular apresente várias explícitas equivalências conformes entre o semi-plano superior, e domínios limitados por um polígono. Faça o mesmo para um domínios ilimitados limitados por linhas poligonais. Estude as funções elípticas segundo este ponto de vista, estudando as *funções de Jacobi*. Veja refs 10), 18), 21).

b) Defina as funções *elípticas de Jacobi* $w = \operatorname{sn} z$ (*sinus amplitudinis*), $w = \operatorname{cn} z$ (*cosinus amplitudinis*), $w = \operatorname{dn} z$ (*delta amplitudinis*). Dê tanto uma definição puramente analítica (veja ref. 9)), quanto uma definição geométrica baseada no princípio de reflexão de Schwarz, e na teoria das transformações conformes (veja ref. 21)). Defina também as funções *Theta de Jacobi* e escreva as funções $w = \operatorname{sn} z, w = \operatorname{cn} z, w = \operatorname{dn} z$, em termos da funções Theta de Jacobi.

i) Usando a função $w = \operatorname{sn} z$ de Jacobi (*sinus amplitudinis*), exiba uma transformação conforme que leve uma anel $\{1 < |z| < R\}$, no domínio Ω obtido removendo-se o segmento $[-a, a]$, $0 < a < 1$, do disco unitário $\mathcal{D}$. Veja o item c) logo abaixo

ii) Usando a função $w = \operatorname{sn} z$ de Jacobi (*sinus amplitudinis*), exiba uma transformação conforme que leve o interior da elipse $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$, de eixos a e b e focos ± 1, no disco unitário $\mathcal{D}$. Veja o exercício 30) logo abaixo.

iii) Usando a função $w = \operatorname{cn} z$ de Jacobi (*cosinus amplitudinis*), exiba uma transformação conforme que leve o interior de um retângulo no disco unitário $\mathcal{D}$.

28) Exercício-pesquisa (Veja ref. 21): Estude as transformações conformes $w = f(z)$ que levam o semi-plano $\mathbb{H}^2 = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ sobre um *domínio curvilíneo* i.e um domínio cujo bordo é formado por arcos de círculos e sua relação com a *derivada Schwarziana*, equações diferenciais lineares de segunda ordem cujos coeficientes são funções meromorfas e a função Gamma $\Gamma(z)$.

a) Particularmente, estude o caso de f enviar conformemente $\mathbb{H}^2$ sobre um *triâgulo curvilíneo*, ou melhor *triângulo hiperbólico* contido no disco de Poincaré $\mathcal{D}$ formados por ângulos $\pi\alpha, \pi\beta, \pi\gamma$ satisfazendo $\pi\alpha + \pi\beta + \pi\gamma < \pi$.

i)) Mostre que quandos $\alpha = \dfrac{1}{m}, \beta = \dfrac{1}{n}, \gamma = \dfrac{1}{p}$, onde m, n, p são inteiros não negativos estas funções chamadas " funções triângulo de Schwarz" tem inversa $w = S(\alpha, \beta, \gamma; z)$ bem definida em *todo disco de Poincaré* $\mathcal{D}$. Além disso mostre que $\partial\mathcal{D}$ é o bordo natural de $S(z)$. Estude o *grupo de automorfismos* de $w = S(z)$, isto é o subgrupo Γ do grupo de Möbius que deixa $\mathcal{D}$ invariante e que satisfaz, $f(g(z)) = f(z)$, $\forall g \in \Gamma$. Mostre que Γ é gerado por três transformações de Möbius.

ii) Estude particularmente o caso que $\alpha = \beta = \gamma = 0$, estudando a *função elíptica modular*. Aplique a função modular para dar uma demonstração do *pequeno teorema de Picard*. Também use as funções modulares para demonstrar o *teorema de Montel* (Veja ref. 4)): ***Uma família*** f_τ ***de funções meromorfas definidas num domínio*** Ω ***é normal, se omite três pontos fixados*** a, b, c ***da esfera de Riemann*** . Em seguida demonstre o *grande teorema de Picard* usando o teorema de Montel.

29) Considere uma transformação conforme $w = f(z, \rho)$, $\quad 0 < \rho < 1$ com as seguintes propriedades:

- Leva o semi anel delimitado por $\{|z| = \rho,\ \mathrm{Im}\, z > 0\} \cup]-1, -\rho[\cup \{|z| = 1,\ \mathrm{Im}\, z > 0\} \cup]\rho, 1[$ sobre o semi-disco $\{|z| < 1,\ \mathrm{Im}\, z > 0\}$ de maneira que no bordo faz o seguinte
- Deixa fixos os pontos ± 1, leva os pontos $\pm\rho$ nos pontos $\pm L$, onde $0 < L = L(\rho) < 1$.

a) Mostre que $f(i\rho) = 0$.

b) Usando o princípio de reflexão de Schwarz, o conhecimento da função de Zhukovsky $w = \dfrac{1}{2}(z + \dfrac{1}{z})$ e o exercício 32)a) abaixo mostre que

$$L(\rho) f(\frac{z}{\rho}, \rho) = \frac{2f(z, \rho^2)}{1 + f^2(z, \rho^2)}$$
$$L^2(\rho) = \frac{2L(\rho^2)}{1 + L^2(\rho^2)}$$

Nota: Uma construção que faz uso da função $w = \mathrm{sn}\, z$ (e da função $\log z$) produz uma tal transformação conforme (explícitada) $f(z, \rho)$ (Veja ref. 21)). A expressão é a seguinte:

$$w = f(z) = \sqrt{k(\rho^4)}\, \mathrm{sn}\left(\frac{2iK}{\pi} \log \frac{z}{\rho} + K; \rho^4\right)$$

c) Se você compreendeu bem o exercício anterior, considere a função $f(z,\rho)$ estudada neste exercício. Mostre que a transformação conforme

$$w = \frac{1 + f\left(\dfrac{1+z}{1-z}, \rho\right)}{1 - f\left(\dfrac{1+z}{1-z}, \rho\right)}$$

leva o domínio Ω, obtido do plano complexo $\mathbb{C}$ removendo-se dois discos de mesmo raio r centrados no eixo real simétricos em relação ao eixo imaginário sem interceptarem este; num domínio da forma $\mathbb{C} \setminus [-1/b, -b] \cup [b, 1/b]$, $b > 0$. Encontre a relação entre r e ρ, assim como a relação entre b e $L(\rho)$. Se você conhecer um pouco de *Geometria Hiperbólica* vai reconhecer que $z \mapsto \dfrac{1+z}{1-z}$ é uma isometria positiva de $\mathbb{H}^2$ o modelo do semi-plano de Poincaré do plano hiperbólico. A análise será facilitada trabalhando-se deste ponto de vista. Nota: O domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$ logo acima tem exatamente 2 "buracos". Domínios do plano complexo $\mathbb{C}$ com um número de buracos igual a n (são chamados de multi-conexos ou $n+1$ conexos) são conformemente equivalentes a um chamado *domínio circular*. Estes são obtidos retirando-de de um disco um número finito de discos disjuntos, possivelmente também alguns pontos. Uma equivalência conforme ente dois tais domínios circulares é necessariamente uma transformação de Möbius. Domínios do plano complexo conformemente equivalentes tem necessariamente o mesmo número de buracos. O grupo de automorfismo (= equivalência conformes) de um domínio com n buracos é finito para $n \geqslant 2$. Por exemplo, no exemplo com 2 buracos este grupo tem 4 elementos.

30) Vamos seguir neste exercício uma bela exposição de Nehari: Veja ref 21). Considere $w = f(z)$ uma aplicação holomorfa que leva o disco unitário $\mathcal{D}$ sobre um domínio Ω delimitado por arcos de elipses e hipérboles co-focais de focos ± 1. No exercício 6)κ) você mostrou que $\zeta = \arcsin z$ leva tais elipses e hipérboles em retas paralelas aos eixos reais e imaginários do plano complexo ζ. Mostre que a expressão

$$\frac{z^2 f'^2(z)}{1 - f^2(z)} \qquad \text{é real para} \qquad |z| = 1$$

Sugestão : Mostre que $d\zeta = \dfrac{f'(z)dz}{\sqrt{1-f^2(z)}}$ é ou bem real ou bem imaginário puro quando $|z|=1$. Note que $\dfrac{dz}{z}$ é imaginário puro quando $|z|=1$.

a) Assuma agora que Ω é o interior de uma elipse e que $f(z)$ é real para z real. Assuma que $f(0)=0$ e que $f'(0)=\beta$. Mostre que a expressão à esquerda da igualdade logo acima tem duas singularidades que são pólos simples da forma $\pm\alpha$ para $0<\alpha<1$. Considere agora a função

$$p(z) = \frac{z^2}{(\alpha^2 - z^2)(1-\alpha^2 z^2)}$$

Mostre que $p(z)$ é real para $|z|=1$. Mostre que

$$\frac{z^2 f'^2(z)}{p(z)(1-f^2(z))} \qquad \text{é real para} \qquad |z|=1$$

e que a expressão à esquerda da igualdade logo acima define uma função analítica num domínio que contém estritamente $\mathcal{D}$ levando $\partial\mathcal{D}$ no eixo real; concluindo que tal expressão é uma constante real. Conclua que

$$\frac{f'^2(z)}{1-f^2(z)} = \frac{\alpha^2\beta^2}{(\alpha^2-z^2)(1-\alpha^2z^2)}$$

Definindo $g(z) := \dfrac{1}{\alpha\beta}\arcsin(f(\alpha z))$ mostre que

$$g'^2(z) = \frac{1}{(1-z^2)(1-\alpha^4 z^2)}$$

Observando que a inversa de $w = \operatorname{sn} z$ está dada por (agora você vai precisar conhecer a função de Jacobi $w = \operatorname{sn} z$)

$$z = \int_0^w \frac{\mathrm{d}w}{\sqrt{(1-w^2)(1-k^2w^2)}}$$

mostre finalmente que

$$z = \sqrt{k}\,\operatorname{sn}\left(\frac{2K}{\pi}\arcsin w\right) \qquad k=\alpha^2$$

b) Use a função de Zhukovsky para produzir uma transformação conforme do disco $\mathcal{D}$ sobre o exterior de uma elipse. Mostre que a construção do item a) acima leva ao mesmo resultado considerando uma função da forma $f(z) = \dfrac{a}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots, \quad |z| < 1$, mostrando que $f(z)$ satisfaz

$$\frac{f'^2(z)}{1 - f^2(z)} = -\frac{1}{z^2}$$

Um procedimento similar leva a construção explícita de uma equivalência conforme do disco $\mathcal{D}$ na esfera de Riemann cortada ao longo de um arco fechado de elipse, levando a origem 0 no ∞. Idem para uma transformação conforme $w = f(z)$ de $\mathcal{D}$ na região delimitada por uma parábola que contém o seu foco supostamente colocado na origem; satisfazendo $f(0) = 0$, f simétrica com respeito ao eixo real e $f(-1) = \infty$. Neste caso a inversa é dada por $z = \tan^2 C\sqrt{w}$.

31) Suponha agora que φ seja analítica em Ω. Suponha ainda que existe uma vizinhança aberta $V \subset \Omega$, tal que $\overline{\varphi(z)} \in \Omega,\ \forall z \in V$. Mostre que $w = \overline{\varphi\left(\bar{\varphi}(z)\right)}$ é uma função holomorfa num aberto de Ω.

Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{z \in V,\ \bar{z} = \varphi(z)\}$. Suponha finalmente que $a \in \mathcal{A}$ seja um ponto de acumulação de $\mathcal{A}$. Mostre que $z \equiv \overline{\varphi\left(\bar{\varphi}(z)\right)}$ em V. Conclua que $|\varphi^{'}(a)| = 1$.

32) Exercício-pesquisa: Considere os anéis $\mathcal{A}_r = \{1 < |z| < r\}$ e $\mathcal{A}_R = \{1 < |z| < R\}$. Mostre que $\mathcal{A}_r$ é conformemente equivalente a $\mathcal{A}_R$, se e somente se $r = R$. Mostre que toda equivalência conforme $f(z)$ de $\mathcal{A}_r$ em si mesmo é ou bem da forma $f(z) = e^{i\theta} z$, ou bem da forma $f(z) = \dfrac{r\, e^{i\theta}}{z}$, para algum real $\theta \in \mathbb{R}$.

Mostre que todo anel topológico no plano complexo $\mathbb{C}$ é conformemente equivalente a um e apenas um dos seguintes modelos: $\mathbb{C} \setminus \{0\}, \mathcal{D} \setminus \{0\}$ e $\{1 < |z| < R\}$ (Veja refs. 10), 13), 15) e 21)). Portanto cada um destes modelos determina um *tipo conforme*.

a) Dê o tipo conforme do conjunto obtido do plano complexo $\mathbb{C}$ removendo-se um intervalo de reta fechado J. Idem para o conjunto obtido do plano complexo $\mathbb{C}$ removendo-se um arco de elipse fechado E.

b) Dê o tipo conforme do conjunto obtido da esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ removendo-se dois segmentos de reta fechados disjuntos na mesma reta.

c) Dê o tipo conforme do conjunto obtido do disco $\mathcal{D}$ removendo-se um segmento de reta fechado.

d) Estude os *domínios multi-conexos* (Veja refs. 10), 21)). Mostre que um domínio multi-conexo Ω pode ser transformado conformemente num domínio multi-conexo cujo bordo é formado por *curvas analíticas*. Mostre que os domínios multi-conexos são conformemente equivalentes a um domínio obtida da esfera de Riemann removendo-se um número finito de segmentos de retas paralelas. Mais precisamente:
Exercício-pesquisa (Veja ref. 21)): Mostre que todo domínio muilti-conexo Ω pode ser transformado conformemente num domínio obtido da esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ removendo-se um número finito de "cortes" (*slits*) ao longo de segmentos de retas paralelos. Mostre que se $w = f(z)$ é tal transformação conforme então pode-se escolher um ponto c arbitrário de Ω que é levado por f no ∞. Além disso se θ é o ângulo que as retas fazem com o eixo real o desenvolvimento de Laurent de $f(z) = f_\theta(z, c)$ normalizado da forma

$$f_\theta(z) = \frac{1}{z-c} + a_\theta(z-c) + b_\theta(z-c)^2 + \cdots$$

determina $f_\theta(z, c)$ univocamente. Mostre que (assumindo a existência) $f_\theta(z, c) = \mathrm{e}^{i\theta} \left(\cos\theta\varphi(z, c) - i\sin\theta\psi(z, c)\right)$, onde $\varphi(z, c) = f_0(z, c)$ e $\psi(z, c) = f_{\pi/2}(z, c)$. Mostre também a univalência (e a unicidade) de $f_\theta(z, c)$ usando o *princípio do argumento*.

i) Mostre que a (existência da) aplicação conforme $f_\theta(z, c)$ dada logo acima pode ser obtida *via* o seguinte *problema variacional*: Seja S_c a classe de aplicações holomorfas em Ω que são univalentes em Ω, e que tem um pólo simples com resíduo 1 no ponto $z = c$ de Ω. Ou seja, tendo um desenvolvimento de Laurent da forma

$$f(z) = \frac{1}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + a_2(z-c)^2 + \cdots$$

Mostre que o máximo do funcional

$$\Re\{\mathrm{e}^{-2i\theta}\, a_1\}$$

é atingido pela *aplicação ótima* $f_\theta(z,c)$ acima que envia Ω num domínio com cortes paralelos.

ii) Suponha que $\Omega = \mathcal{D}$, a bola unitária centrada na origem. Mostre que
$$f_\theta(z,c) = \frac{1}{1-|c|^2}\left(\frac{1-\bar{c}z}{z-c} + \mathrm{e}^{2i\theta}\left(\frac{z-c}{1-cz}\right)\right)$$
Compare o resultado com o exercício 7).

iii) Estude a parte real da função
$$g(z) = \frac{\varphi'(z)}{\psi'(z)}$$
restrita ao bordo de Ω e a Ω, respectivamente, onde φ e ψ são as aplicações normalizadas que realizam os cortes horizontais e verticais respectivamente. Mais precisamente: Mostre que $\Re g(z) = 0$, ao longo de $\partial\Omega$ e que não toma valores imaginários puros em Ω, devido ao fato que $f_\theta(z,c) = \mathrm{e}^{i\theta}\left(\cos\theta\varphi(z,c) - i\sin\theta\psi(z,c)\right)$, é univalente $\forall\theta$. Confira diretamente, por um argumento geral das aplicações conformes e por um cálculo simples que $\Re g(z) > 0$ em Ω.

iv) Considere as funções $M(z,c) := (\varphi(z,c) - \psi(z,c))/2$ e $M(z,c) := (\varphi(z,c) + \psi(z,c))/2$. Mostre que $M(z,c)$ é holomorfa em Ω e que $N(z,c)$ tem um pólo em $z = c$ com resíduo igual a 1. Mostre ainda que a função
$$F(z) = \frac{M'(z,c)}{N'(z,c)}$$
é holomorfa em Ω enviando Ω sobre o interior do disco unitário $\mathcal{D}$, recobrindo-o um certo número de vezes. Além disso, mostre que $M'(z,c)$ e $N'(z,c)$ não podem se anular simultâneamente e conclua que $N'(z,c)$ não se anula em Ω.

v) Considere s o comprimento de arco de $\partial\Omega$, e $z' = \mathrm{d}z/\,\mathrm{d}s$. Usando os fatos que $\varphi'(z,c)z'$ e $i\psi(z,c)z'$ são reais (por quê?) ao longo de $\partial\Omega$,, mostre que
$$M'(z,c)N'(z,c)z'^2 > 0 \qquad \text{ao longo de} \quad \partial\Omega$$

vi) Usando o exercício precedente e analisando a variação total do argumento ao longo de Ω, levando em conta que a variação total do argumento de $\mathrm{d}z/\,\mathrm{d}s$, ao longo das n componentes do bordo de Ω é $-2\pi(n-2)$, e contando os pólos de $N'(z,c)$; mostre que $M'(z,c)$ tem exatamente $2n-2$ zeros em Ω. Conclua que a função $F(z)$ do item iv), determina um recobrimento ramificado de Ω sobre o interior do disco $\mathcal{D}$ de grau $2n$.

v) Mostre diretamente das definições que $M'(z,c)z' = \overline{N'(z,c)z'}$, quando z percorre $\partial\Omega$. Deduza que

$$\arg\left(\frac{\partial N(z,c)}{\partial s}\right) = \arg(N'(z,c)z') = \frac{-\arg(F(z))}{2}$$

Infira do que foi demonstrado anteriormente que a aplicação $w = N(z,c)$ aplica cada componente $C_1, \dots C_n$ de $\partial\Omega$ sobre *curvas simples convexas*. Finalmente, conclua que $N(z,c)$ é univalente em Ω.

Nota: Considere o conjunto das *aplicações univalentes* $f(z)$ definidas no domínio multi-conexo Ω, normalizadas por

$$f(z) = \frac{1}{z-c} + a_0 + a_1(z-c) + \cdots \tag{1}$$

se $c = \infty$ a expressão fica

$$f(z) = z + a_0 + \frac{a_1}{z} \tag{2}$$

Considere o problema variacional $\mathcal{P}_1$ de se procurar encontrar uma função "ótima" $f(z)$, como acima (ver eq. (1)) de maneira que o a área do complemento da imagem seja máxima (ou seja com área exterior máxima). A solução do problema $\mathcal{P}_1$ existe e é dada pela função $N(z,c)$ que realiza o máximo da área exterior dentre todas as funções univalentes em Ω que obedecem à eq. (1). Por outro lado, a função $\dfrac{M(z,c)}{M'(c,c)}$, é a aplicação "ótima" que realiza a *menor área (com multiplicidades) da imagem* dentre todas as funções holomorfas $g(z)$ definidas em Ω com a normalização $g'(c) = 1$.

e) Usando a propriedade *ótima* da aplicação $f_\theta(z,c)$ acima, mostre que qualquer aplicação univalente da forma

$$f(z) = \frac{1}{z} + b_0 + b_1 z + \cdots \qquad \text{para} \quad |z| < 1$$

deve satisfazer $|b_1| \leqslant 1$. Compare com o *teorema da área* (veja exerc. 11) e mostre que a desigualdade é "sharp" analisando a aplicação $z \mapsto \dfrac{1}{z} + e^{2i\gamma} z,\ 0 \leqslant \gamma < 2\pi$.

f) Vamos agora estudar o fato que os domínios multi-conexos são conformemente equivalentes a um domínio obtido da esfera de Riemann removendo-se um número finito de arcos circulares concêntricos cujo centro comum é a origem. De fato, pode-se escolher pontos u e v num tal domínio Ω de maneira que a aplicação que realiza a equivalência conforme em foco $P(z) = P(z; u, v)$ seja normalizada, levando u na origem e v no infinito, possuindo resíduo 1 em $z = v$. Ou seja, se escreva

$$P(z) = \frac{1}{z-v} + b_0 + b_1(z-v) + \cdots$$

numa vizinhança de $z = v$. Mostre a unicidade de $P(z)$ usando o princípio do argumento (e o princípio do máximo). Para tal fim, se existisse uma outra função $P_1(z; u, v)$, considere o quociente $f(z) = \dfrac{P(z;u,v)}{P_1(z;u,v)}$. Mostre primeiramente que $F(z)$ é holomorfa em Ω. Sejam $C_1, C_2, \dots C_n$ as componentes de $\partial\Omega$. Mostre que $|f(z)| = c_j$ (constante) em cada $C_j,\ j = 1, 2, \dots n$. Mostre que se $|b| \neq c_j,\ j = 1, 2, \dots n$, então *a variação do argumento de $P(z) - b$ (e de $P_1(z) - b$) ao longo de cada componente C_j* é nula. Daí conclua que a *variação total do argumento de $f(z) - b$* ao longo do bordo de Ω é nula; donde $f(z) \neq b$, onde b é um número complexo qualquer que não está num dos círculos C_j. Finalmente conclua que $f(z)$ é uma constante e que esta constante é 1. Um argumento semelhante mostra a *univalência* de um candidato $P(z)$.

i) Mostre que se $\Omega = \mathcal{D}$, a bola unitária centrada na origem, a função $P(z)$ acima é dada por

$$P(z;u,v) = \frac{1-\overline{u}v}{(v-u)(1-|v|^2)} \cdot \left(\frac{z-u}{1-\overline{u}z}\right)\left(\frac{1-\overline{v}z}{z-v}\right)$$

Além disso mostre que a aplicação

$$Q(z;u,v) = \frac{1-|v|^2}{(v-u)(1-\overline{u}v)} \cdot \left(\frac{z-u}{z-v}\right)\left(\frac{1-\overline{u}z}{1-\overline{v}z}\right)$$

transforma conformemente o disco aberto $\mathcal{D}$ num domínio obtido do plano complexo $\mathbb{C}$ removendo-se segmento radiais que apontam para a origem.

ii) A existência da aplicação $P(z;u,v)$ que produz uma equivalência conforme entre o domínio muiti-conexo Ω e *a esfera de Riemann cortada ao longo de arcos de círculos centrados na origem* também pode ser estabelecida pelo método variacional. De fato, seja $\mathcal{S}(u,v)$ a família de funções $f(z)$ que são univalentes em Ω, normalizadas por

$$f(z) = \frac{1}{z-v} + b_0 + b_1(z-v) + \cdots$$

satisfazendo $f(u) = 0$. Então a função $P(z;u,v)$ que transforma Ω num domínio com cortes circulares é a *função ótima* que realiza o máximo do funcional $|f'(u)|$, quando $f(z)$ *varre o conjunto admissível* $\mathcal{S}(u,v)$. Pode-se mostrar que o mínimo do mesmo funcional, no mesmo conjunto admissível, é realizado por uma função $Q(z;u,v)$ que produz uma equivalência conforme entre o domínio muiti-conexo Ω e a *esfera de Riemann cortada ao longo de segmentos radiais apontando para a origem.* Ou seja, se $f(z) \in \mathcal{S}(u,v)$ então $|Q'(u)| \leqslant |f'(u)| \leqslant |P'(u)|$, e a igualdade é possível se e somente se $f = Q$ ou $f = P$.

iii) Usando as propriedades "ótimas" das transformações conformes do exercício anterior, mostre que se $f(z) = \dfrac{1}{z} + b_0 + b_1 z + \cdots$ é uma *aplicação univalente* em $\{|z| < 1\}$, então valem as seguintes desigualdades:

$$\frac{1-|z|^2}{|z|^2} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1}{|z|^2(1-|z|^2)}$$

compare com o *teorema de distorção de Koebe* (Veja o exerc. 13)).

g) O chamado *teorema de aplicação de Riemann* ou *teorema de uniformização de Koebe* diz que todo *domínio simplesmente conexo* Ω *cujo bordo tenha mais que um ponto* é conformemente equivalente, via uma equivalência conforme f, ao disco aberto unitário $\mathcal{D}$. Além disso, se fizermos corresponder um ponto arbitrário ζ de Ω à origem, i.e $f(\zeta) = 0$ impondo que que a derivada em $z = \zeta$, seja positiva, i.e $f'(\zeta) > 0$, então a aplicação está unicamente determinada. Um método interessante para determinar tal aplicação $f(z,\zeta)$ numa situação bastante geral faz uso do chamado *núcleo de Bergman.* Exercício-pesquisa: Investigue o núcleo de Bergman neste contexto, e exiba aplicações explícitas deste para domínios simplesmente conexos simples. Por exemplo, quando Ω é o próprio disco unitário $\mathcal{D}$. Analogamente é possível definir o núcleo de Bergman, no caso de Ω ser um domínio multi-conexo. Com isso é possível determinar explicitamente a função f_θ do item d) acima em casos particulares, como no exemplo em que Ω é um anel da forma $\Omega = \{r < |z| < 1\}$.

h) Considere $\mathcal{S}$ o conjunto das aplicações holomorfas do disco unitário em si mesmo. Seja $\zeta \in \mathcal{D}$. Considere o problema variacional de *maximizar* $|f'(\zeta)|,\ f \in \mathcal{S}$. Mostre que basta considerar o subconjunto das funções $f \in \mathcal{S}$ tal que $f(\zeta) = 0$. Neste caso mostre que vale a seguinte desigualdade

$$|f'(\zeta)| \leqslant \frac{1}{1-|\zeta|^2}, \qquad \forall f \in \mathcal{S}.$$

Além disso mostre que a igualdade na desigualdade acima é atingida apenas pela (família) aplicação "ótima"

$$f(z) = \lambda\left(\frac{z-\zeta}{1-\bar{\zeta}z}\right), \qquad |\lambda| = 1$$

Exercício-pesquisa: Estude a generalização do problema variacional acima quando $\mathcal{S}$ é a família de funções holomorfas $f(z)$, definidas num domínio multi-conexo Ω satisfazendo $|f(z)| \leqslant 1$. Mostre que $|f'(\zeta)|,\ \zeta \in \Omega$ atinge o máximo para uma certa função $F(z)$ definida em Ω que recobre o disco unitário $\mathcal{D}$ exatamente n vezes, onde n é o número das comnponentes conexas de $\partial\Omega$.

Equivalências conformes e aplicações conformes finitas

33) Exercício-pesquisa: Vamos agora dar um critério básico essencialmente topológico de univalência (Veja ref. 3)). Seja f uma função holomorfa não constante definida num domínio $\mathcal{H} \subset \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Seja Ω um *domínio de Jordan*, i.e $\partial\Omega$ é uma curva de Jordan. Suponha que $f(z) \to \partial\Omega$, quando $z \to \partial\mathcal{H}$. Mostre que $f(\mathcal{H}) = \Omega$. Além disso, mostre que se f assume em $\mathcal{H}$ algum valor de Ω apenas um única vez com multiplicidade 1, então f é injetiva e $\mathcal{H}$ é simplesmente conexo.

Para fazer os próximos exercícios é preciso o conhecimento do seguinte *teorema de Carathéodory*:

Seja f uma transformação conforme que envia $\mathcal{D}$ conformemente sobre um domínio limitado Ω. Então as seguintes afirmações são equivalentes:

i) f tem uma extensão contínua e injetiva à $\overline{\mathcal{D}}$.

ii) $\partial\Omega$ é uma curva de Jordan.

Nota: Quando $f : \mathcal{D} \to \Omega$, é uma transformação conforme (Ω limitado) a condição para a existência de uma extensão contínua a $\overline{\Omega}$ é que $\partial\Omega$ seja uma *curva* ou *localmente conexo*. Você deve tentar desenhar domínios cujo bordo não seja localmente conexo.

a) Mostre que uma transformação conforme f que leva um domínio de Jordan Ω num outro domínio de Jordan $\mathcal{H}$ está completamente determinada fixando-se a imagem em $\partial\mathcal{H}$ de três pontos fixados em Ω.

b) Mostre que uma transformação conforme do disco $\mathcal{D}$ num domínio de Jordan Ω se estende a um homeomorfimo da esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ em si mesmo.

O próximo critério dá a noção de *grau* de uma aplicação conforme e é muito importante:

c) Seja Ω um domínio de Jordan (limitado) e seja f uma função holomorfa não constante definida em $\mathcal{D}$. Suponha que $\operatorname{dist}(f(z), \partial\Omega) \to 0$ quando $|z| \to 1$. Mostre que $f(\mathcal{D}) = \Omega$ e que f tem uma extensão contínua à $\overline{\mathcal{D}}$. Além disso mostre que existe um inteiro positivo m tal que f assume cada valor em $\overline{\Omega}$ exatamente m vezes contadas as multiplicidades. Deduza daí um critério de univalência. *Sugestão* : Use o critério do início do exercício 30). Use seguidamente o teorema de Carathéodory e o princípio de reflexão de Schwarz. Conclua que $f = \varphi \circ g$, onde φ envia conformemente $\mathcal{D}$ sobre Ω e g é um produto de Blaschke *finito*.

34) Seja $f : \Omega \to \Omega$, uma aplicação holomorfa de um domínio Ω em si mesmo. O *iterado* $f^{[n]}$ está definida pela seguinte regra: $f^{[0]} = \mathrm{id}_\Omega$, $f^{[1]} = f$, $f^{[n]} := f \circ f \cdots \circ f$ (n vezes).

a) Uma propriedade dos iterados é a seguinte: Suponha que uma subseqüência $\{f_{n_k}\}$ da seqüência dos iterados convirja uniformemente em compactos de Ω à uma função holomorfa $g : \Omega \to \mathbb{C}$. Mostre que se g

é uma equivalência conforme de Ω então f também é uma equivalência conforme. Mostre também que se g não é uma constante então qualquer subseqüência da seqüência $h_k := f_{n_{k+1}-n_k}$, tem como limite a identidade de Ω. *Sugestão* : Para a segunda pergunta use o teorema de Hurwitz. Em particular conclua que se $f^{[n]}$ converge uniformemente em compactos de Ω a uma função não constante, então f é a identidade. Exiba exemplos explícitos onde esta última situação ocorre.

b) Mostre o seguinte *teorema de Cartan*: Seja $f : \Omega \to \Omega$, uma aplicação holomorfa de um domínio limitado Ω em si mesmo. Suponha que exista uma subseqüência f_{n_k} dos iterados de f que converge uniformemente em compactos a uma função não constante. Mostre que f é uma equivalência conforme de Ω. *Sugestão* : Aplique o item anterior combinado com o teorema de Montel. Conclua que se, Ω é limitado e f tem dois pontos fixos então distintos então f é uma equivalência conforme de Ω.

35) Exercício-pesquisa: Um importante conceito para aplicações é o conceito de ser *própria* que pode ser colocado num contexto bastante geral (Veja ref. 15)): Sejam X e Y espaços topológicos metrizáveis localmente compactos cujas topologias tenham base enumerável. Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ é chamada *própria* se cada conjunto compacto $K \subset Y$ tem pré-imagem $f^{-1}(K)$ compacta em X. Outro conceito importante é de uma *seqüência que tende para o bordo*: Seja $\{x_n\}$ uma seqüência de pontos de X (ou de Y). Dizemos que $\{x_n\}$ é uma *seqüência que tende para o bordo* se não tem ponto de acumulação em X (respect. Y). O seguinte resultado é válido:

Uma aplicação contínua $f : X \to Y$ ***é própria se e somente se*** f ***leva seqüência que tende para o bordo (de*** X***) a uma seqüência que tende para o bordo (de*** Y***).***

Toda aplicação própria é fechada, i.e leva fechados de X ***em fechados de*** Y. Para aplicações holomorfas f o fato de que f sendo não constante implica que f não é localmente constante numa vizinhança de nenhum ponto acarreta nas seguintes equivalências: Seja $f : \Omega \to \mathcal{H}$ uma aplicação holomorfa. Note que nesta situação a *fibra* $f^{-1}(w)$ é sempre um conjunto discreto, a menos que f seja constante. Dizemos que f é *finita* f leva toda seqüência que tende para o bordo de Ω a uma seqüência que tende para o bordo de $\mathcal{H}$. As seguintes afirmações são equivalentes:

i) f ***é finita***

ii) f ***é própria***

iiii) f ***é não constante e fechada*** Segue deste resultado o seguinte importante corolário: *Se* $f : \Omega \to \mathcal{H}$ *é uma aplicação conforme própria, então* f *é um recobrimento finito holomorfo não ramificado.* Quando $f : \Omega \to \mathcal{H}$ (não -constante) é apenas uma aplicação holomorfa *própria* (podendo possuir portanto pontos de ramificação que são os zeros de $f'(z)$) f é um *recobrimento finito ramificado.* Vamos agora definir a noção de *grau* de uma aplicação conforme $f : \Omega \to \mathcal{H}$ num ponto $w \in \mathcal{H}$. Em seguida poderemos enunciar o teorema de Radó que relaciona finitude com o grau de f. Tal noção generaliza a noção de grau de um polinômio baseada no teorema fundamental da álgebra. Seja f uma aplicação holomorfa não constante. Seja $w \in \mathbb{C}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{grau}_w(f) &= \sum_{a \in f^{-1}(w)} \nu(f, a) \qquad \text{se} \qquad w \in f(\Omega) \\ &= 0 \qquad \text{em caso contrário} \end{aligned}$$

onde $\nu(f, a)$ é a multiplicidade de f em $z = a \in \Omega$, ou seja é igual a *ordem do zero de* $f - f(a)$ em $z = a$.

a) Exercício-pesquisa: Mostre o seguinte *teorema de Radó*: Uma aplicação holomorfa $f : \Omega \to \mathcal{H}$ é finita (ou própria) se e somente se $\mathrm{grau}_w(f)$ é finito e não constante em Ω. Neste caso o *grau* $\mathrm{grau}(f)$ está bem definido e é um número inteiro positivo. As equivalência conformes são as aplicações holomorfas próprias de grau 1. Observamos que o teorema de Radó é válido para aplicações próprias holomorfas entre duas superfícies de Riemann S_1 e S_2 quaisquer.

BIBLIOGRAFIA

1. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variables I, II, III.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.

2. Alan F. Beardon. *Iteration of rational functions.* Springer, 1999.

3. Cristian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps.* Springer, 1992.

4. Einar Hille. *Analytic function theory I,II.* Chelsea, Nova York, 1982.

5. Einar Hille. *Lectures on ordinary differential equations.* Addison-Wesley, 1969.

6. Georges Valiron. *Théorie des functions.* Troisième edition, Masson, 1966.

7. Henri Cartan. *Teoria elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas.* Selecciones Cientificas, Madrid, 1968.

8. John B. Conway. *Functions of one complex variable I, II.* Springer, 1995.

9. J. Gerretsen e G. Sansone. *Lectures on the theory of functions of complex variable I, II.* Wolters-Noordhoff Publishing Goningen 1969.

10. Lars Ahlfors. *Complex analysis.* Mc Graw-Hill, 1996.

11. Norman Levinson e Raymond M. Redheffer. *Complex variables.* Holden-Day, SãoFrancisco, 1970.

12. Patrice Tauvel. *Analyse complexe.* Exercices corrigés. Dunod, 1999.

13. Raghavan Narasimhan e Yves Nievergelt. *Complex analysis in one variable.* Birkäuser, 2001.

14. Reinhold Remmert. *Theory of complex functions.* Springer, 1991 (*Readinds in Mathematics*).

15. Reinhold Remmert. *Classical topics in complex function theory.* Springer, 1998.

16. Serge Lang. *Complex Analysis.* Fourth Edition, Springer, 1999.

17. Sristi Chatterji. *Cours d'analyse 2, Analyse complexe.*Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Suiça, 1997.

18. Stephen D. Fisher. *Complex variables.* Second Edition. Dover Public., N. Y, 1999.

19. Walter Rudin. *Real and complex analysis.* Mc Graw-Hill,1987.

20. Welington de Melo. *Ferramentas matemáticas em dinâmica unidimensional.* Matemática Universitária, No 29, 75-113,2000.

21. Zeev Nehari. *Conformal maps.* Dover Publi.,N. Y. 1975.