VCOMPLEXAS-2001.2–Lista 9

prof: Ricardo Sá Earp

SÍNTESE DE FUNÇÕES HARMÔNICAS

conjugada harmônica

Considere Ω um domínio do plano complexo $\mathbb{C}$ e $u(z),\ z = x + iy$ uma função harmônica (real) em Ω. Lembremos que a *diferencial conjugada harmônica* está definida por

$$^*du = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy$$

Dizemos que v é *conjugada harmônica* de u em Ω, se existe uma função holomorfa f tal que $f = u + iv$ (logo v é harmônica).

1) Mostre que se γ é homóloga a zero em Ω, tem-se que

$$\int_\gamma {}^*du = 0$$

Conclua que quando Ω é simplesmente conexo a conjugada harmônica v está bem definida, ou seja *não é uma função multi-valente.* Conclua também que, se γ é uma curva regular então

$$\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n}|\,\mathrm{d}z| = 0$$

onde n é normal unitário ao longo de γ.

a) Mostre que se o bordo orientado Γ de Ω é composto por curvas analíticas, então

$$\int_\Gamma {}^*du = 0$$

No caso não simplesmente conexo a conjugada harmônica pode ter períodos. Os períodos de u estão definidos por

$$\int_{\gamma_j} {}^*du, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

onde $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ correspondem aos ciclos que geram a classe de homologia de Ω.

b) Mostre que se Ω é uma região *multi-conexa* e se $\{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n\}$ correspondem aos ciclos que geram a classe de homologia de Ω, então , u tem uma conjugada harmônica, se e somente se

$$\int_{\gamma_j} {}^*du = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

   i) Seja $\mathcal{A}$ um anel em $\mathbb{C}$, e seja $z_0 \in \mathcal{A}$. Suponha que a conjugada harmônica tenha período $2\pi i\alpha$. O que você pode dizer da conjugada harmônica v de u ? O que voce pode dizer da seguinte função

$$\mathrm{e}^{v(z)/\alpha} \qquad z \in \mathcal{A} \quad ?$$

   Encontre uma fórmula explícita de uma função harmônica u que possua uma bem definida conjugada harmônica v num anel
   $1 < |z| < 2$.

c) Suponha agora que Ω seja um domínio multi-conexo e seja $K_1, \ldots, K_n$ as componentes conexas limitadas de $\mathbb{C} \setminus \Omega$. Tome $a_j \in K_j, \quad j = 1, \ldots, n$. Sejam $2\pi c_1, 2\pi c_2, \ldots, 2\pi c_n$, os períodos da função harmônica u definida em Ω. Mostre que existe uma função analítica h em Ω tal que

$$u = \Re h + \sum_1^n c_j \log|z - a_j|$$

   i) Conclua que se $f(z)$ é uma função holomorfa no anel
   $0 < r < |z| < \infty$, que não se anula, então existe uma função harmôica limitada h em $r < s < |z| < \infty$, e uma função H harmônica em $\mathbb{C}$ tal que

$$\log|f(z)| = c \log|f(z)| + h(z) + H(z)$$

ii) Seja $u(z)$ uma função harmônica num disco perfurado $\mathcal{D}^* = \{0 < |z| < \epsilon\}$, e considere a função holomorfa, possivelmente muilti-valente $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, onde v é a conjugada harmônica de u. Mostre que $f'(z)$, é uma função holomorfa bem definida em $\mathcal{D}^*$, deduza que $f'(z)$ possui um desenvolvimento de Laurent em $\mathcal{D}^*$. Conclua com isso que $f(z)$, tem a seguinte expressão

$$f'(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$$

O quê voce sabe dizer da série acima ? Conclua além disso que $f(z)$, como *função holomorfa possivelmente multi-valente*, tem a seguinte expressão

$$f(z) = a + a_{-1} \log z + \sum_{\substack{n=-\infty \\ n \neq -1}}^{\infty} \frac{a_n z^{n+1}}{n+1}$$

Conclua ainda que a função harmônica u em $\mathcal{D}^*$ tem o seguinte desenvolvimento ($z = r\,\mathrm{e}^{i\theta}$)

$$u(r,\theta) = c \log r + \sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha_n \cos n\theta + \beta_n \sin n\theta) r^n$$

e conclua também que u é parte real da função holomorfa possívelmente multi-valente $f(z) = c \log z + \sum_{-\infty}^{\infty} (\alpha_n - i\beta_n) z^n$. Finalmente, usando o que foi estabelecido neste item, dê outra dedução do item i) logo acima.

iii) Conclua que uma função harmônica *limitada* num disco perfurado $\mathcal{D}^*$, admite uma extensão harmônica a todo o disco.

iv) Conclua que se u é uma função harmônica no disco perfurado $B_R(a) \setminus \{a\}$, então a média de u ao longo de círculos concêntricos de centro a e raio $r < R$ é uma função linear de $\log r$, ou seja existem constantes reais α e β tal que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(a + r\,\mathrm{e}^{i\theta})\, \mathrm{d}\theta = \alpha \log r + \beta$$

Conclua daí uma outra dedução do item iii) acima

d) Agora suponha que Ω seja uma região cujo bordo é composto por curvas analíticas simples fechadas. Seja Γ o bordo orientado de Ω. Suponha que $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$, seja uma função de classe C^1 em $\overline{\Omega}$. Mostre as seguintes identidades

$$\iint\limits_{\Omega} \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y = \frac{1}{2i}\int\limits_{\Gamma} f\,\mathrm{d}z$$

$$\int\limits_{\Gamma}(vdu - udv) = 4i\iint\limits_{\Omega}\left(\frac{\partial v}{\partial \overline{z}}\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial \overline{z}}\frac{\partial v}{\partial z}\right)$$

Além disso mostre que se u e v são de classe C^1 em $\overline{\Omega}$, e de classe C^2 em Ω, tem-se a *identidade de Green*

$$\int\limits_{\Gamma}(v^*du - u^*dv) = \iint\limits_{\Omega} v\triangle u - u\triangle v\,\mathrm{d}x\;\mathrm{d}y$$

i) Mostre que se u e v são harmônicas em Ω, e γ é um ciclo homólogo a zero em Ω, então

$$\int\limits_{\Gamma}(v^*du - u^*dv) = 0$$

Conclua daí outra dedução da fórmula da média de uma função harmônica num disco perfurado obtida no item c) iv) acima.

Conclua também que se u e v são funções harmônicas em Ω e de classe C^1 em $\overline{\Omega}$, então $\displaystyle\int_{\Gamma} v^*du = \int_{\Gamma} u^*dv$.

e) Mostre que a soma dos períodos de uma função harmônica, associados a todas componentes do bordo de um domínio multi-conexo Ω, é zero.

Algumas propriedades básicas

Agora vamos enfocar algumas propriedades básicas de funções harmônicas e subharmônicas, algumas de muito importância no que se segue.

2) Seja u uma função harmônica em $\mathcal{D} = B_1(0)$. Seja f uma função holomorfa em $\mathcal{D}$ tal que $\mathbb{R}f = u$ (por quê existe tal f ?) Mostre que para $|z| < r$ onde

$0 < r < 1$ tem-se que

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r\,\mathrm{e}^{it})\frac{r\,\mathrm{e}^{it}+z}{r\,\mathrm{e}^{it}-z}\,\mathrm{d}t$$

Deduza daí a fórmula de Poisson no disco $|z| < r$ para u. Ou seja

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(r\,\mathrm{e}^{it})\frac{r^2-|z|^2}{|r\,\mathrm{e}^{it}-z|^2}\,\mathrm{d}t$$

Note que a *desigualdade de Harnack* (veja ref. 13)) segue quase que imediatamente da seguinte estimativa do *núcleo de Poisson*

$$\frac{r-|z|}{r+|z|} \leqslant \frac{r^2-|z|^2}{|r\,\mathrm{e}^{it}-z|^2} \leqslant \frac{r+|z|}{r-|z|}, \qquad |z| < r$$

3) Uma função u de classe C^2 definida num domínio Ω é chamada de subharmônica, se $\triangle u \geqslant 0$ em Ω. Demonstre com todos os detalhes o princípio do máximo interior e do bordo para funções subharmônicas. Defina funções subharmônicas assumindo apenas u semi-contínua superiormente e estude as várias propriedades. Veja refs. 8), 13).
4) Mostre que se uma seqüência $\{u_n\}$ de funções harmônicas num aberto U, converge uniformemente a uma função u em compactos de U, então u é necessariamente harmônica. Mostre que a seqüência das derivadas parciais converge uniformemente em compactos para a derivada parcial de u. *Sugestão* : Você pode usar a fórmula do item 2).
5) Exercício-pesquisa: Demonstre a *desigualdade de Harnack* para funções harmônicas (veja exerc. 2)) e e demonstre o princípio de Harnack: Veja ref. 13). Deduza também o *teorema de Liouville* : Se uma função harmônica definida em todo o plano complexo é, limitada ou bem superiormente ou bem inferiormente, então é necessariamente uma constante.
6) Demonstre o *teorema de três círculos de Hadamard*: Seja $u(z)$ uma função subharmônica num domínio Ω, contendo dois círculos concêntricos de raios r_1 e r_2 e o anel delimitado por estes. Seja $M(r)$ o máximo de u num determinado círculo de raio r, então para $r_1 < r < r_2$, mostre que vale a seguinte desigualdade

$$M(r) \leqslant \frac{M(r_1)\log(r_2/r) + M(r_2)\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)}$$

e ocorre a igualdade, se e somente se

$$u = \frac{M(r_1)\log(r_2/r) + M(r_2)\log(r/r_1)}{\log(r_2/r_1)}$$

onde $r = |z|$. *Sugestão* : Aplique o princípio do máximo de forma conveniente.

a) Conclua o *teorema de Liouville*: Se uma função subharmônica definida em $\mathbb{C}^*$, o plano complexo menos um ponto, é limitada superiormente então é uma constante.

b) Mais geralmente, mostre que se a hipótese de ser limitada superiormente é enfraquecida e substituída por

$$\liminf \frac{M(r)}{|\log r|} \leqslant 0$$

quando $r \to 0$ e quando $r \to \infty$, obtemos também que u é uma constante.

Função de Green

Seja U um aberto de $\mathbb{C}$ e seja $p \in U$. Uma função g é chamada de *função de Green para U com singularidade em p*, se

$$g \text{ é harmônica em } M \setminus \{p\}$$

$$g > 0 \ \text{ em } M \setminus \{p\}$$

se z é uma coordenada (conforme) se anulando em p, então

$$g(z) + \log|z| \text{ é harmônica numa vizinhança de } p.$$

se $\tilde{g}$ é outra funçao satisfazendo as três propriedades anteriores ,então $\tilde{g} \geqslant g$

7) Mostre que a definição da função de Green acima não depende da escolha de "coordenadas locais" se anulando em p.

a) Mostre que a função de Green para o disco unitário com singularidade em a é

$$g(z) = \log\left|\frac{1 - z\overline{a}}{z - a}\right|$$

Mostre que a função de Green no semi-plano à direita $\{\Re z > 0\}$, é

$$\log\left|\frac{z + \overline{a}}{z - a}\right|$$

i) Exiba a função de Green para os domínios simplesmente conexos tratados na lista 8.

b) Exercício-pesquisa: Veja refs. 4), 8), 10). Seja Ω um domínio de $\mathbb{C}$ de fecho compacto tal que $\partial\Omega$ consiste de um número finito de arcos analíticos. Seja $z_0 \in \Omega$. Resolvendo o problema de Dirichlet para funções harmônicas sendo dada uma função contínua f no bordo (o que sempre é possível, por quê ?), quando $f(z) = \log|z - z_0|,\ z \in \partial\Omega$, encontramos uma função u contínua em $\overline{\Omega}$ e harmônica em Ω tal que u restrita à $\partial\Omega$ é igual a f. Mostre que $g(z) = -\log|z - z_0| + u(z)$ é a função de Green para Ω com singularidade em z_0.

Nota (Sobre conceitos importantes de superfícies de Riemann). Vamos fazer uma incursão nas *superfícies de Riemann.* O leitor deve está pelo menos ciente das definições básicas: Veja refs. 4), 8), 10). De qualquer maneira, para os interessados na Análise Complexa, mas que não estão familiarizados com o conceito, basta saber por ora que *todo aberto conexo do plano complexo* $\mathbb{C}$ é uma superfície de Riemann. A existência de uma função de Green num ponto está ligada à *existência de medidas harmônicas* (veja abaixo) e é *equivalente* a noção de *hiperbolicidade* . Uma função de Green se aoroxima de 0 quado um ponto se aproxima do bordo de Ω em $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Numa *superfície de Riemann parabólica* o problema de Dirichlet para funções harmônicas tem no máximo uma solução limitada.

Vamos definir os importantes conceitos de parabolicidade e hiperbolicidade para uma superfície de Riemann. Diz- se que uma superfície de Riemann M é parabólica se M não é compacta e se não admite uma função negativa ($\leqslant 0$) subharmônica sobre M que não seja uma constante. Uma superfície de Riemann é chamada hiperbólica se possui uma função subharmônica negativa ($\leqslant 0$) sobre M que não é uma constante. Uma superfície de Riemann compacta é chamada de elíptica.

Note que uma superfície de Riemann hiperbólica não pode ser compacta. Note também que segue de um exercício anterior que $\mathbb{C}$ e $\mathbb{C}^*$ são superfícies de Riemann parabólicas. Por quê ? Claro que que a bola aberta unitária $\mathcal{D}$ é uma superfície de Riemann hiperbólica.

8) Seja Ω um domínio limitado de $\mathbb{C}$, cuja fronteira orientada Γ, é composta por

curvas simples fechadas Suponha que $v = v(x, y)$ seja uma função harmônica que admita derivadas parciais contínuas até o bordo; ou seja $u \in C^1(\overline{\Omega})$. Seja $a \in \Omega$, e seja $h(x, y) := -\log|z - a| + v(x, y)$. Seja u uma função harmônica em Ω, C^1 até o bordo. Mostre que (*terceira identidade de Green*)

$$u(a) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma}\left(u\frac{\partial h}{\partial n} - h\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$$

onde $a \in \Omega$, e n é o *o normal unitário ao longo de* Γ *apontando para fora. Sugestão* Remova uma pequena bola de raio ϵ em torno de a, e aplique a segunda identidade de Green à u e h. Use a definição de h, e aplique o teorema da média para funções harmônicas.

a) Conclua que se g é a função de Green de Ω com respeito a a, e u satisfaz as hipóteses acima

$$u(a) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} u(z)\frac{\partial g(z, a)}{\partial n}\,\mathrm{d}s \qquad \text{ou ainda}$$

$$u(a) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma} u(z)\ {}^*dg$$

Mostre que quando $\Omega = B_1(0)$, a fórmula acima é exatamente a *fórmula integral de Poisson para funções harmônicas*, deduzida no item 2).

b) Exercício-pesquisa: Discuta a fórmula acima relacionando-a com o *problema de Dirichlet para funções harmônicas.* Veja refs. 4), 8), 10).

c) Exercício-pesquisa: Consulte no livro de Pommerenke (Veja ref.3)), a relação entre funções de Green, funções harmônicas, *capacidade logarítmica* e *medida de Hausdorff.* Neste livro você encontrará um estudo profundo sobre transformações conformes e comportamento no bordo.

Medidas harmônicas

Considere Ω um domínio multi-conexo e sejam $C_1, \ldots C_n$ as componentes conexas (que podem ser assumidas curvas analíticas, por quê ?) de $\partial\Omega$. Para cada $j = 1, \ldots n$, existe uma função harmônica $\omega_j(z)$ em Ω que toma o valor 1 ma componente C_j e que toma o valor 0 nas demais componentes do bordo de Ω (Veja refs. 4), 8), 10) e 21). Recomendamos principalmente os livros de Ahlfors e de Nehari. Tal função harmônica $\omega_j(z)$ é chamada de *medida harmônica*. Isto segue da existncia do problema de Dirichlet; ou ainda, mais concretamente, de certas transformações canônicas de domínios multi-conexos e da relação do problema de Dirichlet com as funções de Green (Veja o exerc. 8) acima).

9) Mostre que a *medida harmônica* $\omega_j(z)$ definida no domínio multiconexo Ω cujas componentes do bordo são curvas C_j ($j \in \{1, \dots n\}$) satisfaz

$$\omega_j(z) = -\frac{1}{2\pi} \int\limits_{C_j} \frac{\partial g(\zeta, z)}{\partial n_\zeta} \, \mathrm{d}s_\zeta$$

onde $g(\zeta, z)$ é a função de Green de Ω.

a) Conclua que os períodos da função de Green $g(\zeta, z)$ do domínio multiconexo Ω ao longo da componente do bordo C_j é extamente $-2\pi\omega_j(z)$.

Agora, considere p_{ij} o período da medida harmônica $\omega_j(z)$ ao longo da componente C_i, isto é (por quê ?)

$$p_{ij} = \int\limits_{C_i} \frac{\partial \omega_j}{\partial n} \, \mathrm{d}s$$

b) Mostre a seguinte propriedade de simetria: $p_{ij} = p_{ji}$. *Sugestão* : Utilize a fórmula de Green.

i) Mostre que a matriz simétrica (p_{ij}), $i, j = 1, \dots n-1$ é positiva definida: Em particular, deduza que $\det(p_{ij}) \neq 0$. *Sugestão* : Considere uma combinação linear $\omega(z) := a_1\omega_i(z) + a_2\omega_2(z) + \cdots + a_{n-1}\omega_{n-1}(z)$, onde nem todos os coeficientes sejam nulos e aplique a identidade de Green a $\omega(z)$.

c) Mostre que se $u(z)$ é uma função harmônica em Ω, é possível encontrar constantes $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ de maneira que a conjugada harmônica de $u(z) + \sum_{j=1}^{n-1} A_j\omega_j(z)$ não tenha períodos.

Além disso mostre que o período P_j da conjugada harmônica $v(z)$ de $u(z)$ ao longo de C_j é dado pela fórmula

$$P_j = \int\limits_{\partial\Omega} u(z) \frac{\partial \omega_j(z)}{\partial n} \, \mathrm{d}s$$

d) Mostre que não é verdade que toda função holomorfa num domínio multi-conexo Ω, é derivada de uma função holomorfa. Mostre que toda função holomorfa $f(z)$ num domínio multi-conexo Ω, pode ser escrita da forma

$$f(z) = g'(z) + \sum_{j=1}^{n-1} c_j \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(\omega_j(z) + i\omega_j^*(z))$$

onde $g(z)$ é uma função holomorfa em Ω, e $\omega_j^*(z)$ é a conjugada harmônica de $\omega_j(z)$. *Sugestão* : Use o resultado do item b) acima.

Teoremas de representação

Considere S^1 o círculo unitário centrado na origem; ou seja $S^1 = \partial B_1(0)$.

No que segue você terá que consultar as refs. 8), 19) e você vai certamente precisar de tomar conhecimento de definições , técnicas e resultados básicos da Teoria da Medida (inclusive medida complexa) e da Análise Funcional, incluindo os espaços L^p.

Seja μ uma *medida complexa* sobre S^1.

10) Exercício-pesquisa: Estude o *teorema de representação de Riesz* . Estude o *teorema de Lebesgue-Radon-Nikodym* (medida complexa). Também estude espaços de Banach separáveis. Estude os espaços de Hardy. Veja refs. 8), 13) e principalmente 19).

11) Mostre que

$$\int_{S^1} \frac{1-|z|^2}{|\,\mathrm{e}^{it} - z|^2}\,\mathrm{d}\mu(\mathrm{e}^{it}) \qquad z \in\ B_1(0)$$

é uma função harmônica em $B_1(0)$.

12) Seja μ, uma medida positiva sobre S^1. Mostre que

$$f(z) = \int_{S^1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\mu(\zeta)$$

é uma função holomorfa em $B_1(0)$, e toma valores em $\{\Re z > 0\}$.

Seja f uma função contínua em $B_1(0)$. Define-se uma função f_r em S^1, por

$$f_r(\mathrm{e}^{i\theta}) := f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})$$

Seja θ, a medida de Lebesgue usual sobre S^1. Denote-se

$$\|f_r\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_{S^1} |f_r(\mathrm{e}^{i\theta})|^p \,\mathrm{d}\theta\right)^{1/p} \qquad (0 < p < \infty)$$

$$\|f_r\|_\infty = \sup_\theta |f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|$$

Seja f uma função holomorfa na bola unitária $B_1(0)$, e $0 < p \leqslant \infty$. Define-se

$$\|f\| := \sup\{\|f_r\|;\ 0 \leqslant r < 1\}$$

O espaço de Hardy H^p para $0 < p \leqslant \infty$, consiste de todas as funções holomorfas f definidas na bola unitária para as quais vale $\|f\|_p < \infty$.

13) Exercício-pesquisa: Estude os espaços de Hardy. Veja refs. 8), 13) e 19).

14) Exercício-pesquisa (Veja a refs. 8), 19)): Suponha que u seja uma função harmônica em $B_1(0)$, e que $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Suponha ainda que

$$\sup\{\|u_r\|;\ 0 \leqslant r < 1\} = M < \infty$$

a) Se $p = 1$, mostre que existe uma única medida de Borel complexa μ, sobre S^1, tal que

$$u = \int\limits_{S^1} \frac{1 - |z|^2}{|\,\mathrm{e}^{it} - z|^2}\,\mathrm{d}\mu(\mathrm{e}^{i\theta}) \qquad z \in B_1(0)$$

b) Se $p > 1$, mostre que existe uma única função $f \in L^p(S^1)$, tal que

$$u(z) = \int\limits_{S^1} \frac{1 - |z|^2}{|\,\mathrm{e}^{it} - z|^2}\, f\,\mathrm{d}\theta \qquad z \in B_1(0)$$

c) (Teorema de Herglotz) Toda função harmônica positiva sobre $B_1(0)$, é integral de Poisson de uma única medida de Borel positiva sobre S^1.

i) Mostre que se f é uma função holomorfa na bola unitária que toma valores no semi plano $\{\Re z > 0\}$, com $f(0) > 0$, então existe uma medida positiva μ em S^1, tal que

$$f(z) = \int\limits_{S^1} \frac{\zeta + z}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\mu(\zeta)$$

Lembremos da classe de Nevanlinna parcialmente estudada na lista 7: A *família de Nevanlinna*, denotada por $\mathcal{N}$, é o conjunto de funções holomorfas em $B_1(0)$, satisfazendo

$$\sup_{0<r<1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log^+ |f(r\,\mathrm{e}^{i\theta})|\,\mathrm{d}\theta < \infty$$

15) Exercício-pesquisa (Veja refs. 8), 19)). Mostre o teorema de F. e R. Nevanlinna: Se f é uma função holomorfa na bola unitária, então $f \in \mathcal{N}$, se e somente se f é o quociente de duas funções holomorfas limitadas em $B_1(0)$.
   a) Estude o teorema de fatoração na classe de Nevanlinna $\mathcal{N}$.
   b) Estude o teorema de fatoração na classe de Hardy H^p para $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

BIBLIOGRAFIA

1. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variables I, II, III.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1965.
2. Alan F. Beardon. *Iteration of rational functions.* Springer, 1999.
3. Cristian Pommerenke. *Boundary behavior of conformal maps.* Springer, 1992.
4. Einar Hille. *Analytic function theory I,II.* Chelsea, Nova York, 1982.
5. Einar Hille. *Lectures on ordinary differential equations.* Addison-Wesley, 1969.
6. Georges Valiron. *Théorie des functions.* Troisième edition, Masson, 1966.
7. Henri Cartan. *Teoria elemental de las funciones analíticas de una y varias variables complejas.* Selecciones Cientificas, Madrid, 1968.
8. John B. Conway. *Functions of one complex variable I, II.* Springer, 1995.
9. J. Gerretsen e G. Sansone. *Lectures on the theory of functions of complex variable I, II.* Wolters-Noordhoff Publishing Goningen 1969.
10. Lars Ahlfors. *Complex analysis.* Mc Graw-Hill, 1996.
11. Norman Levinson e Raymond M. Redheffer. *Complex variables.* Holden-Day, SãoFrancisco, 1970.
12. Patrice Tauvel. *Analyse complexe.* Exercices corrigés. Dunod, 1999.

13. Raghavan Narasimhan e Yves Nievergelt. *Complex analysis in one variable.* Birkäuser, 2001.

14. Reinhold Remmert. *Theory of complex functions.* Springer, 1991 (*Readinds in Mathematics*).

15. Reinhold Remmert. *Classical topics in complex function theory.* Springer, 1998.

16. Serge Lang. *Complex Analysis.* Fourth Edition, Springer, 1999.

17. Sristi Chatterji. *Cours d'analyse 2, Analyse complexe.*Presses Polytechniques et Universitaires romandes, Suiça, 1997.

18. Stephen D. Fisher. *Complex variables.* Second Edition. Dover Public., N. Y, 1999.

19. Walter Rudin. *Real and complex analysis.* Mc Graw-Hill,1987.

20. Welington de Melo. *Ferramentas matemáticas em dinâmica unidimensional.* Matemática Universitária, No 29, 75-113,2000.

21. Zeev Nehari. *Conformal maps.* Dover Publi.,N. Y. 1975.