INTROD. VCOMPLEXAS- AGOSTO DE 2004–ListaA

Professor: Ricardo Sá Earp

PARTE A: NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA DE $\mathbb{C}$

1) Coloque sobre a forma $x + iy$ as seguintes expressões

   a) $\dfrac{(-1/2 + i\sqrt{3}/2)^4}{3 - 2i}$.

   b) $(1+i)^n + (1-i)^n, n \in \mathbb{N}$.

2) Resolva as equações

   a) $z^3 = -1$.

   b) $z^2 + \sqrt{32}iz - 6i = 0$.

3) Determine o conjunto

$$E = \Big\{ z; z = c + \rho\Big(\frac{1+it}{1-it}\Big), t \in \mathbb{R} \Big\}.$$

   $c \in \mathbb{C}, \rho > 0$.

4) Seja $f(z) = \dfrac{z-a}{z\bar{a}-1}$, $|a| < 1$. Mostre que $|f(z)| < 1$ se $|z| < 1$ e $|f(z)| = 1$ se $|z| = 1$.

Pesquisa opcional: Diga tudo o que você poderá descobrir sobre a função $z \mapsto f(z)$.

5)

   a) Mostre que se $w^n = 1, w \neq 1, n \geqslant 2$ então

$$1 + w + \cdots + w^{n-1} = 0.$$

   b) Seja $w = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}$. Mostre que para $h \neq kn, k \in \mathbb{Z}$, tem-se que

$$1 + w^h + \cdots + w^{(n-1)h} = 0.$$

   Além disto verifique que

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = (z-w)(z-w^2)\cdots(z-w^{n-1}).$$

6) Considere $\mathcal{L}$ a reta em $\mathbb{C}$ determinada pelo número complexo a e pelo vetor diretor $b \in \mathbb{C}, b \neq 0$. Determine os seguintes conjuntos
   a) $\left\{z; \operatorname{Im}\left(\dfrac{z-a}{b}\right) = 0\right\}$
   b) $\left\{z; \operatorname{Im}\left(\dfrac{z-a}{b}\right) > 0\right\}$
   c) $\left\{z; \operatorname{Im}\left(\dfrac{z-a}{b}\right) \geqslant 0\right\}$
7) Mostre que a equação geral de uma reta ou círculo no plano complexo é da forma
$$\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$$
onde $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}, |\beta|^2 > \alpha\gamma$.
   a) Dê condições sobre α para que a equação represente ou bem uma reta ou bem um círculo. No caso do círculo calcule o seu centro e o seu raio, em função dos parâmetros α, β, γ.
8) Demonstrar que a equação do círculo passando por três pontos não colineares a, b, c é dada por
$$\begin{vmatrix} |z|^2 & z & \bar{z} & 1 \\ |a|^2 & a & \bar{a} & 1 \\ |b|^2 & b & \dot{b} & 1 \\ |c|^2 & c & \dot{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$
9) Mostre que
$$A|\alpha|^2 + B\alpha\bar{\beta} + \bar{B}\bar{\alpha}\beta + C|\beta|^2 \geqslant 0$$
para toda escolha de $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$
$$A \geqslant 0, \quad C \geqslant 0, \quad |B|^2 \leqslant AC$$
.

10) Utilize o exercício anterior e o fato que $\sum_{k=1}^{n} |\alpha a_k + \beta \dot{b}_k|^2 \geqslant 0$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ para estabelecer a desigualdade de Schwarz:
$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2.$$