INTROD. VCOMPLEXAS- AGOSTO DE 2004–ListaB

Professor: Ricardo Sá Earp

PARTE A: DIFERENCIABILIDADE

1) Mostre a seguinte *regra da cadeia*: Seja A um conjunto aberto de $\mathbb{C}$ e seja $f \in C^1(A)$. Se B é um aberto de $\mathbb{C}$ tal que $f(A) \subset B$ e $g \in C^1(B)$, então $g \circ f \in C^1(A)$ e

a)

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial z} = \Big[(\frac{\partial g}{\partial z}) \circ f \Big] \frac{\partial f}{\partial z} + \Big[(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}) \circ f \Big] \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial (g \circ f)}{\partial \bar{z}} = \Big[(\frac{\partial g}{\partial z}) \circ f \Big] \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \Big[(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}}) \circ f \Big] \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \overline{\Big(\frac{\partial \overline{g}}{\partial \overline{z}} \Big)}$$

0) Seja $g(z)$ é uma função anti-holomorfa definida num aberto A do plano complexo $\mathbb{C}$. Estabeleça a equação diferencial complexa de primeira ordem que $g(z)$ satisfaz. Mostre que se $g(z)$ toma apenas valores imaginários puros então $g(z)$ é constante.

i) Calcule

$$\frac{\partial}{\partial z}(3\overline{z}^3 - z^2 + 1) \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}}(z^8 + 2z^3\overline{z}^6)$$

$$\frac{\partial^5}{\partial z^3 \partial \overline{z}^2} \left(\overline{z}^{11} z^7 + z^8 + 2\overline{z}^3 \right) \qquad \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} \left(\overline{z}^{11} z^7 + z^8 + 2\overline{z}^3 \right)$$

$$\frac{\partial^5}{\partial z^3 \partial \overline{z}^2} \left(x^{11} y^7 + x^8 + 2y^3 \right) \qquad \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} \left(2\overline{z}^6 z^6 + z^5 + 2\overline{z}^7 \right)$$

b) Mostre que $\dfrac{\partial (\log|z|)}{\partial z} = \dfrac{1}{2z}$ e $\dfrac{\partial (\log|z|)}{\partial \bar{z}} = \dfrac{1}{2\bar{z}}$

c) Se $\triangle$ é o laplaciano usual então

$$\triangle = 4\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\frac{\partial}{\partial z} = 4\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

d) Se $\lambda(z) = \dfrac{2}{1-|z|^2}$, $|z| < 1$, então $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ é a métrica hiperbólica no disco unitário aberto $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$. Mostre que a *curvatura de Gauss* K dada por $K(z) = \dfrac{-\triangle \log \lambda}{\lambda^2}$ é identicamente igual a -1.

e) Mostre rigorosamente que as funções$f(z)$ e $\overline{f(\bar{z})}$ são simultâneamente holomorfas.

f) Seja f uma função holomorfa num aberto $U \subset \mathbb{C}$. Suponha que f não se anule. Mostre que

$$\triangle\left(|f|^p\right) = p^2 |f|^{p-2}\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|^2, \qquad \text{para } p > 0$$

g) Mostre que se f é harmônica tomando valores reais no aberto U, e se f não se anula, então

$$\triangle\left(|f|^p\right) = p(p-1)|f|^{p-2}\left|\nabla f\right|^2, \qquad \text{para } p \geqslant 1$$

h) Mostre que o laplaciano em coordenadas polares é escrito da forma

$$\triangle = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

i) Seja $P : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ um polinômio. Suponha que

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}P = 0$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostre que

$$P(z, \overline{z}) = z \cdot G(\overline{z}) + H(\overline{z})$$

para polinômios G e H que dependem apenas de $\overline{z}$.

2) Seja f uma função holomorfa definida num domínio Ω de $\mathbb{C}$.

a) Demonstre que f é constante se uma das condições seguintes são verificadas:

(i) Ref é constante (ii) $\operatorname{Im} f$ é constante (iii) $a\mathrm{Re}f + b\operatorname{Im} f + c = 0$, onde $a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0$. (iv) $|f|$ é constante.

b) Mostre as mesmas afirmações do item a) assumindo que $f(z)$ é anti-holomorfa.

c) Mostre que $\forall z \in \Omega$

$$\triangle\Big(\big|f(z)\big|^2\Big) = 4\big|f^{'}(z)\big|^2$$

admitindo o fato de que $f = u + iv, u, v \in C^2(\Omega)$.

(v) Seja $f(z) = u(z) + iv(z), \Re f = u, \operatorname{Im} f = v$ uma função holomorfa num domínio Ω satisfazendo

$$2u^2(z) + v^2(z) = 1, \qquad \forall z \in \Omega$$

Determine *todas* tais $f(z)$.

Generalize quando $u(z)$ e $v(z)$ satisfazem a equação geral do segundo grau

$$au^2 + 2buv + cv^2 + du + ev + k = 0 \quad (a, b, c, d, k \in \mathbb{R})$$

3) Seja Ω um domínio do plano complexo. Sejam f e g funções holomorfas em Ω. Assuma que g nunca se anule em Ω e que $\dfrac{f(z)}{\left(\overline{g(z)}\right)} \in \mathbb{R}$, para todo $z \in \Omega$.

O que você pode dizer da relação entre f e g ?

(4) Seja C uma curva contida no w-plano complexo $\mathbb{C}$ determinada implicitamente pela equação

$$\varphi(u, v) = 0$$

a) Suponha que $f(z) = u(z) + iv(z)$ seja uma função holomorfa definida num aberto A de $\mathbb{C}$ satisfazendo $\varphi(u(z), v(z)) = 0, \forall z \in A$. O que você pode dizer sobre f?

b) Idem item a) assumindo que $f(z)$ é anti-holomorfa.

(5) Considere a equação diferencial complexa de segunda ordem dada por

$$(*) \qquad E_{z\overline{z}} = \frac{\overline{E}}{1 + E\overline{E}}\, E_z E_{\overline{z}}$$

Encontre duas famílias de soluções da equação $(*)$.

(6) Sejam f, g duas funções holomorfas definidas num aberto A de $\mathbb{C}$ não se anulando simultaneamente. Seja

$$H(z) := \log\left(\frac{1}{|f(z)|^2 + |g(z)|^2}\right)$$

Mostre que $H(z)$ é superharmônica em A.