

# INTROD. VCOMPLEXAS- AGOSTO DE 2004-ListaC

Professor: Ricardo Sá Earp

## PARTE A: SÉRIES DE NÚMEROS COMPLEXOS

- 1) Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz mostre que se  $\sum_n |a_n| < \infty$  as seguintes séries são convergentes

$$\sum_n |a_n a_{n+1}|^{1/2}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n}, \quad \sum_{n \geq 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n^{1/2+p}}, \quad p > 0.$$

Voce poderia dar uma demonstração mais elementar ?

- 2) Mostre com todos os detalhes que se  $\sum a_n$ ,  $\sum b_n$  são duas séries que convergem absolutamente então o produto das séries converge absolutamente e temos que

$$\left( \sum_n a_n \right) \left( \sum_n b_n \right) = \sum_n c_n$$

onde  $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$ .

- a) Considerando a função exponencial  $e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$ , a função cosseno dada

$$\text{por } \cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} \text{ e a função seno dada por } \sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

usando o resultado sobre produto de séries, mostre que

- a)  $2 \sin z \cos z = \sin 2z$ .  
b)  $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ .  
c)  $f(z) = e^{z-1/z}$  é holomorfa em  $\mathbb{C}^*$  e que

$$e^{z-1/z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \geq n}} \frac{1}{m!} \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!} \right) z^n$$

sendo a série absolutamente convergente para  $|z| > 0$ .

- b) Mostre que a série abaixo converge para  $p > 0$  e converge absolutamente para  $p > 1$ .

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$$

- i) Mostre que a série  $\sum c_n$  diverge para  $0 < p \leq 1/2$ , onde

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^n ((k+1)(n-k+1))^{-p}$$

- 3) Considere a função

$$f(z) = \cos(\sqrt{z}) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), z \in \mathbb{C}^*$$

- a) Mostre com certo *detalhe* que  $f(z)$  está bem definida e é holomorfa em  $\mathbb{C}^*$ .

- b) Escreva o desenvolvimento de  $f(z)$  numa “série de potências” em  $z^n$  e  $\left(\frac{1}{z}\right)^n$ , chamada de *desenvolvimento de Laurent* de  $f(z)$ , absolutamente

convergente para  $|z| > 0$ , i.e  $f(z) = \sum_{N=-\infty}^{N=\infty} a_N z^N$  obtendo

- i) Os termos  $a_1, a_0, a_{-1}$  explicitamente efetuando o produto.

Mais geralmente obtenha

- ii)

$$\cos(\sqrt{z}) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) = \sum_{N=-\infty}^{N=\infty} \sum_{\substack{m \geq N \\ m \geq 0}} \frac{(-1)^N}{(2m)!(2m-2N)} z^N$$

- 4) Determine o raio de convergência das séries de potências, determinando o disco de convergência. Determine um domínio compacto em que a série converge normalmente.

- a)  $\sum_n n^\alpha z^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .  
 b)  $\sum_n n!(z/n)^n$ .  
 c)  $\sum_n \alpha^{n^2} z^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .  
 d)  $\sum_n \frac{1}{n!} \alpha(\alpha+1) \cdots (\alpha+n) z^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ ;  $\sum_n \frac{1}{n!} \alpha(\alpha-1) \cdots (\alpha-n) z^n$ ,  $\alpha \in \mathbb{C}$ .

*Sugestão: Considere o caso  $\alpha \in \{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$  separadamente.*

e)  $\sum_n (\log n)^2 z^n$ . Resposta: 1.

f)  $\sum_n n!/(n^n)z^n$ .

*Sugestão:* Considere a fórmula de Stirling  $n! = n^n e^{-n} u_n$  com  $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n^{1/n} = 1$ .

Resposta: e

g)  $\sum_n z^{2^n}/(n!)$ .

5)

a) Sejam  $a, b, c$  números complexos. Suponha que  $c$  não é um inteiro  $\leq 0$ . Mostre que o raio de convergência da série abaixo é 1, disco de convergência. Determine um domínio compacto em que a série converge normalmente.

$$1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1) \cdot b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2 + \dots$$

$$+ \frac{a(a+1) \dots (a+n-1) \cdot b(b+1) \dots (b+n-1)}{n!c(c+1) \dots (c+n-1)}z^n + \dots$$

6) Mostre que as séries de números complexas abaixo, convergem nos conjuntos  $\mathcal{C}$  dados

a)  $\sum_n (z/(1+z))^n$ .  $\mathcal{C} = \{z; \Re z > -1/2\}$ . Determine um domínio compacto em que a série converge normalmente. *Sugestão:* Você terá que mostrar que  $z \mapsto \frac{z}{1+z}$  leva o semi-plano  $\{z; \Re z > -1/2\}$  no disco unitário centrado na origem.

b)  $\sum_n z^n/(1+z^n)$ .  $\mathcal{C} = \{z; |z| < 1\}$ .

c)  $\sum_n \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$ .  $\mathcal{C} = \{z, \Re z > 0\}$ . *Sugestão:* Veja sugestão para o item a).

d) O quê você pode dizer sobre *convergência normal* das séries dos itens anteriores ?

Classicamente, o domínio limitado pelas chamadas *curvas de Cassini*, dadas por

$$|z-a||z+a| = R^2, \quad a, R > 0$$

são chamados de domínios de Cassini. Para  $a = R$ , a origem é um ponto duplo, para  $a > R$  tem duas componentes conexas e para  $a < R$  é um domínio estrelado cujo centro é a origem.

- e) Mostre que a série  $\sum_n \left(\frac{1}{2}z(z-1)\right)^{2^n}$ , converge em certo domínio de Cassini.
- d) O que você pode dizer sobre *convergência normal* das séries dos itens anteriores ?
- 7) Seja  $R$  o raio de convergência da série  $\sum_{n \geq 0} a_n z^n$ . Mostre que o raio de convergência  $\tilde{R}$  da série

$$\sum_{n \geq 0} \frac{a_n}{1 + |a_n|} z^n$$

é dado por  $\tilde{R} = \max(R, 1)$

- 8) Determine os raios de convergência das séries. Indique um domínio compacto no qual a série converge normalmente:
- $\sum_{n \geq 0} (-1)^n 2^n z^{2n+2}$ .
  - $\sum_{n \geq 0} 2^{\log n} z^n$ .
  - $\sum_{n \geq 0} (\sin n) z^n$ .
- 9) Sejam  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$  duas seqüências de números reais. Seja  $\delta > 0$ . Assuma que  $(\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n)^2 + (\cos \beta_1 + \dots + \cos \beta_n)^2 \geq \delta$ .

O que você pode dizer sobre o raio de convergência das séries  $\sum a_n z^n$ , onde os coeficientes  $a_n$  estão dados abaixo ?

- Sejam  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$  duas seqüências de números reais. Seja  $\delta > 0$ . Assuma que  $(\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n)^2 + (\cos \beta_1 + \dots + \cos \beta_n)^2 \geq \delta$ . Defina:  $a_n := (\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n)^2 + (\cos \beta_1 + \dots + \cos \beta_n)^2$ , onde os  $\alpha_i$  e os  $\beta_j$  são reais. *Sugestão:* Faça a comparação das médias geométricas e aritméticas de uma certa maneira ou utilize a desigualdade de Cauchy, mostrando que  $(\sin \alpha_1 + \dots + \sin \alpha_n)^2 + (\cos \beta_1 + \dots + \cos \beta_n)^2 \leq n$ .
- $a_n = \frac{1^k}{n^{k+1} + 1} + \dots + \frac{n^k}{n^{k+1} + n}$ ,  $k > 0$ . *Sugestão:* Compare com a soma de Riemann da função  $f(x) = x^k, x \in [0, 1]$ , observando que  $\frac{1^k + \dots + n^k}{n^{k+1} + n} \leq a_n \leq \frac{1^k + \dots + n^k}{n^{k+1} + 1}$ .
- $a_n = \frac{b_n}{n^n}$ , onde  $b_n$  satisfaz a equação de diferenças

$$b_{n+1} - (n+1)b_n = 2^n(n+1)! \quad b_0 = 1$$

mostrando que  $b_n = n! 2^n$ .

d)  $a_n$  satisfaz a equação de diferenças de primeira ordem

$$a_{n+1}(a + ba_n) = ca_n, \quad a, b, c > 0, \quad a_0 > 0$$

mostrando que  $x_n = 1/a_n$  satisfaz uma equação de diferenças linear de primeira ordem.

10) Neste exercício você precisará fazer uso de certas *desigualdades clássicas*. Sejam  $\{\alpha_n\}$  e  $\{\beta_n\}$  duas seqüência de números reais positivos satisfazendo certas condições. Considere a série de potências

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

Discuta o raio de convergência da série sabendo que  $a_n, \alpha_n, \beta_n$  satisfazem às seguintes condições abaixo.

a)  $a_n := (\alpha_n + \beta_n)^{\alpha_n + \beta_n}$ , onde

$$\alpha_n^{\alpha_n} \beta_n^{\beta_n} = O(2^n) \quad (n \rightarrow \infty)$$

Mostre primeiramente que (por exemplo com a ajuda da desigualdade de Young)

$$a^a b^b \geq \frac{(a+b)^{a+b}}{2}, \quad a \geq b > 0$$

b)  $a_{n+1} := \alpha_{n+1} \beta_{n+1}^n$ , onde

$$\frac{\alpha_{n+1} + n\beta_{n+1}}{n+1} = O(1) \quad (n \rightarrow \infty)$$

Aqui você precisa comparar as quantidades  $\frac{\alpha_{n+1} + n\beta_{n+1}}{n+1}$  e  $\alpha_{n+1} \beta_{n+1}^n$  via a desigualdade da média,

11) Considere  $n$  um inteiro positivo. Defina  $N(n)$  o número de algarismos de  $n$ . Defina também  $S(n)$  a soma dos algarismos de  $n$ . Escreva uma relação de desigualdade entre  $\log_{10} n$  (logaritmo na base 10) e  $S(n)$ . Levando em conta isso, determine o raio de convergência da série

$$\sum_1^{\infty} S(n) z^n$$

- 12) Seja  $\{a_n, n = 2, 3, \dots\}$  uma seqüência de números complexos não nulos satisfazendo

$$(*) \quad \sum_2^{\infty} n|a_n| < 1$$

- a) Discuta sobre o disco de convergência da série

$$(**) \quad z + \sum_2^{\infty} ((n-1))^n (\ln 2)a_2 (\ln 3)a_3 \cdots (\ln n)a_n z^n$$

Você precisa usar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, levando em conta (\*\*).

- b) Agora suponha  $\operatorname{Re} a_n > 0, n = 2, 3, \dots$

- i) Discuta, *com todos os detalhes*, o raio de convergência da série

$$\sum_2^{\infty} \frac{a_n^{2^n}}{1 + n a_n} z^{n 2^n}$$

Aqui você terá que observar que a série apresenta “gaps” e tome cuidado com potenciação para aplicar o critério de Cauchy (raiz).

- ii) Dê exemplos de tais  $a_n$  satisfazendo (\*) e assim exemplos de séries satisfazendo o item i).

- 13) Seja  $\{a_n\}$  uma seqüência dada por  $a_n = 1$ , se  $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$  e  $a_n = 0, n \neq 2^k$ . Seja  $m > 0$ . Discuta com detalhes o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{-\sqrt{n}} e^{mn} z^n$$

Novamente você terá que observar que a série apresenta “gaps” e tome cuidado com potenciação para aplicar o critério de Cauchy (raiz).

- 14) Seja  $a = \alpha + i\tau, \alpha, \tau \in \mathbb{R}, \tau > 0$ . Considere a série

$$f(z) = \sum_n \log n a^n z^{n^2}$$

Determine o raio de convergência e o disco de convergência.

Calcule  $f^{(n)}(0)$ .