INTROD. VCOMPLEXAS- AGOSTO DE 2004–ListaD

Professor: Ricardo Sá Earp

PARTE A: SÉRIES DE FUNÇÕES COMPLEXAS E CONVERGÊNCIA UNIFORME

1) Seja $f_n(z) = 1/(z+n),\ n \in \mathbb{N}$. Mostre que

   a) $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(z) = 0,\ z \in \mathbb{C}$.

   b) Seja $A_\alpha = \{z; \Re z \geqslant \alpha, z \notin -\mathbb{N}\}$. Mostre que $f_n \longrightarrow 0 (n \to \infty)$ uniformemente em A_a, onde α é um número real qualquer. Mais precisamente, mostre que
$$\sup_{z\in A_\alpha} |f_n(z)| \leqslant \frac{1}{\alpha+n} \qquad \text{se } n > -\alpha$$

   c) Mostre que se $A = \{z; \operatorname{Im} z \geqslant 1\}$, então $f_n \not\to 0$, uniformemente em A, mostrando que $\sup_{z\in a} |f_n(z)| \geqslant 1,\ n \in \mathbb{N}$.

2) Seja $a_n(z) = 1/(z+n^2),\ n \in \mathbb{N}$. Seja $S = \{-n^2;\ n \in \mathbb{N}\}$. Considere
$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} a_n(z), \qquad z \notin S.$$

   a) Mostre que $\sum\limits_{n\geqslant 0} |a_n(z)| < \infty, \quad z \notin S$.

   b) Mostre que a série é uniformemente convergente em A_α (cf Ex 1 b)).

   c) Mostre que se $\alpha \leqslant 0$, a série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z)$ não é normalmente convergente em A_α (Ex 1 c)), mostrando que $\|a_n\|_{A_\alpha} = \infty$, para $n^2 \leqslant -\alpha$.

   d) Mostre que a série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z)$ não é uniformemente convergente em A (Ex 1 c)).

   e) Mostre que a série $\sum\limits_{n\geqslant 0} a_n(z)$ é uniformemente convergente em todo compacto $K \subset \mathbb{C} \setminus S$; conclua que f é contínua em $\mathbb{C} \setminus S$.

   f) Discuta as relações entre séries normalmente convergentes, absolutamente convergentes e uniformente convergentes. Discuta como isto foi aplicado no teorema de séries de potências que relacionou o raio de convergência da série e da série de potências obtida da original derivando-se termo a termo.

g) Considere $\mathrm{e}^z := \Sigma \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$. Mostre que

$$\left| \mathrm{e}^z - \sum_0^{n-1} \frac{z^k}{k!} \right| \leqslant \frac{2}{n!}|z|^n \qquad \text{para } n \geqslant 1 \qquad |z| \leqslant 1 + \frac{1}{2}(n-1)$$

O quê você pode concluir da estimativa acima com respeito à convergência da soma parcial da série dada por e^z ? Você tem outra maneira de ver isto ?

3) Seja X um conjunto e sejam f_n, $n = 1, 2, \ldots,$ f funções complexas definidas em X. Mostre que $f_n \xrightarrow{u} f$ $(n \to \infty)$ $\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$, para toda seqüência $\{x_n\}_{n\geqslant 1}$ em X.

4) Seja $f_n(x) = nx(1-x)^n$ $(o \leqslant x \leqslant 1,\ n = 1, 2, \ldots,)$. Verifique que as funções contínuas f_n convergem (quando $n \to \infty$) pontualmente à uma função contínua $f \equiv 0$ em $[0,1]$, sem que a convergência seja uniforme, mostrando que

$$\|f_n\|_{[0,1]} \longrightarrow \frac{1}{e} \neq 0 \ (n \to \infty).$$

5) Sejam $a_n : X \to \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, onde X é um conjunto e $\{b_n\}$ uma seqüência monótona tendendo à zero. Seja $A_n(x) := a_0 + \cdots + a_n(x)$, $x \in X$. Suponha que $\sup_{n\geqslant 0} \|A_n\| < \infty$.

   a) Seguindo o raciocínio do critério de Dirichlet (veja Lista 1), mostre que $\sum_n a_n(x) b_n$ converge uniformemente em X. Conclua que a série $\sum_{\nu\geqslant 1} b_\nu \cos \nu x$ (cf Lista 1) converge uniformemente em $x \in [\alpha, \beta]$, onde $0 < \alpha < \beta < \pi$.

6) Determine um domínio compacto, em cada item dos exercs. 3), 4), 5) da *listaC*, de maneira as série dada no item converge *normalmente* no domínio determinado.

7) Defina para $s \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}^*$

$$n^s := \mathrm{e}^{s \ln n}$$

Considere uma série da forma

$$(*) \qquad \sum_{n\geqslant 1} \frac{a_n}{n^s}, \qquad a_n \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{C}$$

chamada usualmente de *série de Dirichlet*

i) Será que se $(*)$ converge absolutamente para $s = a + ib$, então a série converge normalmente para $\Re s \geqslant a$, e vale que $(*)$ define uma função contínua neste semi-plano fechado ?

Sugestão: Compare a série de funções com uma série de números reais no semi-plano indicado e aplique o teste M de Weierstrass.

Para responder ao próximo exercício você vai precisar utilizar o chamado *teorema de convergência de Weierstrass* que diz o seguinte: *Seja U um aberto (não vazio) de $\mathbb{C}$, e seja $\{f_n(z),\ z \in U\}$ uma seqüência de funções holomorfas definidas em U. Se $\{f_n\}$ converge uniformemente localmente em U à uma função $f : U \to \mathbb{C}$, então $f(z)$ é holomorfa e*

$$\lim_{n\to\infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z), \qquad z \in U$$

sendo a convergência uniforme em compactos de U. No caso de séries de funções holomorfas convergindo uniformemente, é válido derivação termo a termo. Para demonstrar este resultado você terá que estudar a teoria da integração complexa, incluindo a fórmula de Cauchy e variantes. Assumindo isto responda ao seguinte:

ii) Será que se $(*)$ converge absolutamente para $s = a+ib$, então a série define uma função holomorfa no semi-plano $\{\Re s > a\}$ satisfazendo

$$f^{(k)}(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n n^{-s} \left(-\ln n\right)^k, \qquad k \in \mathbb{N}^*$$

neste semi-plano ?

iii) Considere agora o caso de que $a_n = 1, \quad \forall n$. Neste caso a série é a famosa *função zeta* de Riemann dada por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Assumindo o teorema de Weierstrass enunciado acima responda ao seguinte:

Será que $\zeta(s)$ é holomorfa para $\Re s > 1$?

Finalmente, será que a função $\zeta(s)$ possui alguma simetria ?

Note que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} = \frac{\pi^2}{6}$$

8) Considere $f(z) = z + \sum_2^{\infty} a_n z^n$. Assuma que

$$\sum_2^{\infty} n|a_n| \leqslant 1$$

a) Mostre que f é contínua em $\overline{\triangle} := \{|z| \leqslant 1\}$.

Com base no que foi dito acima sobre o teorema de convergência de Weierstrass,

b) Mostre que f é holomorfa em $\triangle$.

9) Considere a seqüência $a_n(z) := \{z^n/(1+z^n)\}, z \in \mathbb{C}$.

(a) Deduza que para valores $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z| < 1$, tem-se $a_n(z) \stackrel{\mathrm{p}}{\to} 0$ $(n \to \infty)$, i.e $a_n(z)$ converge pontualmente a zero, quando n vai para infinito.

(b) Encontre uma seqüência $\{\alpha_n\}, |\alpha_n| < 1$, satisfazendo $|\alpha_n| \to 1$ com $a_n(\alpha_n) \not\to 0$ $(n \to \infty)$. Deduza daí a não convergência uniforme de $a_n(z)$ no disco unitário $|z| < 1$.

(c) Mostre que a série $\sum_n z^n/(1+z^n)$ converge absolutamente em $\{z; |z| < 1\}$. Mostre que a série $\sum_n z^n/(1+z^n)$ converge uniformemente em $\{z; |z| \leqslant r < 1\}$.

Nota cultural matemática:

i) A série de Taylor de $\dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$ em torno da origem está definida por

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = \sum_0^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k, \quad B_k \in \mathbb{C}$$

Valem as seguintes afirmações

i) $B_1 = 0$ e $B_{2k+1} = 0$ para $k \geqslant 1$.

ii)

$$\binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \binom{n}{2} B_2 + \cdots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0$$

Os números acima são chamados de *números de Bernoulli*. Determine-os recursivamente, calculando

$$B_0 = 1,\ B_2 = 1/6,\ B_4 = -1/30,\ B_6 = 1/42$$
$$B_8 = -1/30,\ B_{10} = 5/66,\ B_{14} = 7/6$$

Curiosidade: $B_{26} = 8553103/6\ldots$

Para entender o desenvolvimento acima, considere $1 = \dfrac{e^z - 1}{z} \cdot \dfrac{z}{e^z - 1}$, assim como o desenvolvimento de Taylor da função exponencial, e o resultado sobre produtos e divisões de séries de potências (veja listaC).

ii)) Existe uma relação entre os números de Bernoulle e a função zeta de Riemann
$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)!\,\zeta(2n)}{2^{2n-1}\pi^{2n}}$$

iii) A função zeta de Riemann admite um prolongamento analítico à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, sendo $z = 1$ um pólo simples de resíduo 1.

iv) A *hipótese de Riemann* é um dos *problemas do milênio* que diz o seguinte: "Os zeros de $\zeta(z)$ na faixa crítica $0 \leqslant \Re z \leqslant 1$ estão todos na reta $\Re z = \dfrac{1}{2}$ (já se sabe que existem uma infinidade de tais zeros)"