INTROD. VCOMPLEXAS- AGOSTO DE 2004–ListaE

Professor: Ricardo Sá Earp

PARTE A: SÉRIES DE TAYLOR E CONTINUAÇÃO ANALÍTICA

Seja $f(z) = 1/z(z-1), \qquad z \in \mathbb{C} \setminus \{0,1\}$. Obtenha o desenvolvimento de $f(z)$ em $z = 2$, usando a seguinte técnica

$$
\begin{aligned}
f(z) &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2}\Big(1 + \frac{z-2}{2}\Big)^{-1} + (1 + (z-2)) \\
&= -\frac{1}{2}\Big\{1 - \frac{z-2}{2} + \left(\frac{z-2}{2}\right)^2 - \cdots\Big\} + \big\{1 - (z-2) + (z-2)^2 - \cdots\big\} \\
&= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - 1\right)(z-2) + \cdots + \Big(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} + (-1)^n\Big)(z-2)^n + \cdots \\
&= \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right)(z-2)^n
\end{aligned}
$$

.

Qual é o raio de convergência da série acima ? Discuta isto!

1) Considere

$$f(z) = z^2/(z-2), \quad z \neq 2$$

a) Mostre que $f(z)$ é holomorfa. Encontre os termos de ordem $\leqslant 3$ do desenvolvimento em série de potências da função $f(z)$ em $z = 1$.

Resposta : $-1 - (1+2)(z-1) - (1+2+1)(z-1)^2 - (1+2+1)(z-1)^3$.

b) Agora, aplicando *a técnica acima* desenvolvida em sala de aula, obtenha a série de Taylor de $f(z)$ em $z = 1$. Daí calcule $f^{(n)}(1), \quad n \geqslant 0$

2) Considere a função

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 3z + 2}, \quad z \neq 1, 2$$

a) Obtenha o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ em $z = 0$, determinando o termo geral da série. Calcule o raio de convergência da série de Taylor.

b) Obtenha o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ em $z = 3/2$, determinando o termo geral da série. Calcule o raio de convergência da série de Taylor.

3) Idem item 2) com respeito a função $f(z) = z/((z+1)^2(z-3)$.

4) Idem item 2) com respeito a função $f(z) = z/(z^2+1)(z-1)^2$.

5) Seja $f(z) := \dfrac{e^z}{(1-z)}$, para $|z| < 1$. Mostre que $f(z)$ é analítica. Seja $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ o desenvolvimento de Taylor da função dada na origem. Use a fórmula de multiplicação de séries para calcular a_n (e deduzindo analiticidade) mostrando que

$$a_n = \left(1 + \cdots + \frac{1}{n!}\right), \qquad n \geqslant 1,\ a_0 = 1$$

6) Mostre que $f(z) = \dfrac{1}{z^2+1} + \dfrac{i/2}{(z-i)}(z \neq i)$ e $f(i) = 1/4$, é holomorfa para $|z - i| < 2$, deduzindo que

$$f(z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^n (z-i)^n, \quad |z-i| < 2$$

7) Considere a função

$$(*) \qquad f(z) = \frac{1}{1+z+z^2}$$

Seja $\sum a_n z^n$ o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ na origem.

a) Mostre que os coeficientes a_n satisfazem uma relação de recorrência que dá a seguinte equação de diferenças linear de primeira ordem:

$$a_{n+1} + a_n + a_{n-1} = 0, \quad a_0 = 1, a_1 = -1$$

b) Calcule a_n, mostrando que

$$a_n = \frac{i}{\sqrt{3}}\, e^{\pi i(2n-1)/3} - \frac{i}{\sqrt{3}}\, e^{-\pi i(2n-1)/3}$$

c) Calcule $f^{(n)}(0)$, a derivada de ordem n de $f(z)$ na origem.

d) Determine o desenvolvimento de Taylor de f na origem, verificando que a função racional $(*)$ acima dá a *forma fechada* de tal desenvolvimento, verificando o seu resultado.

e) Calcule o raio de convergência da série de Taylor.

f) Mostre que $f(z)$ satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem (envolvendo $f(z), f'(z), f''(z)$) não linear.

8) Considere

$$J(z) = \sum_{0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

Qual é o raio de convergência da série ? Indique um domínio compacto no qual a série converge normalmente.

Mostre que $J(z)$ satisfaz a equação diferencial (Veja num livro outros exemplos de equações lineares complexas, regulares e singulares-regulares, de segunda ordem)

$$z^2 J''(z) + zJ'(z) + z^2 J(z) = 0$$

9) Sejam a, b, k constantes reais, com $k \neq 0$. Define-se uma seqüência $\{a_n\}$ pela relação de recorrência (equação de diferenças linear de segunda ordem):

$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad ka_{n+2} - (1 + k^2)a_{n+1} + ka_n = 0$$

Considere a série

$$f(z) = \sum_{0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

a) Mostre que $f(z)$ satisfaz a uma equação diferencial linear de segunda ordem. Encontre uma *expressão explícita para* $f(z)$ e em seguida encontre uma expressão para os a_n. Analise os casos $k = \pm 1$, separadamente.

10) Considere $\{a_n\}$ uma seqüência satisfazendo a equação de diferenças de segunda ordem

$$a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}, \qquad n \geqslant 1$$

com condições iniciais $a_1 = 0, a_2 = 1$.

Considere a série de potências

$$f(z) = \sum_{1}^{\infty} a_n z^n$$

a) Mostre que a série define uma função holomorfa $f(z)$ numa vizinhança da origem.

b) Determine $f(z)$ numa "closed form", i.e na forma de uma fração racional, obtendo $f(z) = \dfrac{2z^2}{2 - z - z^2}$.

c) Calcule $f^{(n)}(0)$, $\quad n \geqslant 0$, e calcule o raio de convergência da série, mostrando que $a_n = \dfrac{2}{3} + \dfrac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \dfrac{2}{3}$

11) Considere a equação de diferenças

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \qquad n \geqslant 2$$

satisfazendo as condições iniciais $a_0 = a_1 = 1$. Esta é uma equação linear de diferenças de segunda ordem com coeficientes constantes. Você deveria saber resolver isto com os métodos do Cálculo IV! Vamos propor outra solução via a teoria das funções analíticas. À propósito: Tal seqüência é chamada de *seqüência de Fibonacci*.

a) Mostre que $A(z) := \sum a_n z^n$ tem raio de convergência $R > 0$.

b) Mostre que $A(z) = \dfrac{1}{1 - z - z^2}$, concluindo que $A(z)$ tem raio de convergência $R = \dfrac{\sqrt{5} - 1}{2}$.

c) Mostre que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\Big(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \Big)^{n+1} - \Big(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \Big)^{n+1} \right)$$

O número $\frac{1+\sqrt{5}}{2} =\approx 1,618\ldots$ é o número áureo dos gregos da antiguidade.

12) Verifique (ou obtenha) os desenvolvimentos de Taylor das funções abaixo , justificando a convergência (raio e disco de convergência) em cada caso. Discuta convergência normal.

a) $\dfrac{1}{(1-z)^2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \qquad |z| < 1.$

b) $\dfrac{1}{(1-z)^{m+1}} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)\cdots(n+m)}{m!} z^n, \qquad |z| < 1,\ m \in \mathbb{N}.$

c) $\sin(\alpha z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \qquad z \in \mathbb{C}.$

d) $\cos z^{1/2} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}, \qquad z \in \mathbb{C}.$

e) $\dfrac{1}{z^2+1} = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n+1)\frac{\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}}(z-1)^n, \qquad |z-1| < \sqrt{2}.$

f) $\dfrac{1}{1-2z\cos\theta+z^2} = \displaystyle\sum_{0}^{\infty} \frac{e^{(n+1)i\theta} - e^{-(n+1)i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} z^n, \qquad |z| < 1$

g) Exiba as séries abaixo escrevendo uma expressão numa "forma fechada" ($s \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n \cos ns$$
$$\sum_{n\geqslant 0} z^n \sin ns$$

13) Considere a função $f(z) = \dfrac{e^{-z}}{1+z}$.

a) Encontre o desenvolvimento de Taylor de f na origem, determinando os coeficientes da série.

b) Calcule o raio de convergência por dois métodos distintos.

c) Calcule $f^{(n)}(0)$.

Doravante, vamos ter como base o seguinte resultado fundamental enunciado em sala de aula:

analiticidade é equivalente a holomorfia

14) Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro esboce uma dedução sucinta. Caso falso esboce um contra-exemplo.

a) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa definida num domínio Ω. Seja $c_n, \quad n = 0, 1, 2\ldots,$ uma seqüência de pontos de Ω com $c_n \to c \quad (n \to \infty)$. Assuma que $f(c_n) = 0$. Segue então que $f \equiv 0$ em Ω.

b) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ uma função anti-holomorfa definida num domínio Ω. Seja $c_n, \quad n = 0, 1, 2\ldots,$ uma seqüência de pontos de Ω que possui um ponto de acumulação pertencendo ao domínio Ω. Assuma que $f(c_n) = 0$. Segue então que $f \equiv 0$ em Ω.

15) Verificar as afirmações abaixo com respeito a existência de uma função analítica f definida numa vizinhança (aberta) de $z = 0$.

a) $f\left(\dfrac{1}{n}\right) = \cos n\pi, \; n = 1, 2, \ldots,$ é impossível.

b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, é impossível.

c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, implica que $f(z) = z/(z+1)$.

d) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2\sin(\pi/n)}{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, implica que $f(z) = \sin(\pi z)/z(z+1)$, com $f(0) = \pi$.

e) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right)$, $n = 1, 2, \ldots$, implica que f é constante.

f)

$$an^{-5/2} \leqslant \left|f\left(\frac{1}{n}\right)\right| \leqslant bn^{-5/2}$$

onde a, b são constantes $\geqslant 0$,implica que f é identicamente nula.

g) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, implica que $f(z) = z/(z+2)$.

h) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+\cos(n\pi)}$ é impossível.

16) Seja Ω um domínio e sejam f e g duas funções holomorfas definidas em Ω.

a)

i) Assuma que $f(z)g(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$. O que você pode dizer de f e de g ?

ii) Assuma que $f(z)\overline{g(z)} = 0$ para todo $z \in \Omega$. O quê você pode dizer de f e de g ?

b) Suponha que $f^2(z) = z$ e que $g^2(z) = z$ para todo $z \in \Omega$. O que você pode dizer de f e de g ?

17) Seja $u = u(x+iy)$ uma função harmônica definida num domínio Ω. Assumindo que localmente uma função harmônica é parte real de uma função holomorfa, o que você pode dizer do conjunto $\mathcal{C} = \{u_x = u_y = 0\}$?

18) Verifique se existem funções holomorfas definidas num domínio contendo a origem que satisfaçam a condição abaixo.

a) $f(\frac{1}{n^2}) = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$, onde $n \in \mathbb{N}^*$.

* * *

O seguinte problema para equações diferenciais ordinárias holomorfas de primeira ordem é fundamental

Considere $f(z,w)$ uma função holomorfa nas variáveis z, w, para z numa vizinhança de a e w numa vizinhança de b. Considere o seguinte problema com condição inicial

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z} = f(z,w) \\ w(a) = b \end{cases} \tag{$*$}$$

O seguinte resultado é fundamental: O problema acima $(*)$ possui uma e apenas uma solução.

O mesmo resultado vale para equações diferenciais ordinárias holomorfas de ordem superior:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}^n w}{\mathrm{d}z^n} = f(z,w,w',\dots,w^{(n-1)}) \\ w(a) = b \\ w'(a) = b_1 \\ w''(a) = b_2 \\ \dots \\ w^{(n-1)}(a) = b_{n-1} \end{cases} \tag{$**$}$$

Quando a equação é linear um pouco mais pode ser dito: Considere

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \qquad (**)$$

onde $p(z)$ e $q(z)$ são holomorfas para $|z-a| < R, \quad R > 0$. Segue então que a solução geral de $(**)$ é combinação linear de duas soluções linearmente independentes holomorfas para $|z-a| < R$.

19) Os próximos exercícios dizem respeito ao que foi dicutido acima:

a) Considere a equação diferencial abaixo

$$w'(z) + 2zw(z) = z^2 \tag{$*$}$$

i) Mostre que toda solução de $(*)$ é inteira e que sempre existe tal solução.

ii) Seja $w(z) = \sum a_n z^n$, uma solução de $(*)$. Mostre que os coeficientes a_n satisfazem uma *equação de diferenças linear de segunda ordem*, usualmente chamada de *relação de recorrência*. Resolva esta equação calculando os coeficientes. Determine a solução geral da equação.

b) Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} (z^2-2z-3)\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+3(z-1)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+w=0 \\ w(1)=4 \\ w'(1)=1 \end{cases} \qquad (*)$$

i) Dê uma argumento, sem fazer conta, que $(*)$ possui uma solução que é dada por uma série de potências $f(z)=\sum a_n(z-1)^n$, de raio de convergência R igual a 2.

ii) Encontre a equação de diferenças satisfeita pelos coeficientes a_n, referidos no item i).

iii) Encontre uma fórmula para os coeficientes a_n em função de n.

iv) Fazendo obrigatoriamente dois cálculos distintos, calcule de duas maneiras distintas explicitamente o raio de convergência da série.

v) Calcule $f^{(2004)}(1)$.

vi) Encontre a solução da equação diferencial

$$\begin{cases} (z^2-2z-3)\dfrac{\mathrm{d}^2 w}{\mathrm{d}z^2}+3(z-1)\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}z}+w=1+z+z^2 \\ w(1)=4 \\ w'(1)=1 \end{cases}$$

20) Considere a equação diferencial complexa de segunda ordem dada por (veja listaB (5)):

$$(*) \qquad E_{z\overline{z}}=\frac{\overline{E}}{1+E\overline{E}}\,E_zE_{\overline{z}}$$

Dizemos que uma função $E:U\to\mathbb{C}$ de classe C^2 definida num domínio $U\subset\mathbb{C}$ é uma *solução trivial* da equação $(*)$, se E é holomorfa ou anti-holomorfa. Sejam $f(z)$ e $g(z)$ funções holomorfas em U.

a) Assuma que $E(z) = f(z)\overline{g(z)}$ seja uma solução de $(*)$. Mostre que E é uma solução trivial de $(*)$.

b) Assuma que $E(z) = f(z) + \overline{g(z)}$ seja uma solução de $(*)$. Mostre que E é uma solução trivial de $(*)$.

Sugestão: Faça primeiramente o exercício 16) item a).

21) Seja $f(z)$ uma função analítica definida numa vizinhança da origem. Mostre que se $f(z)$ satisfaz

$$f(2z) = 2f^{'}(z) \cdot f(z)$$

então $f(z)$ é uma função inteira, i.e definida em todo plano complexo $\mathbb{C}$. Dê exemplos de funções elementares que satisfazem a igualdade acima.

No próximo exercício você vai ter que assumir o fato de que uma ***aplicação analítica é aberta***.

22) Considere $\varphi(z) = u(z) + iv(z)$ uma função complexa de classe C^1 definida em um domínio Ω. Relembre do fato deduzido no exercício 1) da listaB que $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z} = \overline{\left(\dfrac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{z}}\right)}$

a) Suponha agora que φ seja analítica em Ω. Suponha ainda que existe uma vizinhança aberta $V \subset \Omega$, tal que $\overline{\varphi(z)} \in \Omega,\ \forall z \in V$. Mostre que $w = \overline{\varphi\left(\bar{\varphi}(z)\right)}$ é uma função holomorfa num aberto de Ω. (*Sugestão*: use o fato que uma aplicação analítica é aberta e a observação anterior). Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{z \in V,\ \bar{z} = \varphi(z)\}$. Suponha finalmente que $a \in \mathcal{A}$ seja um ponto de acumulação de $\mathcal{A}$. Mostre que $z \equiv \overline{\varphi\left(\overline{\varphi}(z)\right)}$ em V. Conclua que $|\varphi^{'}(a)| = 1$.

23) Seja $f(z)$ uma função holomorfa no disco unitário aberto centrado na origem. Suponha que para $-1 < x < 1\,(x \in \mathbb{R})$, $u = f(x)$ satisfaça a equação diferencial

$$u'(x) = \frac{2u(x)}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

Assuma que $f(0) = 0$. Encontre $f(z)$. Calcule $f^{(n)}(0)$.

*   *   *

Nota cultural matemática:

Seja f uma função holomorfa num disco Ω de $\mathbb{C}$. Diz-se que Ω é o *domínio de holomorfia* de f se f não possui nenhum prolongamento à um domínio $\widetilde{\Omega}$ contendo Ω com $\widetilde{\Omega} \neq \Omega$. Pode-se mostrar que para todo domínio Ω de $\mathbb{C}$, existe uma função holomorfa f definida em Ω para a qual Ω é seu domínio de holomorfia. Neste caso o bordo $\partial\Omega$ de Ω é chamado de *fronteira natural de holomorfia* de f e os pontos de $\partial\Omega$ são chamados de *pontos singulares* de f, ou seja, f não admite prolongamento analítico a nenhum aberto $\mathcal{U}$ contendo um ponto ζ qualquer de $\partial\Omega$.

- Note que todos os pontos do bordo do disco de convergência da séria abaixo são pontos singulares, i.e o círculo $S^1 = \partial\Omega$ é a fronteira natural de f e o disco de convergência é o domínio de holomorfia de f:

$$f(z) = z + z^2 + z^4 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

OBS: : para ver isto note que o *limite radial* quando o raio tende à 1 é ∞. Mais precisamente, note primeiramente que

$$\lim_{t\to 1} \left| f(re^{it}) \right| = \infty$$

quando cada t é da forma $2\pi k/2^\ell,\ k \in \mathbb{Z},\ \ell \in \mathbb{N}$. Em seguida note que isto é suficiente para mostrar que um ponto ζ qualquer de $\partial\Omega$ é um ponto singular de f.

•• Note que sempre tem um ponto singular no bordo do disco de convergência de uma função analítica.

••• Seja R, $0 < R < \infty$ o raio de convergência de série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

O teorema de Abel diz o seguinte: *Se ζ é um ponto da fronteira do disco de convergência $|z-a| < R$, se a série converge para $z = \zeta$, então o limite radial existe em $z = \zeta$, isto é* (mas, o *limite, em geral não existe* !)

$$\lim_{\substack{t\to 1 \\ 0\leqslant t<1}} f\left(a + t(\zeta - a)\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\zeta - a)^n. \qquad (*)$$

Usando o teorema de Abel note que

$$\log 2 = \lim_{\substack{t\to 1\\ 0\leqslant 1}} \log(1+t) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Conclua que, de fato, tem-se que

$$\log 2 = \lim_{z\to 1} \log(1+z) = \sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Seja

$$f(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots = \sum_{n\geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |z| < 1$$

verificar que o raio de convergência da série é 1 e que $f^{'}(z) = \dfrac{1}{(z^2+1)}$, $|z| < 1$. Deduzir que para t real em $(-1,1)$, $f(t) = \arctan t$. Pelo teorema de Abel conclua que (série de Gregory e Leibniz)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n\geqslant 0} \frac{(-1)}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots$$