INTROD. VCOMPLEXAS- SETEMBRO de 2004–listaH

Professor: Ricardo Sá Earp

PARTE A: INTEGRAÇÃO COMPLEXA E FÓRMULA DE CAUCHY

1) Calcular

$$\int_\gamma \frac{e^z}{z(1-z)^3} d\,z$$

quando γ é um círculo orientado positivamente (e simplesmente) dado por

   a) $|z| = 1/2$. *Resp*:$2\pi i$

   b) $|z-1| = 1/2$. *Resp*:$-i\pi\mathrm{e}$

   c) $|z| = 2$. Dê uma fórmula que relacione a integral do item c) com as integrais dos itens a) e b). Justifique sua resposta tanto geometricamente como analiticamente. *Resp*:$i\pi(2-\mathrm{e})$

   d) $2\,(\cos\theta)^n + i2\,(\operatorname{sen}\theta)^n\,, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad n \in \mathbb{N}$.

2) Suponha que $f(z)$ seja analítica num aberto contendo a curva fechada γ. Mostre que

$$\int_\gamma \overline{f(z)} f^{'}(z)\,d\,z$$

é um número imaginário puro.

3) Suponha que $f(z)$ seja analítica e que satisfaça $|f(z)-1| < 1$ em um domínio Ω. Mostre que

$$\int_\gamma \frac{f^{'}(z)}{f(z)}\,d\,z = 0,$$

para toda curva fechada, seccionalmente C^1, em Ω.

4) Se $P(z)$ é um polinômio e C denota o círculo $|z-a| = R$, calcule $\int_C P(z)\,d\,\overline{z}$. *Resp*:$-2i\pi R^2 P^{'}(a)$.

5) Seja γ uma curva C^1 por partes e seja $\bar{\gamma}$ sua imagem obtida pela aplicação $z \to \bar{z}$. Suponha que $f(z)$ seja uma função contínua sobre γ.

   a) Mostre que $z \to \overline{f(\bar{z})}$ é contínua sobre $\bar{\gamma}$ e tem-se que

$$\overline{\int_\gamma f(z)\,d\,z} = \int_{\bar{\gamma}} \overline{f(\bar{z})}\,d\,z = \int_\gamma \overline{f(z)}\,d\,\bar{z}$$

Se γ é uma curva simples fechada contida no disco aberto unitário $\mathcal{D}$ e $f(z)$ é uma função analítica em $\mathcal{D}$, o que voce pode dizer da integral do meio ? Sempre se anula ? A função$z \to \overline{f(\bar{z})}$ é holomorfa em $\bar{\mathcal{D}}$? Compare com o exercício 1)d) Parte B, Lista 1!

b) Em particular, se γ é o círculo unitário positivamente orientado, mostre que

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z)\, d\, z} = -\int_{|z|=1} \overline{f(z)}\, \frac{d\, z}{z^2}$$

Cuidado com a orientação ? Nas duas fórmulas acima o círculo γ está positivamente orientado!!

6) Considere a série dada por

$$f(z) := \sum_{0}^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} := \sum f_n(z)$$

a) Mostre que $f(z)$ determina uma função holomorfa definida no disco unitário $B_1(0)$ mostrando que a série converge normalmente em compactos de $B_1(0)$.

b) Mostre que $f(z) = \dfrac{z}{1-z}$. *Sugestão*: Considere $g(z) := f(z) - \dfrac{z}{1-z}$, mostrando que $g(z^{2^n}) = g(z)$.

c) Determine a classe de curvas fechadas γ tais que o valor da integral $\int_\gamma f_n(z)\, \mathrm{d}z$ é não nulo.

7) Seja f uma função contínua num domínio Ω. Seja γ uma curva regular (por partes) parametrizada pelo comprimento de arco s, cujo traço esteja contido em Ω. Seja $\boldsymbol{T}$ o vetor velocidade de γ e seja $\boldsymbol{n}$ um dado campo de vetores normal unitário ao longo de γ. Dizemos que o *fluxo* ou campo dado por $z \mapsto f(z)$ (considerando $f(z)$ como um campo de vetores definido em Ω) é nulo (f é então chamado de *fluxless*) se (o símbolo $\cdot$ denota o produto escalar no plano)

$$\int_\gamma f \cdot \boldsymbol{n}\, \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$$

para toda curva simples (C^1 por partes) e fechada γ em Ω. Dizemos que o campo que $z \mapsto f(z)$ é conservativo (ou *irrotational*) se

$$\int_\gamma f\cdot \boldsymbol{T}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \boldsymbol{0}$$

para toda curva simples (C^1 por partes) e fechada γ em Ω.

a) Mostre que se um fluxo (ou campo) $z \mapsto f(z)$ em um domínio Ω é simultaneamente *fluxless* e *conservativo* então $f(z)$ é uma *função anti-holomorfa* em Ω.
Sugestão: Mostre que

$$\int_\gamma \overline{f(z)}\,\mathrm{d}z = \int_\gamma f\cdot \boldsymbol{T}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \boldsymbol{i}\int_\gamma \boldsymbol{f}\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}$$

b) Exiba um exemplo de função anti-holomorfa $f(z)$ definida num certo domínio Ω com o campo $z \mapsto f(z)$ não sendo simultaneamente *fluxless* e conservativo.

c) Defina o conceito de um campo ser *localmente fluxless* e o conceito de ser *localmente conservativo* e analise se a recíproca da proposição do item a) é verdadeira neste contexto.

8) Seja $f(z)$ uma função holomorfa em $|z| < R,\ R > 1$. Calcule de duas maneiras distintas as integrais

$$\int_{|z|=1} \left[2 \pm \left(z + \frac{1}{z}\right)\right] \frac{f(z)}{z} d\,z,$$

obtendo as seguintes igualdades

$$\begin{aligned}\frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\mathrm{e}^{i\theta})\cos^2\frac{\theta}{2}\,d\,\theta =& 2f(0) + f^{'}(0)\\ \frac{2}{\pi}\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\,\theta =& 2f(0) - f^{'}(0)\end{aligned}$$

9) Mostre que se $f(z)$ é holomorfa em um aberto que contenha o disco fechado $|z| \leqslant 1$ então vale

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{\bar{f}(z)}{z-a}\,d\,z = \begin{cases} \bar{f}(0) & \text{se } |a| < 1,\\ \bar{f}(0) - \bar{f}(1/\bar{a}) & \text{se } |a| > 1,\end{cases}$$

Sugestão: Use o exercício 5 b) e a fórmula de Cauchy.

10) Verifique que
$$\int_a^b \frac{d\,t}{z-it} = i\{\log(z-ib) - \log(z-ia)\}$$
onde $-\infty < a < b < \infty,\ \Re z > 0$. Conclua que
$$\int_a^b \frac{x\,d\,t}{x^2+(y-t)^2} = \arctan\left(\frac{y-a}{x}\right) - \arctan\left(\frac{y-b}{x}\right).$$

11) Calcular
  a) $\int_\gamma z\,d\,z$
  b) $\int_\gamma \bar{z} d\,z$
  c) $\int_\gamma \Re z\,d\,z$ onde γ é o caminho poligonal $0 \to (1+i) \to 2$.

12) Calcule a integral $\displaystyle\int_\gamma z^\alpha\,d\,z$, $\alpha \in \mathbb{C}$, nos seguintes casos:
  a) γ é o semi-círculo indo de 1 à -1 no semi-plano superior (ou $\operatorname{Im} z \geqslant 0$).
  b) γ é o semi-círculo indo de 1 à -1 no semi-plano inferior.
  c) γ é o círculo de centro 0 e raio 1. *Resp*: $\dfrac{2i}{\alpha+1}\sin(\alpha+1)\pi$, se $\alpha \neq -1$, $2\pi i$, se $\alpha = -1$. Para qual ramo de z^α vale esta resposta ? Para que valores de α temos o valor 0 ?

13) Mostre com todos os detalhes que
$$\left|\int_\gamma \frac{dz}{z^4+1}\right| \leqslant \frac{2\pi R}{R^4-1}$$
onde γ é o círculo $|z| = R,\ R > 1$.

14) Sabendo-se que $\displaystyle\int_\gamma \frac{dz}{z} = 2\pi i$, se γ é uma curva simples fechada positivamente orientada (e portanto de índice 1) verifique às seguintes fórmulas
  a) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2\cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$,
  onde o traço de γ é a elipse de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.
  b) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t \cos^2 t}{\cos^6 t + \sin^6 t} dt = \frac{2\pi}{3}$
  onde γ descreve o astróide dado por $t \mapsto \cos^3 t + i\sin^3 t,\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

15) Calcule
$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=1} \frac{dz}{(z-a)(z-1/a)}, \qquad a \neq 0,\ |a| \neq 1.$$

Use o resultado acima para calcular

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{dt}{1-2a\cos t+a^2}.$$

Nota cultural matemática:

16) Seja $f(z)$ uma função holomorfa definida num disco de raio $R,\ R>0$ centrado na origem. Suponha que $f(0)$ seja real. Mostre que para $0<r<R$ e $|z|<r$ tem-se *a fórmula integral de Schwarz*

$$f(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\Re f(r\,\mathrm{e}^{it})\frac{r\,\mathrm{e}^{it}+z}{r\,\mathrm{e}^{it}-z}\,\mathrm{d}t$$

a) Conclua que se $g=\Re f$ então vale a fórmula de Poisson

$$g(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}g(r\,\mathrm{e}^{it})\frac{r^2-|z|^2}{|r\,\mathrm{e}^{it}-z|^2}\,\mathrm{d}t$$

b) Escreva a função g do item a) como soma de uma função holomorfa e de uma função anti-holomorfa e re-obtenha que g é harmônica para $|z|<r$.
Sugestão : Escreva

$$(*)\qquad \frac{r^2-|z|^2}{|r\,\mathrm{e}^{it}-z|^2}=\frac{r\,\mathrm{e}^{it}}{r\,\mathrm{e}^{it}-z}+\frac{r\,\mathrm{e}^{-it}}{r\,\mathrm{e}^{-it}-\overline{z}}-1$$

c) (*Desigualdade de Harnack*) Seja $g(z)$ uma função harmônica não negativa definida num disco de raio $R,\ R>0$ centrado na origem. Mostre que para $0<r<R$ e $|z|<r$ tem-se que

$$\frac{r-|z|}{r+|z|}\cdot g(0)\leqslant g(z)\leqslant\frac{r+|z|}{r-|z|}\cdot g(0)$$

Sugestão: Estime o núcleo de Poisson $(*)$

d) (*Princípio de Harnack*) Aplique a desigualdade de Harnack para demonstrar o princípio de Harnack: Seja $u_1\leqslant u_2\leqslant\cdots$ uma seqüência crescente de funções harmônicas definidas num domínio Ω. Mostre que ou bem $u_n\to\infty$ $(n\to\infty)$ uniformemente em compactos, ou bem existe uma função harmônica u em Ω tal que $u_n\to u$ $(n\to\infty)$ uniformemente em compactos de Ω.

e) Uma função real contínua f num aberto $U \subset \mathbb{C}$ é chamada de sub-harmônica se satisfaz a *desigualdade da média*, i.e, se o fecho de um disco de raio R e centro p está inteiramente contido em U, então

$$f(p) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + \mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t$$

Nota: Uma função f de classe C^2 é sub-harmônica, sse $\triangle f \geqslant 0$.

i) Mostre que se $g : U \to \mathbb{C}$ é harmônica, então $f := |g|$ é sub-harmônica. Será $|g|$ harmônica ?

ii) Mostre que se $f : U \to \mathbb{R}$ é harmônica e se $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função não decrescente e convexa então $\varphi \circ f$ é sub-harmônica. *Sugestão* : Aplique a desigualdade de Jensen (veja num livro). Conclua que e^f é sub-harmônica e f^2 é sub-harmônica de f é não negativa em U.

iii) Mostre que se f é holomorfa em U e $p > 0$ então $|f|^p$ é sub-harmônica. Agora suponha que f seja harmônica. Mostre que $|f|^p$ é sub-harmônica quando $p \geqslant 1$.

17) Seja $f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$ uma série cujo raio de convergência é 1. Suponha que $|f(z)|(1 - |z|) \leqslant 1$ para todo z tal que $|z| < 1$. Mostre que para todo inteiro positivo tem-se que

$$|a_n| \leqslant \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) < e(n+1)$$

18) Mostre que $I(z) = \int\limits_{|\zeta - z_0| = R} \frac{1}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta$ satisfaz

$$\frac{\partial I}{\partial \overline{z}}(z) = \frac{\partial I}{\partial z}(z) = 0$$

concluindo que $I(z)$ não depende de z e que $I(z) = 2\pi i$.

19) Seja f uma função contínua no círculo $S^1 = \{|z| = 1\}$. Defina

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } |z| = 1, \\ \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\zeta & \text{se } |z| < 1 \end{cases}$$

Será F contínua em $\{|z| \leqslant 1\}$? *Sugestão*: procure um contra-exemplo simples e use a fórmula de Cauchy.

20) Neste exercício você vai trabalhar com ramos de funções multivalentes e integração complexa.

a) Considere a função *multivalente*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z(z-1)}}$$

i) Mostre que pode-se definir um *ramo* de $f(z)$ no domínio $\mathbb{C} \setminus [0,1]$.

ii) Usando um resultado dado em sala de aula, calcule a integral

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{\sqrt{z(z-1)}}\, \mathrm{d}z$$

b) Idem para $f(z) = \dfrac{1}{\sqrt{21z^2 - 10z + 1}}$, e o contorno $|z| = 1$.

Para atingir o *rigor* matemático você precisará aplicar a fórmula de Newton -Abel, convenientemente. No mesmo espírito, calcule

$$\int_{|z|=R} \frac{z}{\sqrt{(z-a)(z-b)}}\, \mathrm{d}z$$

para $a, b \in \mathbb{C}$ e R suficientemente grande.