INTROD. VCOMPLEXAS- SETEMBRO de 2004–listaJ

Professor: Ricardo Sá Earp

PARTE A: DESENVOLVIMENTO DE LAURENT E RESÍDUOS

Observe as seguintes técnicas de desenvolvimento de Laurent:

- $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$, para $0 < |a| < |z| < |b|$.

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left[\cdots + \frac{a^2}{z^3} + \frac{a}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{b} + \frac{z}{b^2} + \frac{z^2}{b^3} + \cdots\right]$$

A mesma função para $|z| > b$.

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b-a}{z^2} + \frac{b^2-a^2}{z^3} + \frac{b^3-a^3}{z^4} + \cdots\right]$$

•• $\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$ para $|z| > 1$. Escreva (fazendo $\dfrac{1}{z} = z'$)

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}} = \mathrm{e}^{\frac{z'}{1-z'}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z'^{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

onde

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{k!}$$

••• $\sqrt{(z-1)(z-2)}$, para $|z| > 2$. Onde o ramo da raiz quadrada está escolhido de forma que seja positivo para $z = x$ real $x > 2$. Note que usando o desenvolvimento binomial de Abel

$$\left[c_0 z - c_1 + \frac{c_2}{z} - \frac{c_3}{z^2} + \cdots\right],$$

Onde (colocando $\alpha = 1/2$)

$$c_n = \binom{\alpha}{n} + 2\binom{\alpha}{n-1}\binom{\alpha}{1} + 2^2\binom{\alpha}{n-2}\binom{\alpha}{2} + \cdots + 2^n\binom{\alpha}{n}.$$

1) Expanda as funções abaixo em suas séries de Laurent, justificando todos os passos.
   a) $\dfrac{e^z}{(1-z)}$, para $|z| < 1$. *Sugestão*: Seja $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ o desenvolvimento de Laurent (Taylor) da função dada (por quê ?). Use a fórmula de multiplicação de séries para calcular a_n mostre que

$$a_n = \left(1 + \cdots + \frac{1}{n!}\right), \qquad n \geqslant 1,\ a_0 = 1$$

   b) $\dfrac{1}{z^2+1}$, para $0 < |z-i| < 2$. *Resp.*

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{-i/2}{(z-i)} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^n (z-i)^n$$

   c) Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\, e^{1/z}$$

      i) Escreva o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ em $\{|z| > 1\}$, justificando cada passo de seus cálculos. Encontre o resíduo de $f(z)$ no ∞.
      ii) Idem para o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no anel $\{0 < |z| < 1\}$.

   d) Para cada uma das funções $f(z)$ dada nos itens a) a c) acima calcule

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^n}\, dz$$

   onde a é uma singularidade isolada de $f(z)$ e γ é uma curva simples fechada envolvendo tal singularidade de $f(z)$ (e não envolvendo outra singularidade de $f(z)$)

2)
   a) Seja $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$. Justifique o fato que f é uma função meromorfa e que tem polo duplo em $z = i$. Escreva o desenvolvimento de Laurent de f numa vizinhança de $z = i$. Mostre que $\mathrm{Res(f,i)} = \dfrac{-3}{4e}$.

b) Calcule os resíduos de $f(z) = \dfrac{1}{z^6+1}$ em cada um de seus polos.

3) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e mostre que

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

para $0 < |z| < \infty$, onde para $n \geqslant 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \mathrm{e}^{\lambda\cos t}\cos nt\,\mathrm{d}t.$$

4)

a) Encontre os desenvolvimentos de Laurent e os resíduos das funções abaixo, numa vizinhança perfurada de cada singularidade.

i) $f(z) = \dfrac{1}{1-\cos z}$.

ii) $= \dfrac{2+3z}{1-\mathrm{e}^z}$.

iii) $\dfrac{z-1}{z^5-1}$.

iv) $\dfrac{\mathrm{e}^{iaz}}{4+z^2}$.

v) (neste exemplo restrinja-se às singularidades contidas no semi-plano superior)

$$\frac{\left(\log z - \log 2 - \dfrac{i\pi}{2}\right)^2}{4+z^2}$$

onde o ramo do logaritmo está tomado retirando-se o semi-eixo imaginário negativo, com o argumento variando entre $-\pi/2$ e $3\pi/2$.

vi) (neste exemplo restrinja-se às singularidades contidas no semi-plano superior)

$$\frac{\log z - \log 2 - i\pi/2}{(z^2+4)^2}$$

onde tomamos o mesmo ramo do exemplo anterior.

b) Para cada um dos exemplos dado nos itens *i*) a *vi*) do item *a*) acima, calcule

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{2003}}\,\mathrm{d}z$$

onde γ é uma curva simples fechada positivamente orientada, em torno de uma singularidade de $f(z)$, sem passar por uma singularidade de $f(z)$, com γ bordando um domínio Ω, de maneira que $\overline{\Omega}$ contém apenas uma única singularidade de $f(z)$.

c)
   i) Calcule
$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\log(z+1)}{z^n}\,\mathrm{d}z, \quad n \geqslant 1$$
   ii) Deduza da fórmula acima uma fórmula para o cálculo de certas integrais reais.

5) Considere a função
$$f(z) = \frac{1}{1-z}\,\mathrm{e}^{1/z}$$
   a) Obtenha o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no anel $|z| > 1$.
   b) Obtenha o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no anel $0 < |z| < 1$. Calcule o resíduo, e em seguida avalie a integral
$$\int\limits_{|z|=1/2} \frac{f(z)}{z^{2003}}\,\mathrm{d}z$$

6) Escreva o desenvolvimento de Laurent de
$$f(z) = \mathrm{e}^{1/(z-1)}$$
para $|z| > 1$. Em seguida calcule
$$\int_{|z|=11^{10^{10}}} \frac{\mathrm{e}^{1/(z-1)}}{z^{11}}\,\mathrm{d}z$$
Idem para
$$\int_{|z|=11^{10^{10}}} \mathrm{e}^{1/(z-1)}\, z^9\,\mathrm{d}z$$

7) Escreva o desenvolvimento de Laurent de
$$f(z) = \left(\log\frac{z}{z-1}\right)^2$$

para $|z| > 1$. Em seguida calcule

$$\int\limits_{|z|=2} \left(\log \frac{z}{z-1}\right)^2 \mathrm{d}z$$

Nota cultural matemática:

7) Dizemos que uma função $f(z)$ definida no anel $|z| > r,\ r > 0$ é "holomorfa no infinito"se, fazendo uma mudança de variáveis $z = 1/z^{'}$ a função se expressa como uma função holomorfa em $z^{'}$ para $|z^{'}| < 1/r$. Da mesma maneira uma função $f(z)$ será *meromorfa no infinito* se esta pode se expressar como uma função meromorfa de $z^{'}$ numa vizinhança de $z^{'} = 0$. Finalmente uma função holomorfa para $|z| > r,\ r > 0$ admite o ponto do infinito como singularidade essencial se a função $f(1/z^{'})$ tem uma singularidade essencial na origem.

Determine o tipo de singularidade das funções abaixo e escreva o desenvolvimento de Laurent em torno de cada singularidade.

a) $\dfrac{z^2+4}{e^z}$, em $z = \infty$. *Resp.* Singularidade essencial.
b) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$, em $z = \infty$. *Resp.* Os dois ramos têm um polo simples.
c) $\cos z - \sin z$, em $z = \infty$.
d) $\sin \dfrac{1}{1-z}$, em $z = \infty$. *Resp.* A função é regular e tem um zero simples lá.
e) Dê exemplos de funções meromorfas em $\{|z| > r,\ r > 0\}$ que possuem o infinito como ponto limite (de acumulação) de polos simples.
f) $\sin \dfrac{1}{1-z}$, em $z = 1$. *Resp.* Singularidade essencial.
g) $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^z}$, em $z = 2\pi i$. *Resp.* Polo simples com resíduo -1.
h) $\dfrac{1}{\sin z - \cos z}$ em $z = \dfrac{\pi}{4}$. *Resp.* Polo simples com resíduo $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

8) Suponha que no ponto z_0, a função $f_1(z)$ tem um zero de ordem α, e que a função $f_2(z)$ tem um polo de ordem $\beta(\alpha > 0, \beta > 0)$. Que tipo de ponto é z_0 para
a) $f_1 \pm f_2$
b) $f_1 \cdot f_2$
c) $\dfrac{f_1}{f_2}$

d) $\dfrac{f_2}{f_1}$

9) Determine os resíduos das funções abaixo e encontre a parte principal da série de Laurent em torno de cada singularidade.

a) $\dfrac{1}{\sin z}$ em $z = k\pi,\ k = 0 \pm 1 \pm 2, \ldots$. *Resp.* $(-1)^k$

b) $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ em $z = +1$ e em $z = +2$. *Resp.* $\mathrm{Res(f,1) = 1,\ Res(f,2) = -1}$.

c) $\dfrac{a}{(z-z_1)^m(z-z_2)}$ em z_1 e z_2, $z_1 \neq z_2$ $(a \neq 0,\ m \in \mathbb{N})$ *Resp.* $\mathrm{Res(f,z_1)} = \dfrac{\mathrm{-a}}{\mathrm{(z_2-z_1)^m}},\ \mathrm{Res(f,z_2)} = \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{(z_2-z_1)^m}}$.

d) $\left(1-\mathrm{e}^{-z}\right)^{-n}$, em $z = 0$.

e) $\dfrac{1+z}{(1+z+z^2)^2}$.

10) Suponha que $f(z)$ tenha uma singularidade isolada em $z = a$ e suponha que $f(z) \not\equiv 0$. Suponha que exista $s \in \mathbb{R}$ tal que uma das seguintes equações vale

$$\lim_{z\to a} |z-a|^s |f(z)| = 0$$
$$\lim_{z\to a} |z-a|^s |f(z)| = \infty$$

a) Mostre que existe um inteiro m tal que a primeira equação vale se $s > m$, e a segunda equação vale se $s < m$.

b) $m = 0$, se $z = a$ é uma singularidade artificial e $f(a) \neq 0$.

c) $m < 0$, se $z = a$ é uma singularidade artificial e f tem um zero em $z = a$ de ordem $-m$.

d) $m > 0$, se $z = a$ é um polo de f de ordem m.

e) Se $z = a$ é uma singularidade essencial de f então nenhuma das equações acima vale para algum $s \in \mathbb{R}$.

11) Seja f uma função holomorfa definida em um domínio perfurado ("punctured") $\Omega^* := \Omega \setminus \{p\}$, onde Ω é um domínio e $p \in \Omega$. A finalidade deste exercício é mostrar que se

$$(*) \qquad \int\limits_{\Omega^*} |f(z)|^2 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y < \infty$$

então f se estende holomorficamente a todo Ω.

a) Mostre de duas maneiras distintas que, supondo $p = 0$ (sem perda de generalidade), se g é holomorfa em Ω e B_r, a bola de raio r e centro 0, satisfaz $\overline{B_r} \subset \Omega$, então

$$|g(0)|^2 \leqslant \frac{1}{\pi r^2} \int_{B_r} |g(z)|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$$

Sugestão : A primeira maneira de demonstrar a desigualdade acima é aplicar diretamente a identidade de Parseval (veja Lista4, Parte B, exerc. 4)). A segunda maneira usa apenas a fórmula de Cauchy aplicada à função $g^2(z)$.

b) Use a estrutura da demonstração do item a) para mostrar que f no enunciado, i. e satisfazendo $(*)$ *não tem* singularidade essencial na origem.

c) Mostre que $\int_{\Omega^*} |f(z)|^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \infty$, se f tem um pólo na origem.

12) Seja f uma função holomorfa no disco perfurado $\mathcal{D}^* = \{|z| < 1\} \setminus \{0\}$. Mostre que a função

$$M(r) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{it}) \,\mathrm{d}t \qquad 0 < r < 1$$

é uma constante que não depende de r. *Sugestão* : Use o desenvolvimento de Laurent na origem.

13) O que você pode dizer de uma função holomorfa $f(z)$ num perfurado centrado na origem e que satisfaz uma das condições abaixo ?

a) $|f(z)| \geqslant c\dfrac{\mathrm{e}^{a/|z|}}{|z|^n}$, $n \in \mathbb{N}, c > 0, a \geqslant 0$

b) $|f(z)| \leqslant \dfrac{1}{|z|^{7/2}}$.

14) Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{(1-az)(1-bz)(1-cz)}$$

onde a, a, c são números reais distintos e não nulos. Usando obrigatoriamente o teorema dos resíduos calcule o desenvolvimento em somas parciais de f. Em seguida calcule o desenvolvimento de Taylor na origem de f. Calcule o desenvolvimento de Taylor, por outro método efetuando logo o produto. Compare os resultados e obtenha uma fórmula algébrica.

15) Escreva os desenvolvimentos de Laurent das funções abaixo em torno de cada singularidade.

a) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)\,(1-z^2)}$

b) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)\,(1-z^2)^2}$

16) O que você pode dizer sobre uma função harmônica u definida num disco perfurado $\mathcal{D}^*$?

Em particular, discuta detalhadamente o caso em que u está limitada em $\mathcal{D}^*$.

17) Considere

$$f(z) = \frac{1}{(z^n-1)^2}$$

a) Calcule os resíduos de $f(z)$ nas singularidades, mostrando que os pólos de f são duplos e que

$$\mathrm{Res(f, a = e^{2k\pi i/n}) = -\, e^{2k\pi i/n}\, \frac{(n-1)}{n^2}}$$

b) Seja γ uma curva simples fechada contida no exterior do disco fechado de raio 1, i.e $[\gamma] \subset \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$. Mostre que

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Deduza a integrabilidade de $f(z)$ no domínio $\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$. Deduza uma outra alternativa demonstração deste fato.

c) Seja $h(z)$ uma função inteira. Calcule

$$\int\limits_{|z-z_k|=\epsilon} \frac{h(z)}{(z^n-1)^2}\,\mathrm{d}z$$

onde z_k é uma singularidade de $f(z)$ e ϵ é tomado suficientemente pequeno.

d) Escreva a série de Taylor de $f(z)$ em $z = 0$.

e) Escreva a série de Laurent de $f(z)$ em $z = 1$.

18) Considere a função $f(z) = \dfrac{\sin(\pi z)\,\mathrm{e}^{\pi z}}{\pi z(1-z)(1-z/2)\cdots(1-z/n)}$.

a) Mostre que existe um bem definido ramo de $\sqrt[n]{f(z)}$ na faixa $-1 < \Re z < n+1$.

b) Calcule os resíduos da função $\dfrac{\sqrt[n]{f(z)}}{\sin(\pi z)}$ na faixa dada no item a).