

# INTROD. VCOMPLEXAS- SETEMBRO de 2004–listaK

Professor: Ricardo Sá Earp

## FUNÇÕES MEROMORFAS E CÁLCULO DE INTEGRAIS

### *Cálculo de integrais via resíduos*

a) Verificar

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{a + b \sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad a > b > 0$$

Fazendo a substituição  $t = \tan(x/2)$  encontre uma primitiva  $F(x)$  para  $f(x) = \frac{1}{a + b \sin x}$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Resp.

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(\frac{a \tan(x/2) + b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right), \quad -\pi < x < \pi,$$

com

$$F(\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad f(-\pi) = \frac{-\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \quad F(x + 2\pi) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

b) Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1+x} dx = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \quad 0 < a < 1$$

considerando a função  $f(z) = e^{az} / (1 + e^z)$  e o o laço retangular formado pelos segmentos  $[R, R + 2\pi i]$ ,  $[R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$ ,  $[-R + 2\pi i, -R]$  e  $[-R, R]$ .

*Sugestão:* Faça a transformação  $x = e^t$  transformando a integral acima em  $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ . Você saberia calcular usando um outro contorno ?

Nota: Observemos que

$$\Gamma(a)\Gamma(1-a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

onde  $\Gamma(z)$  é a função Gamma.

c) Verificar

$$\int_0^{\pi} \frac{dx}{\alpha + \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}, \quad \alpha > 1$$

d)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{\alpha + \cos x} dx = 2\alpha\pi \left( \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} - 1 \right), \quad \alpha > 1$$

e) Verificar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

f) Verificar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)} dx = \frac{\pi}{a + b}, \quad a > b > 0$$

g) Verificar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(a + bx^2)^n} = \begin{cases} 2\pi \left(\frac{a}{b}\right)^{1/2} (2a)^{-n} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{(n-1)!} & \text{se } n = 2, 3, \dots \\ \frac{\pi}{\sqrt{ab}} & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

com  $a > 0$  e  $b > 0$ .

h) Verificar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1) \sin 2x}{x^2 + 2x + 2} dx = \frac{\pi \cos 2}{e^2}$$

i) Verificar

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{\pi}{4e}$$

j) Verificar

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2 + b^2)^2} dx = \frac{\pi e^{-ab}(1 + ab)}{4b^3}, \quad a > 0, b > 0$$

k) Estabeleça que

i)

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^4} dx = \frac{\pi/4}{\sin((\alpha+1)\pi/4)} \quad -1 < \alpha < 3$$

*Sugestão:* Integre  $f(z) = z^{\alpha}(1+z^4)^{-1}$  sobre  $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$  onde  $\gamma_1$  é o segmento real  $[r, R]$  ( $0 < r < R$ ),  $\gamma_2$  é o quarto de círculo (centrado em zero) de  $R$  à  $iR$ ,  $\gamma_3$  é o segmento  $[iR, ir]$  e  $\gamma_4$  é o quarto de círculo (centrado em zero) de  $ir$  à  $r$  (sendo  $z^{\alpha}$  a determinação principal). Se  $I_j = \int_{\gamma_j} f(z)dz$ , mostre que  $I_2 \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow \infty$  e  $I_4 \rightarrow 0$  quando  $r \rightarrow 0$ . Além disto mostre que  $I_3 = -i^{\alpha+1}I_1$ . Deduza que

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^{\beta}} dx = \frac{\pi/\beta}{\sin((\alpha+1)\pi/\beta)} \quad \beta > 0, \quad -1 < \alpha < \beta - 1$$

fazendo a substituição  $y = x^{\beta/4}$ . Conclua que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

ii) Usando um novo contorno contido num setor de ângulo  $2\pi/n$  apropriado, mostre novamente que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin(\pi/n)} \quad n = 2, 3, 4, \dots$$

iii) Fazendo uma ligeira variação do método do item b) acima, conclua que se  $n$  é um inteiro e se  $\alpha$  é um número real tal que  $n > \alpha + 1 > 0$ , então

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{1+x^n} dx = \frac{\pi/n}{\sin \frac{(\alpha+1)\pi}{n}}$$

iv) Quando  $n = 2p$  é par use obrigatoriamente um contorno retangular no semi-plano superior para calcular

$$\int_0^{\infty} \frac{x^m}{1+x^{2p}} dx$$

l) Verificar por dois métodos distintos que que

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - 2a \cos \theta + a^2} d\theta = \begin{cases} \frac{2\pi a^n}{1 - a^2} & \text{se } |a| < 1 \\ \frac{2\pi a^{-n}}{a^2 - 1} & \text{se } |a| > 1 \end{cases}$$

onde  $n = 0, 1, 2, \dots, a \in \mathbb{R}$ . *Sugestão* (método não clássico) : Observe que

$$1 - 2a \cos \theta + a^2 = (a - e^{i\theta})(a - e^{-i\theta})$$

e que

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{in\theta}}{(a - e^{i\theta})(a - e^{-i\theta})} d\theta = \int_{\gamma} \frac{z^n}{(a - z)(a - z^{-1})} \frac{dz}{iz}$$

onde  $\gamma(\theta) = e^{i\theta}$ ,  $-\pi \leq \theta \leq \pi$ . Utilizar em seguida a fórmula de Cauchy.

m) Vamos considerar agora integrais do tipo

$$\int_0^{\infty} R(x) \ln x \, dx \quad (*)$$

onde  $R(x)$  é uma função racional sem pólos sobre o semi-eixo real  $\{\mathbb{R}z > 0\}$ , satisfazendo  $\lim_{x \rightarrow \infty} xR(x) = 0$ .

i) Mostre que a condição logo acima garante a convergência da integral (\*). A idéia é integrar a função  $R(z) (\log z)^2$ , no contorno apropriado, obtendo pelo teorema dos resíduos

$$\int_0^{\infty} R(x) (\log(x))^2 \, dx - \int_0^{\infty} R(x) (\log(x) + 2\pi i)^2 \, dx = 2\pi i \sum \text{Res} \left( R(z) (\log z)^2 \right)$$

ii) Dê uma demonstração rigorosa da equação logo acima. Mostre também que quando  $R(z)$  for real, isto é, quando  $z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow R(x)$  é real, se pode calcular simultaneamente as integrais  $\int_0^{\infty} R(x) \, dx$ , e  $\int_0^{\infty} R(x) \ln x \, dx$ ,

iii) Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^4} \, dx$$

iv) Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{12 \ln x}{x^4 + x^2 + 1} dx = -\pi^2$$

v) Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{16 \ln x}{(x+1)(x^2+1)} dx = -\pi^2$$

n) Você pode ser inspirar nos exercícios acima para calcular as seguintes integrais

i)

$$\int_0^{\infty} \frac{2\sqrt{2} \ln x}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx = -\pi^2$$

ii)

$$\int_0^{\infty} \frac{-\pi\sqrt{2}}{\sqrt{x}(1+x^2)} dx = -\pi^2$$

m) Resuma o estudo de exercícios precedentes, verificando que

$$I = \int_0^{\infty} \frac{\log x}{x^\lambda(1+x)} dx = \frac{\pi^2 \cos \lambda\pi}{(\sin \lambda\pi)^2} \quad 0 < \lambda < 1$$

integrando  $f(z) = \log z / (z^\lambda(1+z))$  ao longo do contorno apropriado, com as seguintes determinações : se  $z = |z|e^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$ ,

$$\log z = \log |z| + i\theta, \quad z^\lambda = \exp(\lambda \log z)$$

Note que esta não é a determinação principal, mas dá para  $z = x > 0$  o valor  $x^{a-1} = \exp((a-1) \log x)$ . Seja  $\ln z$  a determinação principal do logaritmo:

i) Mostre que

$$\begin{aligned} (x+i\varepsilon)^{a-1} &= \exp\{(a-1) \ln(x+i\varepsilon)\} \\ (x-i\varepsilon)^{a-1} &= \exp\{(a-1) \ln(x+i\varepsilon) + 2\pi i\} \end{aligned}$$

Conclua que

- ii)  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} (x + i\varepsilon)^{a-1} = x^{a-1}$ ,  $\lim_{\substack{\varepsilon \rightarrow 0 \\ \varepsilon > 0}} (x - i\varepsilon)^{a-1} = x^{a-1} e^{2\pi ai}$ . Mostre que a convergência é uniforme em todo intervalo compacto  $[b, c]$ ,  $0 < b < c$ .

0) Mostre que

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(bx^4 + 2ax^2 + 1)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{a + \sqrt{b}}}$$

p) Mostre que a expansão de Taylor de  $h(z) = \sqrt{a + \sqrt{1+z}}$ , para  $z$  numa vizinhança da origem é dada por

$$h(z) = \sqrt{1+a} + \frac{1}{\pi\sqrt{2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} N(a; k-1) z^k$$

onde  $N(a; k-1) := \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^4 + 2ax^2 + 1)^k}$

q)

a) Generalize certo procedimento usado acima para calcular

$$\int_0^{\infty} x^{a-1} q(x) dx, \quad 0 < \Re a < 1$$

onde  $q(x)$  é uma função racional que não tem pólos sobre o eixo real positivo, incluindo a origem; assumindo que o grau do denominador de  $q$  é maior que o grau do numerador. Você saberia de outro método para calcular tais integrais ?

r) Mostre que

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{\sin x}{x} \right)^4 dx = \pi/3$$

*Sugestão* : Verifique a relação de Euler:  $\sin^4 x = \sin(4x)/8 - 3 \cos(2x)/16$ . Utilize um contorno no semi-plano superior delimitando um semi-anel. Tente obter o mesmo resultado, aplicando integração por partes e usando o resultado conhecido

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \pi/2$$

**Nota cultural matemática:****Representação de funções holomorfas por integrais:**

Para estudar a representação por integrais é preciso do seguinte resultado básico. Seja  $\Omega$  um aberto não vazio de  $\mathbb{C}$ ,  $I$  um intervalo qualquer de  $\mathbb{R}$  e  $g : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua ( na verdade basta “mensurável” ) tal que:

- i)  $z \mapsto g(z, t)$  é holomorfa em  $\Omega$  para cada  $t \in I$
- ii) Existe uma função não negativa  $M : I \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \infty$  (“integrável”) tal que  $|g(z, t)| \leq M(t)$ ,  $t \in I$ , para todo  $z \in \Omega$  com

$$\int_I M(t) dt < \infty$$

Então a função  $f$  definida por

$$f(z) = \int_I g(z, t) dt \quad (*)$$

é holomorfa em  $\Omega$ ; além disto

$$f^{(k)}(z) = \int_I g^{(k)}(z, t) dt \quad \forall z \in \Omega \quad (**)$$

onde  $g^{(k)}(z, t)$  é igual à  $\frac{\partial^k g}{\partial z^k}(z, t)$ ,  $k = 1, 2, \dots$ . Se  $\gamma$  é uma curva  $C^1$  por partes em  $\Omega$ , então

$$\int_{\gamma} f(z) dz = \int_I \left\{ \int_{\gamma} g(z, t) dz \right\} dt \quad (***)$$

A demonstração do resultado acima é clássica. Depende da aplicação sucessiva dos seguintes teoremas: Teorema da convergência dominada de Lebesgue (para mostrar que  $f(z)$  é contínua em  $\Omega$ ), teorema de Fubini (para mostrar que as integrais iteradas no segundo membro de (\*\*\*) não dependem da ordem da integração, mostrando assim a igualdade em (\*\*)), teorema de Morera (que depende de (\*\*\*)) e fórmula de Cauchy local (para mostrar (\*\*)).

- 1) Mostre o seguinte corolário do resultado acima, usando o fato que *holomorfia* é uma propriedade local: *Seja  $\Omega$  um aberto não vazio de  $\mathbb{C}$ ,  $I$  um intervalo compacto de  $\mathbb{R}$  e  $g : \Omega \times I \rightarrow \mathbb{C}$  uma função contínua tal que  $z \mapsto g(z, t)$  é*

holomorfa em  $\Omega$  para cada  $t \in I$ ; então  $f$  definida por (\*) é holomorfa em  $\Omega$  e (\*\*), (\*\*\*) são verificadas.

2) Mostre a igualdade

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 + z \sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{1 - z^2}}$$

se  $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1) \cup [1, \infty))$ . *Sugestão:* Mostre que se  $f(z)$  é o termo à esquerda e  $h(z)$  o termo à direita então ambas as funções são holomorfas em  $\Omega$  ( use o resultado no item a) para mostrar que  $f$  é holomorfa em  $\Omega$ ).

3) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(zt - \alpha t^2) dt = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{z^2/4\alpha}, \quad z \in \mathbb{C}, \alpha > 0$$

Deduza a seguinte bem conhecida fórmula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

Em particular, obtenha a transformada de Fourier de  $t \mapsto e^{-\alpha t^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha t^2} e^{-ipt} dt = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} e^{-p^2/4\alpha}$$

*Sugestão:* Seja  $f(z)$  o membro à esquerda da igualdade acima. Mostre que para  $\Re z < a$  tem-se que

$$|\exp(zt - \alpha t^2)| \leq \exp(at - \alpha t^2), \quad t \in \mathbb{R}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(at - \alpha t^2) dt < \infty$$

para  $a \in \mathbb{R}$ ,  $\alpha > 0$ . Aplique o resultado no item a) para mostrar que  $f(z)$  é uma função holomorfa no semi-plano aberto  $\Re z < a$ , daí conclua que  $f(z)$

é uma função inteira. Mostre a igualdade desejada para  $z$  real fazendo a seguinte integração elementar:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\left\{-\alpha\left(t - \frac{z}{2\alpha}\right)^2 + \frac{z^2}{4\alpha^2}\right\}\right) dt$$

4) (*Função Gamma*) Considere a função (chamada função Gamma)

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

i) Mostre que  $\Gamma$  é holomorfa no aberto  $\Re z > 0$ ,  $t^{z-1} = \exp\{(z-1)\log t\}$ ,  $0 < t < \infty$ . *Sugestão:* Mostre que para  $0 < a < \Re z < b$ , então

$$|e^{-t} t^{z-1}| \leq \begin{cases} e^{-t} t^{b-1} & \text{se } t \geq 1 \\ t^{a-1} & \text{se } 0 < t < 1 \end{cases}$$

ii) Mostre a equação funcional

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Conclua que  $\Gamma(n+1) = n!$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . *Sugestão:* Verifique a equação acima para  $z$  real e  $z > 0$ , fazendo uma integração por partes.

iii) (*Prolongamento analítico da função  $\Gamma$* ) Mostre que a função gamma possui um prolongamento analítico em  $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \dots\}$ , sendo cada ponto  $-n$  um polo simples com

$$\text{Res}(\Gamma, -n) = \frac{(-1)^n}{n!}, \quad n \in \mathbb{N}$$

*Sugestão:* Considere  $\Gamma(z) = \varphi(z) + \psi(z)$ , onde

$$\varphi(z) = \int_0^1 e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \psi(z) = \int_1^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt, \quad \Re z > 0$$

Mostre com um raciocínio similar ao exercício precedente que  $\psi$  é uma função inteira. Em seguida verifique que utilizando o teorema da convergência dominada de Lebesgue tem-se que para  $\Re z > \epsilon > 0$

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

Mostre que a série acima é holomorfa em  $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, \dots\}$ , observando que se  $\mathcal{D}$  é um disco aberto tal que  $\bar{\mathcal{D}} \cap \{0, -1, -2, \dots\} = \emptyset$ , então

$$\inf\{|z + n|; n \in \mathbb{N}, z \in \mathcal{D}\} = c > 0$$

isto é a série acima é normalmente convergente em  $\bar{\mathcal{D}}$ . Mostre que  $\lim_{z \rightarrow -m} \Gamma(z) = (-1)^m/m!$ .

iv) Mostre que

$$\Gamma(n + 1/2) = \frac{2n!}{n! 4^n} \sqrt{\pi}, \quad n \in \mathbb{N}$$

v) Foi mostrado usando teoria dos resíduos que

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{x^\lambda(1+x)} dx = \frac{\pi}{\sin \lambda\pi}, \quad (0 < \lambda < 1)$$

usando o cálculo acima mostre a *fórmula de suplemento de Euler*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$$

Procure extrair consequências disto.

Nota: Uma outra fórmula importante é a *fórmula de duplicação de Gauss-Legendre*:

$$\sqrt{\pi} \Gamma(2z) = 2^{2z-1} \Gamma(z) \Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \quad 2z \in \mathbb{C} \setminus -\mathbb{N}$$

vi) Demostre a seguinte regra da *transformada de Laplace*  $\mathcal{L}$ , usando continuação analítica

$$\mathcal{L}(t^\alpha) = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}, \quad \alpha > -1, \quad \operatorname{Re} s > 0$$

Calcule

$$\mathcal{L}(1/\sqrt{\pi t})$$

### *Princípio do argumento e teorema de Rouché*

(*Interpretação geométrica do princípio do argumento*). Seja  $f$  uma função meromorfa em um aberto  $A$ . Seja  $\gamma$  uma curva fechada  $C^1$  por partes que não

passa pelos zeros ou polos de  $f$ . O princípio do argumento sugere que fazendo  $z$  percorrer  $\gamma$ ,  $\log f(z)$  muda por um múltiplo de  $2\pi iK$ , onde  $K$  é um inteiro que mede o “número de voltas” que a imagem de  $\gamma$  faz em torno da origem, ou equivalentemente,  $2\pi K$  mede a “variação” de  $\arg f(z)$  quando  $z$  percorre  $\gamma$ . A dificuldade com este raciocínio é que não se pode definir sempre  $\log f(z)$  ( caso isto seja possível  $\int_{\gamma} f'/f = 0$ ). Mas, esta discussão pode ser colocada em bases rigorosas da seguinte maneira:

Como nenhum zero ou polo de  $f$  está em  $\gamma$  existe um disco aberto  $B(a, r)$  para cada  $a \in [\gamma]$ , tal que um ramo de  $\log f(z)$  pode ser definido. Usando o lema de Lebesgue existe um número positivo  $\epsilon > 0$  tal que para todo  $a \in [\gamma]$  pode-se definir um ramo de  $\log f(z)$  em  $B(a, \epsilon)$ . Usando continuidade uniforme de  $\gamma$  (suponhamos que  $\gamma$  está definida em  $[0, 1]$ ) existe uma partição  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$  tal que  $\gamma(t) \in B(\gamma(t_{j-1}), \epsilon)$  para  $t_{j-1} \leq t \leq t_j$  e  $1 \leq j \leq k$  (por quê?). Seja  $\ell_j$  o ramo de  $\log f$  definida em  $B(\gamma(t_{j-1}), \epsilon)$  para  $1 \leq j \leq k$ . Como tanto o  $j$ -ésimo disco quanto o  $j+1$ -ésimo disco contém  $\gamma(t_j)$  podemos escolher  $\ell_1, \dots, \ell_k$  de forma que  $\ell_1(\gamma(t_1)) = \ell_2(\gamma(t_1)), \ell_2(\gamma(t_2)) = \ell_3(\gamma(t_2)), \dots, \ell_{k-1}(\gamma(t_{k-1})) = \ell_k(\gamma(t_{k-1}))$ . Se  $\gamma_j$  é a restrição da curva  $\gamma$  ao intervalo  $[t_{j-1}, t_j]$  como  $\ell_j = f'/f$ , temos que

$$\int_{\gamma_j} \frac{f'}{f} = \ell_j(\gamma(t_j)) - \ell_j(\gamma(t_{j-1}))$$

para  $1 \leq j \leq k$ . Somando ambos os lados desta equação obtém-se

$$\int_{\gamma} \frac{f'}{f} = \ell_k(\gamma(1)) - \ell_1(\gamma(0)).$$

Mas,  $\gamma$  é fechada, i.e  $a := \gamma(1) = \gamma(0)$ . Logo,  $\ell_k(a) - \ell_1(a) = 2\pi iK$  onde  $K$  é um inteiro (já que são determinações do logaritmo). Isto conclui nossa interpretação de que quando  $z$  percorre  $\gamma$ ,  $\arg f(z)$  muda por  $2\pi K$ .

5) Mostre que o número de zeros de  $P(z) = z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 4$  no primeiro quadrante é zero. E no quarto quadrante? Isto pode ser deduzido imediatamente do resultado no primeiro quadrante por *simetria*?

i) Mostre que em  $\text{Im } z = 0, 0 \leq \Re z \leq R$ , a variação do argumento  $\arg P(x)$ ,  $x = \Re z$ , é evidentemente nula já que  $P(x) > 0$ .

- ii) Fazendo  $z = Re^{i\theta}$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi/2$  e  $R$  grande tem-se que a variação do argumento é da ordem

$$\arg P(Re^{i\theta}) = 2\pi + \delta$$

onde  $\delta \rightarrow 0$ , quando  $R \rightarrow \infty$ .

- ii) Analise a variação do argumento quando  $x = 0$  e  $0 < y < R$ , analisando os zeros e o sinal das partes reais e imaginárias do polinômio  $P(iy)$  no intervalo considerado. Conclua que a variação de  $\arg P(iy)$  é  $-2\pi + \delta_1$  onde  $\delta_1 \rightarrow 0$  quando  $R \rightarrow \infty$ . Finalmente, infira a nulidade da variação total do argumento ao longo de  $C$ , já que  $C$  é fechada e o argumento deve ser um inteiro.
- 6) Pela mesma técnica do exercício anterior mostre que as seguintes equações têm apenas um zero no primeiro quadrante:

$$z^3 - z^2 + 2 = 0, \quad z^4 + z^2 = 2z - 6, \quad z^4 + z^3 = 2z^2 - 2z - 4.$$

- 7) Mostre que  $e^z = -2z + 1$  tem exatamente um zero em  $|z| < 1$ . *Sugestão:* Considere  $f(z) = -2z$ ,  $g(z) = e^z - 1 = \int_0^z e^\zeta d\zeta$ . Mostre que pela última expressão obtém-se a estimativa:  $|g(z)| \leq 2$ , se  $|z| \leq 1$ . Aplique o teorema de Rouché.
- 8) Considere a equação  $2z^5 + 8z - 1 = 0$ .
- Mostre que a equação não tem zeros em  $|z| > 2$ , por um raciocínio elementar direto ( $64 > 17$ ). Confirme isto mostrando via o teorema de Rouché que existem 5 zeros em  $|z| < 2$ .
  - Mostre que a equação tem exatamente um zero em  $|z| < 1$  e que este zero é real e positivo.
  - Mostre que a equação não tem zeros em  $|z| = 1$ ; logo conclua que tem exatamente 4 zeros no anel  $1 < |z| < 2$ .
- 9) Considere a equação

$$f(z) = e^{-z} + z = a$$

com  $\Re a > 1$ .

- Usando o princípio do argumento, nos moldes do exerc. 1) acima, mostre que a equação possui uma e apenas uma solução no semi-plano  $\Re z > 0$ .

b) Usando o teorema de Rouché, mostre que a equação tem apenas uma solução para  $\Re z > 0$ .

- 10) Deduza o teorema fundamental da álgebra aplicando o teorema de Rouché.
- 11) Suponha que  $f(z)$  é analítica em um domínio contendo o disco unitário fechado centrado na origem. Se  $|f(z)| < 1$  para  $|z| = 1$ , mostre que existe apenas um único  $z$  com  $|z| < 1$  satisfazendo  $f(z) = z$ . Se  $|f(z)| \leq 1$  para  $|z| = 1$ , o que você pode dizer ?
- 12) Suponha que  $a, b, c$  sejam números complexos tais que  $|b| - |c| > |a| > 0$ ; mostre que para todo  $n \in \mathbb{N}$  a equação

$$az^n + bz + c = 0$$

possui exatamente um zero em  $|z| < 1$ .

- 13) Mostre que para todo número complexo  $a$  e todo inteiro  $n \geq 2$ , a equação  $az^n + z + 1 = 0$  possui ao menos um zero em  $|z| \leq 2$ . *Sugestão:* Mostre que se  $|a| < 2^{-n}$  há exatamente um zero pelo teorema de Rouché. Se  $|a| \geq 2^{-n}$ , então o resultado é uma consequência do fato que  $|z_1 \cdots z_n| = |1/a|$ , onde as  $z_j$  são os zeros da equação, com multiplicidades. Por quê ?
- 14) Mostre que para  $\lambda$  real,  $\lambda > 1$  e  $n \in \mathbb{N}$ , a equação  $z^n e^{\lambda-z} = 1$ , possui  $n$  zeros (contando as multiplicidades) em  $|z| < 1$ .
- 15) *Os zeros de um polinômio variam continuamente com os coeficientes do polinômio.* Sejam  $z_1, z_2, \dots, z_k$  o conjunto dos zeros do polinômio  $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n$ ,  $z_j$  sendo um zero de ordem  $m_j$ ; seja  $\rho = \min_{i \neq j} |z_i - z_j|$ . Mostre que para todo  $\epsilon \in (0, \rho)$  existe um  $\delta > 0$  tal que todo polinômio

$$q(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n$$

com  $\max_{1 \leq i \leq n} |b_i - a_i| < \delta$  possui exatamente  $m_j$  zeros (contando as multiplicidades) no disco aberto  $B(z_j, \epsilon)$ ,  $j = 1, 2, \dots, k$ . *Sugestão:* Sabe-se que

$$P(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_k)^{m_k}$$

Mostre que sobre o círculo de equação  $|z - z_j| = \epsilon$ , tem-se que  $|P(z)| \geq \epsilon^{m_j} (\rho - \epsilon)^{n-m_j}$ . Mostre que

$$|q(z) - P(z)| \leq \delta \sum_{t=0}^{n-1} |z|^t \leq \delta \sum_{t=0}^{n-1} (|z_j| + \epsilon)^t.$$

Logo considerando

$$0 < \delta < \min_{1 \leq j \leq k} \left\{ \frac{\epsilon^{m_j} (\rho - \epsilon)^{n-m_j}}{\sum_{t=0}^{n-1} (|z_j| + \epsilon)^t} \right\}$$

conclua o resultado, aplicando o teorema de Rouché.

- 16) Mostre que a equação  $z(e^z - 1) = w$  para  $|w| < 1/6$  tem exatamente duas soluções na bola aberta de raio  $R = 1/2$  centrada na origem. *Sugestão:* Mostre que se  $|z| = r < 1$  então

$$|e^z - 1| \geq r - \frac{r^2}{2 - r}$$

- 17) Encontre o número de zeros do polinômio  $p(z) = z^7 - 5z^3 + 12$  contidos dentro da bola unitária aberta de raio 1 centrada na origem. Idem para o anel  $\{1 < |z| < 2\}$ . *Sugestão:* Mostre usando o algoritmo de Euclides que  $p$  e  $p'$  são primos entre si, concluindo que todas os zeros de  $p$  são simples.

- 18) Seja  $w \in \mathbb{C}$  tal que  $|w| < \frac{2}{3\sqrt{3}}$ . Mostre que existe um único número complexo  $z = f(w)$  tal que  $|z| < \frac{1}{\sqrt{3}}$  com  $z^3 + z = w$ . Mostre que  $f(w)$  é holomorfa e infira a seguinte fórmula

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{z(3z^2 + 1)}{z^3 + z - w} dz$$

- a) Escreva o desenvolvimento de Taylor de  $f(w)$  em  $w = 0$ , explicitando os coeficientes do desenvolvimento e determinando o raio de convergência da série.
- 19) Sejam  $a_1, \dots, a_n$  e  $b$  números complexos de módulo inferior que 1, e sejam  $k_1, \dots, k_n$  números inteiros positivos. Mostre que a equação

$$\prod_1^n \left( \frac{z - a_j}{z\bar{a} - 1} \right)^{k_j} = b$$

possui  $k := k_1 + \dots + k_n$  soluções na bola unitária aberta de raio 1 centrada na origem.

20) Assumindo que  $\tan z - z$  tem apenas zeros reais, calcule os resíduos da função

$$f(z) = \frac{\sin^2 z \tan^2 z}{z^2(\tan z - z)}.$$

21) Calcule

$$\int_{|z|=7} \frac{z^7 (1 + e^{7 \cos z} (1 + \cos z)^7)^2 (\sin z + \cos z)}{(\sin z/3)^7 (\sin z - \cos z)} dz$$

22) Considere polinômio  $f(z)$  dado por

$$f(z) := \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{2n!}$$

Mostre que existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que se  $n \geq N$  então  $f(z)$  tem exatamente um zero simples no disco  $|z| < 2\pi$ .