INTROD. VCOMPLEXAS- SETEMBRO de 2004–listaK

Professor: Ricardo Sá Earp

FUNÇÕES MEROMORFAS E CÁLCULO DE INTEGRAIS

Cálculo de integrais via resíduos

a) Verificar

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}x}{a + b\sin x} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \qquad a > b > 0$$

Fazendo a substituição $t = \tan(x/2)$ encontre uma primitiva $F(x)$ para $f(x) = \dfrac{1}{a + b\sin x}$, $x \in \mathbb{R}$. *Resp.*

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arctan\left(\frac{a\ \tan(x/2) + b}{\sqrt{a^2 - b^2}}\right), \qquad -\pi < x < \pi,$$

com

$$F(\pi) = \frac{\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \qquad f(-\pi) = \frac{-\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}}, \qquad F(x + 2\pi) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

b) Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{a-1}}{1 + x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{\sin a\pi}, \qquad 0 < a < 1$$

considerando a função $f(z) = \mathrm{e}^{az} \;/\; (1 + \mathrm{e}^{z})$ e o o laço retangular formado pelos segmentos $[R, R + 2\pi i]$, $[R + 2\pi i, -R + 2\pi i]$, $[-R + 2\pi i, -R]$ e $[-R, R]$. *Sugestão*: Faça a transformação $x = \mathrm{e}^t$ transformando a integral acima em $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$. Você saberia calcular usando um outro contorno ?
Nota: Observemos que

$$\Gamma(a)\Gamma(1 - a) = \frac{\pi}{\sin \pi a}$$

onde $\Gamma(z)$ é a função Gamma.

c) Verificar

$$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\alpha + \cos x} = \frac{\pi}{\sqrt{\alpha^2 - 1}}, \qquad \alpha > 1$$

d)

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 x}{\alpha + \cos x}\,\mathrm{d}x = 2\alpha\pi \left(\frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - 1}} - 1 \right), \qquad \alpha > 1$$

e) Verificar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$$

f) Verificar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{a+b}, \qquad a > b > 0$$

g) Verificar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a+bx^2)^n} = \begin{cases} 2\pi \left(\dfrac{a}{b}\right)^{1/2} (2a)^{-n} \dfrac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{(n-1)!} & \text{se } n = 2, 3, \ldots \\ \dfrac{\pi}{\sqrt{ab}} & \text{se } n = 1 \end{cases}$$

com $a > 0$ e $b > 0$.

h) Verificar

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{(x+1)\sin 2x}{x^2+2x+2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \cos 2}{\mathrm{e}^2}$$

i) Verificar

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin x}{(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4\mathrm{e}}$$

j) Verificar

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{(x^2+b^2)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi \mathrm{e}^{-ab}(1+ab)}{4b^3}, \qquad a > 0,\ b > 0$$

k) Estabeleça que

a)

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^4}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi/4}{\sin\left((\alpha+1)\pi/4\right)} \qquad -1<\alpha<3$$

Sugestão: Integre $f(z) = z^\alpha(1+z^4)^{-1}$ sobre $\gamma_1\gamma_2\gamma_3\gamma_4$ onde γ_1 é o segmento real $[r,R]$ $(0<r<R)$, γ_2 é o quarto de círculo (centrado em zero) de R à iR, γ_3 é o segmento $[iR, ir]$ e γ_4 é o quarto de cırculo (centrado em zero) de ir à r (sendo z^α a determinação principal). Se $I_j = \int_{\gamma_j} f(z)\mathrm{d}z$, mostre que $I_2 \to 0$ quando $R\to\infty$ e $I_4 \to 0$ quando $r\to 0$. Além disto mostre que $I_3 = -i^{\alpha+1}I_1$. Deduza que

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^\beta}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi/\beta}{\sin\left((\alpha+1)\pi/\beta\right)} \qquad \beta>0,\ -1<\alpha<\beta-1$$

fazendo a substituição $y = x^{\beta/4}$. Conclua que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi/n}{\sin\left(\pi/n\right)} \qquad n = 2,3,4,\ldots$$

b) Usando um novo contorno contido num setor de ângulo $2\pi\gamma/n$ apropriado, mostre novamente que

$$\int_0^\infty \frac{1}{1+x^n}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi/n}{\sin\left(\pi/n\right)} \qquad n = 2,3,4,\ldots$$

c) Fazendo uma ligeira variação do método do item b) acima, conclua que se n é um inteiro e se α é um número real tal que $n>\alpha+1>0$, então

$$\int_0^\infty \frac{x^\alpha}{1+x^n}\,\mathrm{d}\,x = \frac{\pi/n}{\sin\dfrac{(\alpha+1)\pi}{n}}$$

d) Quando $n = 2p$ é par use obrigatoriamente um contorno retangular no semi-plano superior para calcular

$$\int_0^\infty \frac{x^m}{1+x^{2p}}\,\mathrm{d}\,x$$

l) Verificar por dois métodos distintos que que

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{1 - 2a\cos\theta + a^2}\,\mathrm{d}\theta = \begin{cases} \dfrac{2\pi a^n}{1-a^2} & \text{se } |a| < 1 \\ \dfrac{2\pi a^{-n}}{a^2-1} & \text{se } |a| > 1 \end{cases}$$

onde $n = 0, 1, 2, \ldots, a \in \mathbb{R}$. *Sugestão* (método não clássico) : Observe que

$$1 - 2a\cos\theta + a^2 = (a - \mathrm{e}^{i\theta})(a - \mathrm{e}^{-i\theta})$$

e que

$$I_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\mathrm{e}^{in\theta}}{(a-\mathrm{e}^{i\theta})(a-\mathrm{e}^{-i\theta})}\,\mathrm{d}\theta = \int_{\gamma} \frac{z^n}{(a-z)(a-z^{-1})}\,\frac{\mathrm{d}z}{iz}$$

onde $\gamma(\theta) = \mathrm{e}^{i\theta}$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$. Utilizar em seguida a fórmula de Cauchy.

m) Vamos considerar agora integrais do tipo

$$\int_0^{\infty} R(x)\,\ln x\,\mathrm{d}\,x \qquad (*)$$

onde $R(x)$ é uma função racional sem pólos sobre o semi-eixo real $\{\mathbb{R}z > 0\}$, satisfazendo $\lim\limits_{x\to\infty} xR(x) = 0$.

i) Mostre que a condição logo acima garante a convergência da integral $(*)$. A idéia é integrar a função $R(z)\,(\log z)^2$, no contorno apropriado, obtendo pelo teorema dos resíduos

$$\int_0^{\infty} R(x)(\log(x))^2\,\mathrm{d}\,x - \int_0^{\infty} R(x)\,(\log(x) + 2\pi i)^2\,\mathrm{d}\,x = 2\pi i \sum \mathrm{Res}\left(\mathrm{R(z)}\,(\log \mathrm{z})^2\right)$$

ii) Dê uma demonstração rigorosa da equação logo acima. Mostre também que quando $R(z)$ for real, isto é, quando $z = x \in \mathbb{R} \Rightarrow R(x)$ é real, se pode calcular simultaneamente as integrais $\displaystyle\int_0^{\infty} R(x)\,\mathrm{d}\,x$, e $\displaystyle\int_0^{\infty} R(x)\,\ln x\,\mathrm{d}\,x$,

iii) Calcule

$$\int_0^{\infty} \frac{\ln x}{(1+x)^4}\,\mathrm{d}\,x$$

iv) Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{12\ln x}{x^4+x^2+1}\,\mathrm{d}\,x = -\pi^2$$

v) Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{16\ln x}{(x+1)(x^2+1)}\,\mathrm{d}\,x = -\pi^2$$

n) Você pode ser inspirar nos exercícios acima para calcular as seguintes integrais

i)

$$\int_0^\infty \frac{2\sqrt{2}\ln x}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}\,x = -\pi^2$$

ii)

$$\int_0^\infty \frac{-\pi\sqrt{2}}{\sqrt{x}\,(1+x^2)}\,\mathrm{d}\,x = -\pi^2$$

m) Resuma o estudo de exercícios precedentes, verificando que

$$I = \int_0^\infty \frac{\log x}{x^\lambda(1+x)}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi^2\cos\lambda\pi}{(\sin\lambda\pi)^2} \qquad 0<\lambda<1$$

integrando $f(z) = \log z/\left(z^\lambda(1+z)\right)$ ao longo do contorno apropriado, com as seguintes determinações : se $z = |z|\,\mathrm{e}^{i\theta},\ 0\leqslant\theta<2\pi,$

$$\log z = \log|z| + i\theta, \qquad z^\lambda = \exp(\lambda\log z)$$

Note que esta não é a determinação principal, mas dá para $z = x > 0$ o valor $x^{a-1} = \exp\left((a-1)\log x\right)$. Seja $\ln z$ a determinação principal do logaritmo:

i) Mostre que

$$(x+i\varepsilon)^{a-1} = \exp\{(a-1)\ln(x+i\varepsilon)\}$$
$$(x-i\varepsilon)^{a-1} = \exp\{(a-1)\ln(x+i\varepsilon)+2\pi i\}$$

Conclua que

ii) $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (x+i\varepsilon)^{a-1} = x^{a-1}$, $\lim_{\substack{\varepsilon\to 0\\ \varepsilon>0}} (x-i\varepsilon)^{a-1} = x^{a-1}\,\mathrm{e}^{2\pi a i}$. Mostre que a convergência é uniforme em todo intervalo compacto $[b,c],\ 0<b<c$.

0) Mostre que

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{(bx^4+2ax^2+1)} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{a+\sqrt{b}}}$$

p) Mostre que a expansão de Taylor de $h(z) = \sqrt{a+\sqrt{1+z}}$, para z numa vizinhança da origem é dada por

$$h(z) = \sqrt{1+a} + \frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{k}\,N(a;k-1)z^k$$

onde $N(a;k-1) := \displaystyle\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}\,x}{(x^4+2ax^2+1)^k}$

q)

a) Generalize certo procedimento usado acima para calcular

$$\int_0^\infty x^{a-1}q(x)\ \mathrm{d}x, \qquad 0<\Re a<1$$

onde $q(x)$ é uma função racional que não tem pólos sobre o eixo real positivo, incluindo a origem; assumindo que o grau do denominador de q é maior que o grau do numerador. Você saberia de outro método para calcular tais integrais ?

r) Mostre que

$$\int_0^\infty \left(\frac{\sin x}{x}\right)^4 \mathrm{d}x = \pi/3$$

Sugestão : Verifique a relação de Euler: $\sin^4 x = \sin(4x)/8 - 3\cos(2x)/16$. Utilize um contorno no semi-plano superior delimitando um semi-anel. Tente obter o mesmo resultado, aplicando integração por partes e usando o resultado conhecido

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \pi/2$$

Nota cultural matemática:
Representação de funções holomorfas por integrais:

Para estudar a representação por integrais é preciso do seguinte resultado básico. *Seja* Ω *um aberto não vazio de* $\mathbb{C}$, I *um intervalo qualquer de* $\mathbb{R}$ *e* $g : \Omega \times I \to \mathbb{C}$ *uma função contínua (na verdade basta "mensurável") tal que:*

i) $z \mapsto g(z,t)$ *é holomorfa em* Ω *para cada* $t \in I$

ii) Existe uma função não negativa $M : I \to \mathbb{R}^+ \cup \infty$ *("integrável") tal que* $|g(z,t)| \leqslant M(t),\ t \in I$, *para todo* $z \in \Omega$ *com*

$$\int_I M(t)\,\mathrm{d}t < \infty$$

Então a função f *definida por*

$$f(z) = \int_I g(z,t)\,\mathrm{d}t \tag{$*$}$$

é holomorfa em Ω*; além disto*

$$f^{(k)}(z) = \int_I g^{(k)}(z,t)\,\mathrm{d}t \qquad \forall z \in \Omega \tag{$**$}$$

onde $g^{(k)}(z,t)$ *é igual à* $\dfrac{\partial^k g}{\partial z^k}(z,t),\ k = 1, 2, \ldots$ *Se* γ *é uma curva* C^1 *por partes em* Ω, *então*

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = \int_I \left\{ \int_\gamma g(z,t)\,\mathrm{d}z \right\} \mathrm{d}t \tag{$***$}$$

A demonstração do resultado acima é clássica. Depende da aplicação sucessiva dos seguintes teoremas: Teorema da convergência dominada de Lebesgue (para mostrar que $f(z)$ é contínua em Ω) , teorema de Fubini (para mostrar que as integrais iteradas no segundo membro de $(***)$ não dependem da ordem da integração , mostrando assim a igualdade em $(***)$), teorema de Morera (que depende de $(***)$) e fórmula de Cauchy local (para mostrar $(**)$).

1) Mostre o seguinte corolário do resultado acima, usando o fato que *holomorfia* é uma propriedade *local*: *Seja* Ω *um aberto não vazio de* $\mathbb{C}$, I *um intervalo compacto de* $\mathbb{R}$ *e* $g : \Omega \times I \to \mathbb{C}$ *uma função contínua tal que* $z \mapsto g(z,t)$ *é*

holomorfa em Ω para cada $t \in I$; então f definida por $(*)$ é holomorfa em Ω e $(**)$, $(***)$ são verificadas.

2) Mostre a igualdade

$$\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}t}{1 + z\sin t} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-z^2}}$$

se $z \in \Omega = \mathbb{C} \setminus \Big((-\infty, -1) \cup [1, \infty)\Big)$. *Sugestão*: Mostre que se $f(z)$ é o termo à esquerda e $h(z)$ o termo à direita então ambas as funções são holomorfas em Ω (use o resultado no item a) para mostrar que f é holomorfa em Ω).

3) Mostre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(zt - \alpha t^2)\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{z^2/4\alpha}, \qquad z \in \mathbb{C}, \alpha > 0$$

Deduza a seguinte bem conhecida fórmula:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u = \sqrt{\pi}$$

Em particular, obtenha a *transformada de Fourier* de $t \mapsto \mathrm{e}^{-\alpha t^2}$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha t^2}\,\mathrm{e}^{-ipt}\,\mathrm{d}t = \left(\frac{\pi}{\alpha}\right)^{1/2} \mathrm{e}^{-p^2/4\alpha}$$

Sugestão: Seja $f(z)$ o membro à esquerda da igualdade acima. Mostre que para $\Re z < a$ tem-se que

$$|\exp(zt - \alpha t^2)| \leqslant \exp(at - \alpha t^2), \qquad t \in \mathbb{R}$$

e

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(at - \alpha t^2)\,\mathrm{d}t < \infty$$

para $a \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$. Aplique o resultado no item a) para mostrar que $f(z)$ é uma função holomorfa no semi-plano aberto $\Re z < a$, daí conclua que $f(z)$

é uma função inteira. Mostre a igualdade desejada para z *real* fazendo a seguinte integração elementar:

$$f(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\left\{-\alpha\left(t - \frac{z}{2\alpha}\right)^2 + \frac{z^2}{4\alpha^2}\right\}\right) \mathrm{d}t$$

4) (*Função Gamma*) Considere a função (chamada função Gamma)

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t$$

i) Mostre que Γ é holomorfa no aberto $\Re z > 0$, $t^{z-1} = \exp\{(z-1)\log t\}$, $0 < t < \infty$. *Sugestão*: Mostre que para $0 < a < \Re z < b$, então

$$|\mathrm{e}^{-t} t^{z-1}| \leqslant \begin{cases} \mathrm{e}^{-t} t^{b-1} & \text{se } t \geqslant 1 \\ t^{a-1} & \text{se } 0 < t < 1 \end{cases}$$

ii) Mostre a equação funcional

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$$

Conclua que $\Gamma(n+1) = n!$, $n \in \mathbb{N}$. *Sugestão*: Verifique a equação acima para z real e $z > 0$, fazendo uma integração por partes.

iii) (*Prolongamento analítico da função* Γ) Mostre que a função gamma possui um prolongamento analítico em $\mathbb{C} \setminus \{0, -1, -2, -3, \ldots\}$, sendo cada ponto $-n$ um polo simples com

$$\mathrm{Res}(\Gamma, -\mathrm{n}) = \frac{(-1)^{\mathrm{n}}}{\mathrm{n}!}, \qquad \mathrm{n} \in \mathbb{N}$$

Sugestão: Considere $\Gamma(z) = \varphi(z) + \psi(z)$, onde

$$\varphi(z) = \int_0^1 \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t, \quad \psi(t) = \int_1^\infty \mathrm{e}^{-t} t^{z-1}\, \mathrm{d}t, \quad \Re z > 0$$

Mostre com um raciocínio similar ao exercício precedente que ψ é uma função inteira. Em seguida verifique que utilizando o teorema da convergência dominada de Lebesgue tem-se que para $\Re z > \epsilon > 0$

$$\varphi(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!(z+n)}$$

Mostre que a série acima é holomorfa em $\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$, observando que se $\mathcal{D}$ é um disco aberto tal que $\bar{\mathcal{D}}\cap\{0,-1,-2,\ldots\}=\emptyset$, então

$$\inf\{|z+n|;\ n\in\mathbb{N},\ z\mathcal{D}\}=c>0$$

isto é a série acima é normalmente convergente em $\bar{\mathcal{D}}$. Mostre que $\lim_{z\to -m}\Gamma(z)=(-1)^m/m!$.

iv) Mostre que

$$\Gamma(n+1/2)=\frac{2n!}{n!\,4^n}\sqrt{\pi},\quad n\in\mathbb{N}$$

v) Foi mostrado usando teoria dos resíduos que

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^\lambda(1+x)}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{\sin\lambda\pi},\quad (0<\lambda<1)$$

usando o cálculo acima mostre a *fórmula de suplemento de Euler*

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z},\quad z\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{Z}$$

Procure extrair consequëncias disto.

Nota: Uma outra fórmula importante é a *fórmula de duplicação de Gauss-Legendre*:

$$\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z)=2^{2z-1}\Gamma(z)\,\Gamma\left(z+\frac{1}{2}\right)\qquad 2z\in\mathbb{C}\setminus-\mathbb{N}$$

vi) Demostre a seguinte regra da *transformada de Laplace* $\mathcal{L}$, usando continuação analítica

$$\mathcal{L}(t^\alpha)=\frac{\Gamma(\alpha+1)}{s^{\alpha+1}},\quad \alpha>-1,\quad \operatorname{Re}s>0$$

Calcule

$$\mathcal{L}(1/\sqrt{\pi t})$$

Princípio do argumento e teorema de Rouché

(*Interpretação geométrica do princípio do argumento*). Seja f uma função meromorfa em um aberto A. Seja γ uma curva fechada C^1 por partes que não paasa pelos zeros ou polos de f. O princípio do argumento sugere que fazendo z percorrer γ, $\log f(z)$ muda por um múltiplo de $2\pi i K$, onde K é um inteiro que mede o "número de voltas"que a imagem de γ faz em torno da origem, ou equivalentemente, $2\pi K$ mede a "variação' de $\arg f(z)$ quando z percorre γ. A dificuldade com este raciocínio é que não se pode definir sempre $\log f(z)$ (caso isto seja possıvel $\int_\gamma f'/f = 0$). Mas, esta discussão pode ser colocada em bases rigorosas da seguinte maneira:

Como nenhum zero ou polo de f está em γ existe um disco aberto $B(a,r)$ para cada $a \in [\gamma]$, tal que um ramo de $\log f(z)$ pode ser definido. Usando o lema de Lebesgue existe um número positivo $\epsilon > 0$ tal que para todo $a \in [\gamma]$ pode-se definir um ramo de $\log f(z)$ em $B(a,\epsilon)$. Usando continuidade uniforme de γ (suponhamos que γ está definida em $[0,1]$) existe uma partição $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ tal que $\gamma(t) \in B(\gamma(t_{j-1},\epsilon)$ para $t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j$ e $1 \leqslant j \leqslant k$ (por quê ?). Seja ℓ_j o ramo de $\log f$ definida em $B(\gamma(t_{j-1}),\epsilon)$ para $1 \leqslant j \leqslant k$. Como tanto o j-ésimo disco quanto o $j+1$-ésimo disco contém $\gamma(t_j)$ podemos escolher $\ell_1,\ldots,\ell_k$ de forma que $l_1(\gamma(t_1)) = l_2(\gamma(t_1)), l_2(\gamma(t_2)) = l_3(\gamma(t_2)),\ldots,l_{k-1}(\gamma(t_{k-1})) = l_k(\gamma(t_{k-1}))$. Se γ_j é a restrição da curva γ ao intervalo $[t_{j-1},t_j]$ como $\ell_j = f'/f$, temos que

$$\int\limits_{\gamma_j} \frac{f'}{f} = \ell_j\left(\gamma(t_j)\right) - \ell_j\left(\gamma(t_{j-1})\right)$$

para $1 \leqslant j \leqslant k$. Somando ambos os lados desta equação obtém-se

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f'}{f} = \ell_k\left(\gamma(1)\right) - \ell_1\left(\gamma(0)\right).$$

Mas, γ é fechada, i.e $a := \gamma(1) = \gamma(0)$. Logo, $\ell_k(a) - \ell_1(a) = 2\pi i K$ onde K é um inteiro (já que são determinações do logaritmo). Isto conclui nossa interpretação de que quando z percorre γ, $\arg f(z)$ muda por $2\pi K$.

5) Mostre que o número de zeros de de $P(z) = z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 4$ no primeiro quadrante é zero. E no quarto quadrante ? Isto pode ser deduzido imediatamente do resultado no primeiro quadrante por *simetria* ?
   i) Mostre que em $\operatorname{Im} z = 0, 0 \leqslant \Re z \leqslant R$, a variação do argumento $\arg P(x)$, $x = \Re z$, é evidentemente nula já que $P(x) > 0$.

ii) Fazendo $z = R\mathrm{e}^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ e R grande tem-se que a variação do argumento é da ordem

$$\arg P(R\mathrm{e}^{i\theta}) = 2\pi + \delta$$

onde $\delta \to 0$, quando $R \longrightarrow \infty$.

ii) Analise a variação do argumento quando $x = 0$ e $0 < y < R$, analisando os zeros e o sinal das partes reais e imaginárias do polinômio $P(iy)$ no intervalo considerado. Conclua que a variação de $\arg P(iy)$ é $-2\pi + \delta_1$ onde $\delta_1 \to 0$ quando $R \longrightarrow \infty$. Finalmente, infira a nulidade da variação total do argumento ao longo de C, já que C é fechada e o argumento deve ser um inteiro.

6) Pela mesma técnica do exercício anterior mostre que as seguintes equações têm apenas um zero no primeiro quadrante:

$$z^3 - z^2 + 2 = 0, \qquad z^4 + z^2 = 2z - 6, \qquad z^4 + z^3 = 2z^2 - 2z - 4.$$

7) Mostre que $\mathrm{e}^z = -2z + 1$ tem exatamente um zero em $|z| < 1$. *Sugestão*: Considere $f(z) = -2z$, $\qquad g(z) = \mathrm{e}^z - 1 = \int_0^z \mathrm{e}^\zeta \, \mathrm{d}\zeta$. Mostre que pela última expressão obtém-se a estimativa: $|g(z)| \leqslant 2$, se $|z| \leqslant 1$. Aplique o teorema de Rouché.

8) Considere a equação $2z^5 + 8z - 1 = 0$.
   a) Mostre que a equação não tem zeros em $|z| > 2$, por um raciocíno elementar direto $(64 > 17)$. Confirme isto mostrando via o teorema de Rouché que existem 5 zeros em $|z| < 2$.
   b) Mostre que a equação tem exatamente um zero em $|z| < 1$ e que este zero é real e positivo.
   c) Mostre que a equação não tem zeros em $|z| = 1$; logo conclua que tem exatamente 4 zeros no anel $1 < |z| < 2$.

9) Considere a equação

$$f(z) = \mathrm{e}^{-z} + z = a$$

com $\Re\, a > 1$.
   a) Usando o princípio do argumento, nos moldes do exerc. 1) acima, mostre que a equação possui uma e apenas uma solução no semi-plano $\Re z > 0$.

b) Usando o teorema de Rouché, mostre que a equação tem apenas uma solução para $\Re z > 0$.

10) Deduza o teorema fundamental da álgebra aplicando o teorema de Rouché.

11) Suponha que $f(z)$ é analítica em um domínio contendo o disco unitário fechado centrado na origem. Se $|f(z)| < 1$ para $|z| = 1$, mostre que existe apenas um único z com $|z| < 1$ satisfazendo $f(z) = z$. Se $|f(z)| \leqslant 1$ para $|z| = 1$, o que você pode dizer ?

12) Suponha que a, b, c sejam números complexos tais que $|b| - |c| > |a| > 0$; mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ a equação
$$az^n + bz + c = 0$$
possui exatamente um zero em $|z| < 1$.

13) Mostre que para todo número complexo a e todo inteiro $n \geqslant 2$, a equação $az^n + z + 1 = 0$ possui ao menos um zero em $|z| \leqslant 2$. *Sugestão*: Mostre que se $|a| < 2^{-n}$ há exatamente um zero pelo teorema de Rouché. Se $|a| \geqslant 2^{-n}$, então o resultado é uma conseqüência do fato que $|z_1 \cdots z_n| = |1/a|$, onde as z_j são os zeros da equação , com multiplicidades. Por quê ?

14) Mostre que para λ real, $\lambda > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a equação $z^n e^{\lambda - z} = 1$, possui n zeros (contando as multiplicidades) em $|z| < 1$.

15) *Os zeros de um polinômio variam continuamente com os coeficientes do polinômio.* Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_k$ o conjuntos dos zeros do polinômio $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n,\ z_j$ sendo um zero de ordem m_j; seja $\rho = \min\limits_{i \neq j} |z_i - z_j|$. Mostre que para todo $\epsilon \in (0, \rho)$ existe um $\delta > 0$ tal que todo polinômio
$$q(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n$$
com $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |b_i - a_i| < \delta$ possui exatamente m_j zeros (contando as multiplicidades) no disco aberto $B(z_j, \epsilon),\ j = 1, 2, \ldots, k$. *Sugestão*: Sabe-se que
$$P(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_k)^{m_k}$$
Mostre que sobre o círculo de equação $|z - z_j| = \epsilon$, tem-se que $|P(z)| \geqslant \epsilon^{m_j} (\rho - \epsilon)^{n - m_j}$. Mostre que
$$|q(z) - P(z)| \leqslant \delta \sum_{t=0}^{n-1} |z|^t \leqslant \delta \sum_{t=0}^{n-1} (|z_j| + \epsilon)^t .$$

Logo considerando

$$0 < \delta < \min_{1 \leqslant j \leqslant k} \left\{ \frac{\epsilon^{m_j} (\rho - \epsilon)^{n-m_j}}{\sum_{t=0}^{n-1} (|z_j| + \epsilon)^t} \right\}$$

conclua o resultado, aplicando o teorema de Rouché.

16) Mostre que a equação $z(\mathrm{e}^z - 1) = w$ para $|w| < 1/6$ tem exatamente duas soluções na bola aberta de raio $R = 1/2$ centrada na origem. *Sugestão*: Mostre que se $|z| = r < 1$ então

$$|\,\mathrm{e}^z - 1| \geqslant r - \frac{r^2}{2-r}$$

17) Encontre o número de zeros do polinômio $p(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ contidos dentro da bola unitária aberta de raio 1 centrada na origem. Idem para o anel $\{1 < |z| < 2\}$. *Sugestão*: Mostre usando o algoritmo de Euclides que p e p' são primos entre si, concluindo que todas os zeros de p são simples.

18) Seja $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| < \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. Mostre que existe um único número complexo $z = f(w)$ tal que $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ com $z^3 + z = w$. Mostre que $f(w)$ é holomorfa e infira a seguinte fórmula

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z| = \frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{z(3z^2+1)}{z^3 + z - w}\, \mathrm{d}z$$

a) Escreva o desenvolvimento de Taylor de $f(w)$ em $w = 0$, explicitando os coeficientes do desenvolvimento e determinando o raio de convergência da série.

19) Sejam $a_1, \ldots, a_n$ e b números complexos de módulo inferior que 1, e sejam $k_1, \ldots, k_n$ números inteiros positivos. Mostre que a equação

$$\prod_1^n \left(\frac{z - a_j}{z\overline{a} - 1} \right)^{k_j} = b$$

possui $k := k_1 + \cdots + k_n$ soluções na bola unitária aberta de raio 1 centrada na origem.

20) Assumindo que $\tan z - z$ tem apenas zeros reais, calcule os resíduos da função

$$f(z) = \frac{\sin^2 z \tan^2 z}{z^2(\tan z - z)}.$$

21) Calcule

$$\int\limits_{|z|=7} \frac{z^7 \left(1 + e^{7\cos z}(1+\cos z)^7\right)^2 (\sin z + \cos z)}{(\sin z/3)^7 (\sin z - \cos z)} \, dz$$

22) Considere polinômio $f(z)$ dado por

$$f(z) := \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \cdots (-1)^{n+1} \frac{z^{2n}}{2n!}$$

Mostre que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant N$ então $f(z)$ tem exatamente um zero simples no disco $|z| < 2\pi$.