EXAME DE QUALIFICAÇÃO DE VARIÁVEIS COMPLEXAS 2002

prof. Ricardo Sá Earp *5 de março de 2002*

Questão 1 (2.5 pts):
Calcule

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\theta}{1 - 2a\sin\theta + a^2}\,\mathrm{d}\theta$$

onde $n = 1, 2, \ldots$ e $a \in \mathbb{R},\ |a| \neq 1$.

Questão 2 (2.5 pts):
Calcule os resíduos da função $f(z)$ definida por

$$f(z) = \frac{1}{(z^n - 1)^2}$$

Questão 3 (5.0 pts):
Responda às questões abaixo justificando *corretamente* a sua resposta:

i) É verdade que uma função meromorfa $f(z)$ definida numa vizinhança aberta do disco unitário $\mathcal{D} := \{|z| \leqslant 1\}$, tal que

$$|f(z)| = 1, \qquad \text{se} \quad |z| = 1$$

é um polinômio ?

ii) É verdade que existe uma aplicação holomorfa f do plano complexo $\mathbb{C}$ no semi-plano superior $\{z, \operatorname{Im} z > 0\}$, com derivada $f'(z) \neq 0$ para algum complexo z ?

iii) É verdade que se $f(z) = u(z) + iv(z);\ u(z), v(z) \in \mathbb{R},\ z \in \Omega$ é uma função holomorfa definida num domínio Ω de $\mathbb{C}$ satisfazendo

$$\varphi(u(z), v(z)) = 0, \qquad z \in \Omega$$

onde $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é uma função diferenciável, tal que $\varphi^{-1}(0)$ tem interior vazio; então f é constante ?

iv) É verdade que se g é uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ cujos pólos são os inteiros não negativos $\mathbb{N}$ com respectivos resíduos também sendo inteiros, então a função

$$f(z) = \exp\left(\int_\gamma g(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta\right)$$

onde γ é um caminho seccionalmente C^1 em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ ligando um ponto fixado $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ a um ponto $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$; está bem definida e é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$?

v) É verdade que uma aplicação holomorfa injetiva $f(z)$ definida num domínio $\Omega \subset \mathbb{C}$, pode ter derivada $f'(z) = 0$ em algum ponto $z \in \Omega$?