

TRABALHO FINAL DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

Professor Ricardo Sá Earp

Vamos agora apresentar os temas para o *trabalho final* do curso de *Variáveis Complexas*. Primeiramente, listaremos vários temas clássicos. Para tal sugerimos uma vasta bibliografia pertinente a cada tema. É importante frisar que cada tema contém uma ampla coletânea de tópicos (veja adiante). Obviamente, caso um *tema* seja escolhido pelo aluno, este não terá que discursar sobre *todos* os tópicos listados: o acervo exato de tópicos fixados para um determinado trabalho deverá ser escolhido pelo aluno com o aval do professor.

Temas clássicos

1. Superfícies mínimas. A representação de *Weierstrass* e exemplos clássicos. O teorema de *Bernstein*. A estrutura conforme das superfícies mínimas com curvatura total finita. O desenvolvimento assintótico para os *fins mergulhados* com curvatura total finita.

Referências:

1. J. Lucas Barbosa & A. Gervásio Colares. *Minimal surfaces in \mathbb{R}^3* . IMPA.
2. Celso Costa. *Funções elípticas, algébricas e superfícies mínimas*. IMPA.
3. David Hoffman & Hermann Karcher. *Complete embedded minimal surfaces of finite total curvature*. In: *Geometry V*, R. Osserman (Ed.), 5-93, Springer, 1997.
4. David Hoffman & William Meeks. *Minimal surfaces based on the catenoid*. In: *The American Mathematical Monthly*, vol. 97, N. 8, oct. 1990.
5. Robert Osserman. *A survey of minimal surfaces*. Dover, 1986.

2. Geometria Hiperbólica. Os modelos do semi-plano superior e do disco do plano hiperbólico \mathbb{H}^2 . As geodésicas de \mathbb{H}^2 . Descição das isometrias positivas de \mathbb{H}^2 . Geometria e trigonometria de \mathbb{H}^2 .

Referências:

1. Ricardo Sá Earp e Eric Toubiana. *Introduction à la Géométrie hyperbolique*

et aux surfaces de Riemann . Ed. Cassini, Paris (segunda edição). No prelo.

3. Função Zeta de Riemann. *Relação funcional de Riemann.* Polinômios de Bernoulli e a função Zeta de Riemann. Fórmula de Euler- Maclaurin. Prolongamento analítico de Zeta(s). O teorema dos números primos de Hadamard e Vallée Poussin. O produto de Euler de primos para Zeta(s). Zeros da função Zeta(s) e o problema do milênio sobre a hipótese de Riemann. (veja <http://www.aimath.org/WWN/rh/>)

Referências:

1. E. Bombieri. *Problems of the millennium: the Riemann hypothesis*.
2. Nicole Berline & Claude Sabbah. *La fonction zeta*. Les editions de l'École Polytechnique, 2003.
3. Joseph Bak & Donald J. Newman. *Complex Analysis*. Second edition, Springer, 1997.
4. Srishti D. Chatterji. *Cours D'Analyse 2*. Presses polytechniques et universitaires romandes, 1997.
5. J. Brian Conrey. *The Riemann hypothesis*. Notices of the AMS, volume 50, N. 3, pp. 341-353, março de 2003
6. John B. Conway. *Functions of one variable I*. Segunda edição, Springer, 1978.
7. Robert E. Greene & Steven G. Krantz. *Function theory of one complex variables*. John Wiles & Sons, 1997.
8. Peter Henrici. *Applied and computational complex analysis*. Volumes 1, 2. John Wiley & Sons, N. Y, 1988, 1991.
9. Serge Lang. *Complex analysis*. Quarta edição, 1999.
10. Georges Valiron. *Théorie des fonctions*. Terceira edição, Masson, 1966.

4. Fórmula de Schwarz- Christoffel. Mapeamento conforme do disco num polígono regular. Mapeamento conforme do semi-plano em regiões poligonais ilimitadas. Mapeamento conforme do semi-plano em triângulos hiperbólicos: derivada Schwarziana e triângulos de Schwarz . Aplicações ao problema de Dirichlet para funções harmônicas e em problemas da Mecânica dos Fluidos.

Referências:

1. Lars Ahlfors. *Complex analysis*. Segunda edição, McGraw-Hill, 1966.
2. Jean Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Segunda edição, Hermann, Paris, 1980

3. Tobin A. Driscoll & Lloyd N. Trefethen. *Schwarz- Christoffel mapping*. Cambridge monographs on applied and computational mathematics.
4. Stephen D. Fischer. *Complex variables*. Segunda edição, Dover, 1999.
5. Peter Henrici. *Applied and computational complex analysis*. Volume 1. John Wiley & Sons, N. Y, 1988.
6. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variable*. Volume II, Prentice-Hall, 1965.
7. Zeev Nehari. *Conformal mapping*. Dover, 1952.
8. Anthony D. Osborne. *Complex variables and their applications*. Addison-Wesley, 1999.
9. Georges Valiron. *Théorie des fonctions*. Terceira edição, Masson, 1966.

5. Lema de Schwarz: generalizações e aplicações. *Teorema de Schwarz- Pick*, aplicações à geometria hiperbólica. *Desigualdade de Jensen*. Lema de Schwarz para funções com parte real positiva e estimativas dos coeficientes da série normalizada. Funções limitadas no disco: *condição de Blaschke*. *Fórmula de Jensen*. *Teorema de Study*. *Princípio de subordinação* (princípio de Lindelöf) e aplicações em estimativas. *O teorema de subordinação de Littlewood*. *Teorema (e lema) de Rogosinski*. *Lema de Bernstein*. *Lema de Dieudonné*. Lema de Schwarz e transformações de Markov em dinâmica complexa. Lema de Schwarz, teorema de Montel e recobrimento do plano complexo menos dois pontos: Lema de distorção de Koebe (aplicação).

Referências:

1. Lars Ahlfors. *Complex analysis*. Segunda edição, McGraw-Hill, 1966.
2. Lars Ahlfors. *Conformal invariants: topics in geometric function theory*. McGraw-Hill, 1973.
3. Peter Duren. *Univalent functions*. Springer, 1983.
4. Robert E. Greene & Steven G. Krantz. *Function theory of one complex variables*. John Wiles & Sons, 1997.
5. John Milnor. *Dynamics in complex variables*. Segunda edição, Vieweg, 2000.
6. Zeev Nehari. *Conformal mapping*. Dover, 1952.
7. Reinhold Remmert. *Theory of complex functions*. Readings in mathematics, Springer, 1991.
8. Reinhold Remmert. *Classical topics in function theory*. Springer 1998.
9. Ricardo Sá Earp & Eric Toubiana. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*. Diderot 1997. Segunda edição Cassini, Paris (no

prelo).

10. Welington de Melo. *Ferramentas matemáticas em dinâmica unidimensional*. Matemática universitária, **29**, dezembro de 2000, 75-113.

6. Grande teorema de Picard. Funções modulares, teorema de Montel para funções meromorfas e o grande teorema de Picard. Estimativas da métrica hiperbólica, teorema de Landau, teorema de Schottky e o grande teorema de Picard.

Referências:

1. Lars Ahlfors. *Complex analysis*. Segunda edição, McGraw-Hill, 1966.
2. John B. Conway. *Functions of one variable I*. Segunda edição, Springer, 1978.
3. W. K. Hayman. *Meromorphic functions*. Oxford University Press, 1964.
4. Einar Hille. *Analytic function theory*. Volume 2, Chelsea, 1962.
5. Raghavan Narasimhan & Yves Nievergelt. *Complex Analysis in one variable*. Birkhäuser, 2001.
6. Ricardo Sá Earp & Eric Toubiana. *Introduction à la géométrie hyperbolique et aux surfaces de Riemann*. Diderot 1997. Segunda edição Cassini, Paris (no prelo)
7. Zeev Nehari. *Conformal mapping*. Dover, 1952.
8. Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 1987.

7. Funções elípticas. A teoria de Weierstrass. A função P de Weierstrass. As funções de Jacobi. As funções elípticas de Jacobi: $sn z$, $cn z$, $dn z$. Aplicações em mapeamentos conformes: Mapeamento de um retângulo, interior de uma elipse. Integrais completas elípticas e séries hipergeométricas. Funções elípticas de Jacobi e equações de Korteweg & de Vries (equações Kdv).

Referências:

1. Lars Ahlfors. *Complex analysis*. Segunda edição, McGraw-Hill, 1966.
2. Jean Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Segunda edição, Hermann, Paris, 1980
3. P. G. Drazin & R. S. Johnson. *Solitons: an introduction*. Cambridge University Press, 1996.
4. Peter Henrici. *Applied and computational complex analysis*. Volumes 1, 2. John Wiley & Sons, N. Y, 1988, 1991.
5. Einar Hille. *Analytic function theory*. Volume 2, Chelsea, 1962.
6. Serge Lang. *Complex analysis*. Quarta edição, 1999.
7. Zeev Nehari. *Conformal mapping*. Dover, 1952.

8. Anthony D. Osborne. *Complex variables and their applications*. Addison-Wesley, 1999.
9. Reinhold Remmert. *Classical topics in function theory*. Springer 1998.
10. G. Sansone & J. Gerretsen. *Lectures on the theory of function of a complex variable*. Noordhoff-Groningen, 1960.
11. Georges Valiron. *Théorie des fonctions*. Terceira edição, Masson, 1966.

8. Transformação de Laplace complexa. Teorema abeliano.

Comportamento no infinito. Existência da inversa. Aplicações na soluções de equações diferenciais ordinárias. Teorema de Hardy. Fórmula da Transformada inversa. A expansão de Heaviside. A fórmula real da inversa. A equação integral de Carleman. Aplicações em problemas de condução do calor e de problemas de mecânica ondulatória.

Referências:

1. Joseph Bak & Donald J. Newman. *Complex Analysis*. Second edition, Springer, 1997.
2. Ruel V. Churchill. *Operational mathematics*. Terceira edição. McGraw-Hill, 1972.
3. Stephen D. Fischer. *Complex variables*. Segunda edição, Dover, 1999.
4. Peter Henrici. *Applied and computational complex analysis*. Volumes 1, 2, 3. John Wiley & Sons, N. Y, 1988, 1991, 1993.
5. Serge Lang. *Complex analysis*. Quarta edição, 1999.
6. Anthony D. Osborne. *Complex variables and their applications*. Addison-Wesley, 1999.
7. A. D. Wunsch. *Complex variables with applications*. Second edition, Addison-Wesley, 1994.
8. Laurent Schwartz. *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques*. Segunda edição, Hermann, 1987.

9. Desenvolvimento assintótico. Teorema de Ritt: teorema de É. Borel (aplicação). O lema de Watson-Doetsch. Fórmula de Stirling. Método de *steepest descent*.

Referências:

1. Jean Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Segunda edição, Hermann, Paris, 1980
2. Peter Henrici. *Applied and computational complex analysis*. Volumes 1, 2. John Wiley & Sons, N. Y, 1988, 1991.
3. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variable*. Volume II, Prentice-Hall, 1965.

4. Anthony D. Osborne. *Complex variables and their applications*. Addison-Wesley, 1999.
5. Reinhold Remmert. *Theory of complex functions*. Readings in mathematics, Springer, 1991.
6. A. D. Wunsch. *Complex variables with applications*. Second edition, Addison-Wesley, 1994.

10. Equações singulares regulares. Método de Frobenius. Equação de Bessel. Zeros das funções de Bessel. Equação de Legendre. Equação hipergeométrica. Equação hipergeométrica confluyente. Equação de Kummer. Soluções na forma integral: equação de Laguerre, equação de Hermite. Fórmula de Schäfli (polinômios de Legendre). Fórmula de Euler para a função hipergeométrica. Aplicações na Física.

Referências:

1. Jean Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Segunda edição, Hermann, Paris, 1980
2. Peter Henrici. *Applied and computational complex analysis*. Volumes 1, 2. John Wiley & Sons, N. Y, 1988, 1991.
3. Ruel V. Churchill. *Fourier series and boundary value problems*. McGraw-Hill, 1963.
4. Anthony D. Osborne. *Complex variables and their applications*. Addison-Wesley, 1999.
5. G. Sansone & J. Gerretsen. *Lectures on the theory of function of a complex variable*. Volume I, Noordhoff-Groningen, 1960.
6. Wolfgang Walter. *Ordinary differential equations*. Readings in mathematics, Springer, 1998.
7. A. D. Wunsch. *Complex variables with applications*. Second edition, Addison-Wesley, 1994.

11. Teorema de Runge. *Teorema de Runge* em conjuntos compactos. *Teorema de aproximação de Runge* em domínios. *Pares de domínios de Runge*. Regiões de Runge, homologia e simplesconexidade. Discussão da fórmula integral de Cauchy em conjuntos compactos. Aplicações do teorema de Runge para construir seqüências de funções holomorfas (polinômios) com certas propriedades analíticas. *O teorema de Mittag-Leffler* como uma aplicação do teorema de Runge. Um *teorema de Weierstrass* sobre construção de funções meromorfas com zeros pré-determinados (aplicação): Produtos de Weierstrass. Ideais de funções holomorfas: *Teorema de Bers*. Lema de Wedderburn. Mergulho holomorfo do disco unitário em \mathbb{C}^3 (Remmert).

Aplicação do teorema de Runge na teoria das superfícies mínimas de \mathbb{R}^3 .

Referências:

1. John B. Conway. *Functions of one variable I*. Segunda edição, Springer, 1978.
- 2 Robert E. Greene & Steven G. Krantz. *Function theory of one complex variables*. John Wiles & Sons, 1997.
3. Kenneth Hoffman. *Banach Spaces of Analytic functions*. Prentice-Hall, 1962.
4. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variable*. Volume II, Prentice-Hall, 1965.
5. Raghavan Narasimhan & Yves Nievergelt. *Complex Analysis in one variable*. Birkäuser, 2001.
6. Reinhold Remmert. *Classical topics in function theory*. Springer 1998.
7. . Walter Rudin. *Real and complex analysis*. McGraw-Hill, 1987.
8. Eric Toubiana. *Thèse de doctorat*. Paris, 1988.

12. Funções univalentes. *Teorema da área de Gronwall*. Teorema 1/4 de Koebe. *Teorema de distorção de Koebe*. Funções *schlicht* com coeficientes reais. Funções *schlicht* com imagem estrelada: funções convexas e o *teorema de Alexander*, caso particular da conjectura de Bieberbach, teorema de Noshiro-Warschawski. Teoremas de crescimento. Exponenciação das desigualdades de Grunsky: crescimento radial, *teorema de regularidade de Hayman*, *teorema tauberiano de Milin*. Funções univalentes limitadas. O *critério de univalência de Nehari*. Comportamento no bordo das transformações conformes.

Referências:

1. Lars Ahlfors. *Conformal invariants: topics in geometric function theory*. McGraw-Hill, 1973.
2. Peter. L. Duren. *Univalent functions*. Springer, 1983.
3. Robert E. Greene & Steven G. Krantz. *Function theory of one complex variables*. John Wiles & Sons, 1997.
4. Peter Henrici. *Applied and computational complex analysis*. Volume 3. John Wiley & Sons, N. Y, 1993.
5. Einar Hille. *Analytic function theory*. Volume 2, Chelsea, 1962.
6. O. Lehto. *Univalent functions and Teichmüller spaces*. Springer, 1987.
7. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variable*. Volume II, Prentice-Hall, 1965.
8. Zeev Nehari. *Conformal mapping*. Dover, 1952.

9. Christian Pommerenke. *Boundary behaviour of conformal maps*. Springer, 1992.

13. Funções inteiras. Crescimento de uma função inteira. Teoremas de Liouville para $\operatorname{Re} f$: *Teorema de Borel Carathéodory*. Ordem e genus de uma função inteira. Ordem e tipo em função da série de Taylor. Distribuição dos zeros e ordem de uma função inteira. *O teorema de fatoração de Hadamard e o teorema de Borel*.

1. Joseph Bak & Donald J. Newman. *Complex Analysis*. Second edition, Springer, 1997.
2. John B. Conway. *Functions of one variable I*. Segunda edição, Springer, 1978.
3. Robert E. Greene & Steven G. Krantz. *Function theory of one complex variables*. John Wiles & Sons, 1997.
4. Einar Hille. *Analytic function theory*. Volume 2, Chelsea, 1962.
5. Serge Lang. *Complex analysis*. Quarta edição, 1999.
6. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variable*. Volume II, Prentice-Hall, 1965.

14. Dinâmica complexa: iterações de funções racionais.

Conjuntos de Fatou e conjuntos de Julia: Dinâmica na esfera de Riemann. Dinâmica em superfícies hiperbólicas. Dinâmica em superfícies Euclidianas.

Referências:

1. Alan F. Beardon. *Iteration of rational functions*. Springer, 1991.
2. John Milnor. *Dynamics in complex variables*. Segunda edição, Vieweg, 2000
3. Wellington de Melo. *Ferramentas matemáticas em dinâmica unidimensional*. Matemática universitária, **29**, dezembro de 2000, 75-113.

15. Funções de várias variáveis complexas. O princípio da continuação analítica. O teorema da aplicação aberta. As desigualdades de Cauchy. O teorema de convergência de Weierstrass. O teorema de Vitali. O *teorema de extensão de Hartog*. Não existência de equivalência conforme entre certos domínios simplesmente conexos. Aplicações holomorfas e variedades complexas. O teorema da função implícita e o teorema da função inversa. Domínios de holomorfia. *O teorema de preparação de Weierstrass*. *Variedades de Kähler*.

Referências:

1. Robert C. Gunning & Hugo Rossi. *Analytic functions of several complex*

variables. Printice Hall, 1965.

2. Klaus Fritzsche & Hans Grauert. *From Holomorphic functions to complex manifolds*. Springer, 2002.

3. Raghavan Narasimhan & Yves Nievergelt. *Complex Analysis in one variable*. Birkäuser, 2001.

4. A. I. Markushevich. *Theory of functions of a complex variable*. Volume II, Prentice-Hall, 1965.