Variáveis Complexas 2009–Lista 1

Professor: Ricardo Sá Earp

NÚMEROS COMPLEXOS E GEOMETRIA DE $\mathbb{C}$

1) Coloque sobre a forma $x + iy$ as seguintes expressões

   a) $\dfrac{(-1/2 + i\sqrt{3}/2)^4}{3 - 2i}$.

   b) $(1 + i)^n + (1 - i)^n, n \in \mathbb{N}$.

2) Resolva as equações

   a) $z^3 = -1$.

   b) $z^2 + \sqrt{32}iz - 6i = 0$.

3) Determine o conjunto

$$E = \Big\{z; z = c + \rho\Big(\frac{1 + it}{1 - it}\Big), t \in \mathbb{R}\Big\}.$$

   $c \in \mathbb{C}, \rho > 0$.

4) Seja $f(z) = \dfrac{z - a}{z\bar{a} - 1}$, $|a| < 1$. Mostre que $|f(z)| < 1$ se $|z| < 1$ e $|f(z)| = 1$ se $|z| = 1$.

Pesquisa opcional: Diga tudo o que você poderá descobrir sobre a função $z \mapsto f(z)$.

5)

   a) Mostre que se $w^n = 1, w \neq 1, n \geqslant 2$ então

$$1 + w + \cdots + w^{n-1} = 0.$$

   b) Seja $w = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Mostre que para $h \neq kn, k \in \mathbb{Z}$, tem-se que

$$1 + w^h + \cdots + w^{(n-1)h} = 0.$$

   Além disto verifique que

$$1 + z + \cdots + z^{n-1} = (z - w)(z - w^2) \cdots (z - w^{n-1}).$$

6) Considere $\mathcal{L}$ a reta em $\mathbb{C}$ determinada pelo número complexo a e pelo vetor diretor $b \in \mathbb{C}, b \neq 0$. Determine os seguintes conjuntos

a) $\left\{z; \mathrm{Im}\left(\dfrac{z-a}{b}\right) = 0\right\}$

b) $\left\{z; \mathrm{Im}\left(\dfrac{z-a}{b}\right) > 0\right\}$

c) $\left\{z; \mathrm{Im}\left(\dfrac{z-a}{b}\right) \geqslant 0\right\}$

7) Mostre que a equação geral de uma reta ou círculo no plano complexo é da forma

$$\alpha z\bar{z} + \bar{\beta} z + \beta \bar{z} + \gamma = 0$$

onde $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}, |\beta|^2 > \alpha\gamma$.

a) Dê condições sobre α para que a equação represente ou bem uma reta ou bem um círculo. No caso do círculo calcule o seu centro e o seu raio, em função dos parâmetros α, β, γ.

8) Demonstrar que a equação do círculo passando por três pontos não colineares a, b, c é dada por

$$\begin{vmatrix} |z|^2 & z & \bar{z} & 1 \\ |a|^2 & a & \bar{a} & 1 \\ |b|^2 & b & \dot{b} & 1 \\ |c|^2 & c & \dot{c} & 1 \end{vmatrix} = 0$$

9) Mostre que

$$A|\alpha|^2 + B\alpha\bar{\beta} + \bar{B}\bar{\alpha}\beta + C|\beta|^2 \geqslant 0$$

para toda escolha de $\alpha, \beta \in \mathbb{C} \Leftrightarrow$

$$A \geqslant 0, \quad C \geqslant 0, \quad |B|^2 \leqslant AC$$

.

10) Utilize o exercício anterior e o fato que $\sum_{k=1}^{n} |\alpha a_k + \beta \dot{b_k}|^2 \geqslant 0$, para $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ para estabelecer a desigualdade de Schwarz:

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2.$$

11) Considere a série

$$\frac{1}{1-z} + \frac{z}{z^2-1} + \frac{z^2}{z^4-1} + \frac{z^8}{z^{16}-1} + \cdots$$

Deduza que a série converge a uma função $F(z)$ em $\mathbb{C} \setminus \{|z| = 1\}$, calculando tal função.