Variáveis Complexas 2009–Lista 10

Professor: Ricardo Sá Earp

DESENVOLVIMENTO DE LAURENT E RESÍDUOS

- $\dfrac{1}{(z-a)(z-b)}$, para $0 < |a| < |z| < |b|$.

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{a-b}\left[\cdots + \frac{a^2}{z^3} + \frac{a}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{b} + \frac{z}{b^2} + \frac{z^2}{b^3} + \cdots\right]$$

A mesma função para $|z| > b$.

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \frac{1}{b-a}\left[\frac{b-a}{z^2} + \frac{b^2-a^2}{z^3} + \frac{b^3-a^3}{z^4} + \cdots\right]$$

•• $e^{\frac{1}{z-1}}$ para $|z| > 1$. Escreva (fazendo $\dfrac{1}{z} = z^{'}$)

$$e^{\frac{1}{z-1}} = e^{\frac{z^{'}}{1-z^{'}}} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{'} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{z^n}$$

onde

$$c_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{\binom{n-1}{k-1}}{k!}$$

••• $\sqrt{(z-1)(z-2)}$, para $|z| > 2$. Onde o ramo da raiz quadrada está escolhido de forma que seja positivo para $z = x$ real $x > 2$. Note que usando o desenvolvimento binomial de Abel

$$\left[c_0 z - c_1 + \frac{c_2}{z} - \frac{c_3}{z^2} + \cdots\right],$$

Onde (colocando $\alpha = 1/2$)

$$c_n = \binom{\alpha}{n} + 2\binom{\alpha}{n-1}\binom{\alpha}{1} + 2^2\binom{\alpha}{n-2}\binom{\alpha}{2} + \cdots + 2^n\binom{\alpha}{n}.$$

1) Expanda as funções abaixo em suas séries de Laurent, justificando todos os passos.

   a) $\dfrac{e^z}{(1-z)}$, para $|z| < 1$. *Sugestão*: Seja $\sum_{n\geqslant 0} a_n z^n$ o desenvolvimento de Laurent (Taylor) da função dada (por quê ?). Use a fórmula de multiplicação de séries para calcular a_n mostre que

$$a_n = \left(1 + \cdots + \frac{1}{n!}\right), \qquad n \geqslant 1,\ a_0 = 1$$

   b) $\dfrac{1}{z^2+1}$, para $0 < |z-i| < 2$. *Resp.*

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{-i/2}{(z-i)} + \sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{4}\left(\frac{i}{2}\right)^n (z-i)^n$$

   c) Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\, e^{1/z}$$

      i) Escreva o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ em $\{|z| > 1\}$, justificando cada passo de seus cálculos. Encontre o resíduo de $f(z)$ no ∞.

      ii) Idem para o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no anel $\{0 < |z| < 1\}$.

   d) Para cada uma das funções $f(z)$ dada nos itens *a*) a *c*) acima calcule

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{(z-a)^n}\, dz$$

   onde a é uma singularidade isolada de $f(z)$ e γ é uma curva simples fechada envolvendo tal singularidade de $f(z)$ (e não envolvendo outra singularidade de $f(z)$)

2)

   a) Seja $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}$. Justifique o fato que f é uma função meromorfa e que tem polo duplo em $z = i$. Escreva o desenvolvimento de Laurent de f numa vizinhança de $z = i$. Mostre que $\mathrm{Res(f, i)} = \dfrac{-3}{4e}$.

b) Calcule

$$\int\limits_{|z-i|=1/2} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}\, dz$$

c) Calcule

$$\int\limits_{|z|=1/2} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)^2}\, dz$$

d) Calcule os resíduos de $f(z) = \dfrac{1}{z^6+1}$ em cada um de seus polos.

3) Seja $\lambda \in \mathbb{C}$ e mostre que

$$\exp\left\{\frac{1}{2}\lambda\left(z+\frac{1}{z}\right)\right\} = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \left(z^n + \frac{1}{z^n}\right)$$

para $0 < |z| < \infty$, onde para $n \geqslant 0$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi} e^{\lambda\cos t}\cos nt\, dt.$$

4)

a) Encontre os desenvolvimentos de Laurent e os resíduos das funções abaixo, numa vizinhança perfurada de cada singularidade.

i) $f(z) = \dfrac{1}{1-\cos z}$.

ii) $= \dfrac{2+3z}{1-e^z}$.

iii) $\dfrac{z-1}{z^5-1}$.

iv) $\dfrac{e^{iaz}}{4+z^2}$.

v) (neste exemplo restrinja-se às singularidades contidas no semi-plano superior)

$$\frac{\left(\log z - \log 2 - \dfrac{i\pi}{2}\right)^2}{4+z^2}$$

onde o ramo do logaritmo está tomado retirando-se o semi-eixo imaginário negativo, com o argumento variando entre $-\pi/2$ e $3\pi/2$.

vi) (neste exemplo restrinja-se às singularidades contidas no semi-plano superior)

$$\frac{\log z - \log 2 - i\pi/2}{(z^2+4)^2}$$

onde tomamos o mesmo ramo do exemplo anterior.

b) Para cada um dos exemplos dado nos itens *i*) a *vi*) do item *a*) acima, calcule

$$\int_\gamma \frac{f(z)}{z^{2003}}\,\mathrm{d}z$$

onde γ é uma curva simples fechada positivamente orientada, em torno de uma singularidade de $f(z)$, sem passar por uma singularidade de $f(z)$, com γ bordando um domínio Ω, de maneira que $\overline{\Omega}$ contém apenas uma única singularidade de $f(z)$.

c)

i) Calcule

$$\int\limits_{|z|=1} \frac{\log(z+1)}{z^n}\,\mathrm{d}z, \quad n \geqslant 1$$

ii) Deduza da fórmula acima uma fórmula para o cálculo de certas integrais reais.

5) Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{1-z}\,\mathrm{e}^{1/z}$$

a) Obtenha o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no anel $|z| > 1$.

b) Obtenha o desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ no anel $0 < |z| < 1$. Calcule o resíduo, e em seguida avalie a integral

$$\int\limits_{|z|=1/2} \frac{f(z)}{z^{2003}}\,\mathrm{d}z$$

6) Escreva o desenvolvimento de Laurent de

$$f(z) = \mathrm{e}^{1/(z-1)}$$

para $|z| > 1$. Em seguida calcule

$$\int_{|z|=11^{10^{10}}} \frac{\mathrm{e}^{1/(z-1)}}{z^{11}}\,\mathrm{d}z$$

Idem para

$$\int_{|z|=11^{10^{10}}} \mathrm{e}^{1/(z-1)}\, z^9\,\mathrm{d}z$$

7) Escreva o desenvolvimento de Laurent de

$$f(z) = \left(\log \frac{z}{z-1}\right)^2$$

para $|z| > 1$. Em seguida calcule

$$\int\limits_{|z|=2} \left(\log \frac{z}{z-1}\right)^2 \mathrm{d}z$$

8) Sejam f e g funções holomorfas ao redor de c com $g(c) = g'(c) = 0$ e $g''(c) \neq 0$. Escreva o resíduo do quociente $\dfrac{f}{g}$ em termo de $f(c), f'(c), g'(c), g''(c)$ e de $g'''(c)$.
9) Calcule o resíduo da função $e^{z+z^{-1}}$ em $z = 0$.
10) Considere $f(z) = \dfrac{\sin z}{z^4(z^2+2)}$.
   a) Escreva os 5 primeiros termos do desenvolvimento de Laurent de $f(z)$ na origem.
   b) Calcule

$$\int\limits_{|\zeta|=1/2} \frac{\sin z}{z^4(z^2+2)}\, d\zeta$$

Seja f uma função meromorfa em um aberto A. Seja γ uma curva fechada C^1 por partes que não passa pelos zeros ou polos de f. O princípio do argumento sugere que fazendo z percorrer γ, $\log f(z)$ muda por um múltiplo de $2\pi i K$, onde K é um inteiro que mede o "número de voltas"que a imagem de γ faz em torno da origem, ou equivalentemente, $2\pi K$ mede a "variação' de $\arg f(z)$ quando z percorre γ. A dificuldade com este raciocínio é que não se pode definir sempre $\log f(z)$ (

caso isto seja possıvel $\int_\gamma f'/f = 0$). Mas, esta discussão pode ser colocada em bases rigorosas da seguinte maneira:

Como nenhum zero ou polo de f está em γ existe um disco aberto $B(a,r)$ para cada $a \in [\gamma]$, tal que um ramo de $\log f(z)$ pode ser definido. Usando o lema de Lebesgue existe um número positivo $\epsilon > 0$ tal que para todo $a \in [\gamma]$ pode-se definir um ramo de $\log f(z)$ em $B(a,\epsilon)$. Usando continuidade uniforme de γ (suponhamos que γ está definida em $[0,1]$) existe uma partição $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ tal que $\gamma(t) \in B(\gamma(t_{j-1}, \epsilon)$ para $t_{j-1} \leqslant t \leqslant t_j$ e $1 \leqslant j \leqslant k$ (por quê ?). Seja ℓ_j o ramo de $\log f$ definida em $B(\gamma(t_{j-1}),\epsilon)$ para $1 \leqslant j \leqslant k$. Como tanto o j-ésimo disco quanto o $j+1$-ésimo disco contém $\gamma(t_j)$ podemos escolher $\ell_1,\ldots,\ell_k$ de forma que $l_1(\gamma(t_1)) = l_2(\gamma(t_1)), l_2(\gamma(t_2)) = l_3(\gamma(t_2)),\ldots, l_{k-1}(\gamma(t_{k-1})) = l_k(\gamma(t_{k-1}))$. Se γ_j é a restrição da curva γ ao intervalo $[t_{j-1}, t_j]$ como $\ell_j = f'/f$, temos que

$$\int\limits_{\gamma_j} \frac{f'}{f} = \ell_j\left(\gamma(t_j)\right) - \ell_j\left(\gamma(t_{j-1})\right)$$

para $1 \leqslant j \leqslant k$. Somando ambos os lados desta equação obtém-se

$$\int\limits_{\gamma} \frac{f'}{f} = \ell_k\left(\gamma(1)\right) - \ell_1\left(\gamma(0)\right).$$

Mas, γ é fechada, i.e $a := \gamma(1) = \gamma(0)$. Logo, $\ell_k(a) - \ell_1(a) = 2\pi i K$ onde K é um inteiro (já que são determinações do logaritmo). Isto conclui nossa interpretação de que quando z percorre γ, $\arg f(z)$ muda por $2\pi K$.

11) Mostre que o número de zeros de de $P(z) = z^4 + z^3 + 5z^2 + 2z + 4$ no primeiro quadrante é zero. E no quarto quadrante ? Isto pode ser deduzido imediatamente do resultado no primeiro quadrante por *simetria* ?
    i) Mostre que em $\operatorname{Im} z = 0, 0 \leqslant \Re z \leqslant R$, a variação do argumento $\arg P(x)$, $x = \Re z$, é evidentemente nula já que $P(x) > 0$.
    ii) Fazendo $z = R\mathrm{e}^{i\theta}$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/2$ e R grande tem-se que a variação do argumento é da ordem

$$\arg P(R\mathrm{e}^{i\theta}) = 2\pi + \delta$$

onde $\delta \to 0$, quando $R \longrightarrow \infty$.

ii) Analise a variação do argumento quando $x = 0$ e $0 < y < R$, analisando os zeros e o sinal das partes reais e imaginárias do polinômio $P(iy)$ no intervalo considerado. Conclua que a variação de $\arg P(iy)$ é $-2\pi + \delta_1$ onde $\delta_1 \to 0$ quando $R \longrightarrow \infty$. Finalmente, infira a nulidade da variação total do argumento ao longo de C, já que C é fechada e o argumento deve ser um inteiro.

12) Pela mesma técnica do exercício anterior mostre que as seguintes equações têm apenas um zero no primeiro quadrante:

$$z^3 - z^2 + 2 = 0, \qquad z^4 + z^2 = 2z - 6, \qquad z^4 + z^3 = 2z^2 - 2z - 4.$$

13) Mostre que $\mathrm{e}^z = -2z + 1$ tem exatamente um zero em $|z| < 1$. *Sugestão*: Considere $f(z) = -2z$, $\quad g(z) = \mathrm{e}^z - 1 = \int_0^z \mathrm{e}^\zeta \, \mathrm{d}\zeta$. Mostre que pela última expressão obtém-se a estimativa: $|g(z)| \leqslant 2$, se $|z| \leqslant 1$. Aplique o teorema de Rouché.

14) Considere a equação $2z^5 + 8z - 1 = 0$.
   a) Mostre que a equação não tem zeros em $|z| > 2$, por um raciocíno elementar direto $(64 > 17)$. Confirme isto mostrando via o teorema de Rouché que existem 5 zeros em $|z| < 2$.
   b) Mostre que a equação tem exatamente um zero em $|z| < 1$ e que este zero é real e positivo.
   c) Mostre que a equação não tem zeros em $|z| = 1$; logo conclua que tem exatamente 4 zeros no anel $1 < |z| < 2$.

15) Considere a equação
$$f(z) = \mathrm{e}^{-z} + z = a$$
com $\Re a > 1$.
   a) Usando o princípio do argumento, nos moldes do exerc. 1) acima, mostre que a equação possui uma e apenas uma solução no semi-plano $\Re z > 0$.
   b) Usando o teorema de Rouché, mostre que a equação tem apenas uma solução para $\Re z > 0$.

16) Deduza o teorema fundamental da álgebra aplicando o teorema de Rouché.

17) Suponha que $f(z)$ é analítica em um domínio contendo o disco unitário fechado centrado na origem. Se $|f(z)| < 1$ para $|z| = 1$, mostre que existe apenas um

único z com $|z| < 1$ satisfazendo $f(z) = z$. Se $|f(z)| \leqslant 1$ para $|z| = 1$, o que você pode dizer ?

18) Suponha que a, b, c sejam números complexos tais que $|b| - |c| > |a| > 0$; mostre que para todo $n \in \mathbb{N}$ a equação
$$az^n + bz + c = 0$$
possui exatamente um zero em $|z| < 1$.

19) Mostre que para todo número complexo a e todo inteiro $n \geqslant 2$, a equação $az^n + z + 1 = 0$ possui ao menos um zero em $|z| \leqslant 2$. *Sugestão*: Mostre que se $|a| < 2^{-n}$ há exatamente um zero pelo teorema de Rouché. Se $|a| \geqslant 2^{-n}$, então o resultado é uma conseqüência do fato que $|z_1 \cdots z_n| = |1/a|$, onde as z_j são os zeros da equação , com multiplicidades. Por quê ?

20) Mostre que para λ real, $\lambda > 1$ e $n \in \mathbb{N}$, a equação $z^n \mathrm{e}^{\lambda - z} = 1$, possui n zeros (contando as multiplicidades) em $|z| < 1$.

21) *Os zeros de um polinômio variam continuamente com os coeficientes do polinômio.* Sejam $z_1, z_2, \ldots, z_k$ o conjuntos dos zeros do polinômio $P(z) = z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n,\ z_j$ sendo um zero de ordem m_j; seja $\rho = \min\limits_{i \neq j} |z_i - z_j|$. Mostre que para todo $\epsilon \in (0, \rho)$ existe um $\delta > 0$ tal que todo polinômio
$$q(z) = z^n + b_1 z^{n-1} + \cdots + b_n$$
com $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} |b_i - a_i| < \delta$ possui exatamente m_j zeros (contando as multiplicidades) no disco aberto $B(z_j, \epsilon),\ j = 1, 2, \ldots, k$. *Sugestão*: Sabe-se que
$$P(z) = (z - z_1)^{m_1} \cdots (z - z_k)^{m_k}$$
Mostre que sobre o círculo de equação $|z - z_j| = \epsilon$, tem-se que $|P(z)| \geqslant \epsilon^{m_j} (\rho - \epsilon)^{n - m_j}$. Mostre que
$$|q(z) - P(z)| \leqslant \delta \sum_{t=0}^{n-1} |z|^t \leqslant \delta \sum_{t=0}^{n-1} \left(|z_j| + \epsilon\right)^t .$$
Logo considerando
$$0 < \delta < \min_{1 \leqslant j \leqslant k} \left\{ \frac{\epsilon^{m_j} (\rho - \epsilon)^{n - m_j}}{\sum\limits_{t=0}^{n-1} \left(|z_j| + \epsilon\right)^t} \right\}$$

conclua o resultado, aplicando o teorema de Rouché.

22) Mostre que a equação $z(\mathrm{e}^z - 1) = w$ para $|w| < 1/6$ tem exatamente duas soluções na bola aberta de raio $R = 1/2$ centrada na origem. *Sugestão*: Mostre que se $|z| = r < 1$ então

$$|\,\mathrm{e}^z - 1| \geqslant r - \frac{r^2}{2-r}$$

23) Encontre o número de zeros do polinômio $p(z) = z^7 - 5z^3 + 12$ contidos dentro da bola unitária aberta de raio 1 centrada na origem. Idem para o anel $\{1 < |z| < 2\}$. *Sugestão*: Mostre usando o algoritmo de Euclides que p e p' são primos entre si, concluindo que todas os zeros de p são simples.

24) Seja $w \in \mathbb{C}$ tal que $|w| < \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$. Mostre que existe um único número complexo $z = f(w)$ tal que $|z| < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ com $z^3 + z = w$.

   a) Mostre que $f(w)$ é holomorfa e infira a seguinte fórmula

$$f(w) = \frac{1}{2\pi i}\int_{|z|=\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{z(3z^2+1)}{z^3+z-w}\,\mathrm{d}z$$

   b) Escreva o desenvolvimento de Taylor de $f(w)$ em $w = 0$, explicitando os coeficientes do desenvolvimento e determinando o raio de convergência da série.

25) Sejam $a_1, \ldots, a_n$ e b números complexos de módulo inferior que 1, e sejam $k_1, \ldots, k_n$ números inteiros positivos. Mostre que a equação

$$\prod_{1}^{n}\left(\frac{z-a_j}{z\overline{a}-1}\right)^{k_j} = b$$

possui $k := k_1 + \cdots + k_n$ soluções na bola unitária aberta de raio 1 centrada na origem.

26) Considere polinômio $f(z)$ dado por

$$f(z) := \frac{z^2}{2!} - \frac{z^4}{4!} + \cdots (-1)^{n+1}\frac{z^{2n}}{2n!}$$

Seja $0 < a < 2\pi$. Mostre que existe $N \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geqslant N$ então $f(z)$ tem exatamente dois zeros (com multiplicidades) no disco $|z| < a < 2\pi$.

27) Dizemos que uma função $f(z)$ definida no anel $|z| > r,\ r > 0$ é "holomorfa no infinito"se, fazendo uma mudança de variáveis $z = 1/z^{'}$ a função se expressa como uma função holomorfa em $z^{'}$ para $|z^{'}| < 1/r$. Da mesma maneira uma função $f(z)$ será *meromorfa no infinito* se esta pode se expressar como uma função meromorfa de $z^{'}$ numa vizinhança de $z^{'} = 0$. Finalmente uma função holomorfa para $|z| > r,\ r > 0$ admite o ponto do infinito como singularidade essencial se a função $f(1/z^{'})$ tem uma singularidade essencial na origem.

Determine o tipo de singularidade das funções abaixo e escreva o desenvolvimento de Laurent em torno de cada singularidade.

a) $\dfrac{z^2+4}{e^z}$, em $z = \infty$. *Resp.* Singularidade essencial.
b) $\sqrt{(z-1)(z-2)}$, em $z = \infty$. *Resp.* Os dois ramos têm um polo simples.
c) $\cos z - \sin z$, em $z = \infty$.
d) $\sin \dfrac{1}{1-z}$, em $z = \infty$. *Resp.* A função é regular e tem um zero simples lá.
e) Dê exemplos de funções meromorfas em $\{|z| > r,\ r > 0\}$ que possuem o infinito como ponto limite (de acumulação) de polos simples.
f) $\sin \dfrac{1}{1-z}$, em $z = 1$. *Resp.* Singularidade essencial.
g) $\dfrac{1}{1-\mathrm{e}^z}$, em $z = 2\pi i$. *Resp.* Polo simples com resíduo -1.
h) $\dfrac{1}{\sin z - \cos z}$ em $z = \dfrac{\pi}{4}$. *Resp.* Polo simples com resíduo $\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$.

28) Suponha que no ponto z_0, a função $f_1(z)$ tem um zero de ordem α, e que a função $f_2(z)$ tem um polo de ordem $\beta(\alpha > 0, \beta > 0)$. Que tipo de ponto é z_0 para

a) $f_1 \pm f_2$
b) $f_1 \cdot f_2$
c) $\dfrac{f_1}{f_2}$
d) $\dfrac{f_2}{f_1}$

29) Determine os resíduos das funções abaixo e encontre a parte principal da série de Laurent em torno de cada singularidade.

a) $\dfrac{1}{\sin z}$ em $z = k\pi,\ k = 0 \pm 1 \pm 2, \dots$. *Resp.* $(-1)^k$
b) $\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ em $z = +1$ e em $z = +2$. *Resp.* $\mathrm{Res(f,1)} = 1,\ \mathrm{Res(f,2)} = -1$.

c) $\dfrac{a}{(z-z_1)^m(z-z_2)}$ em z_1 e z_2, $z_1 \neq z_2$ $(a \neq 0,\ m \in \mathbb{N})$ *Resp.* $\mathrm{Res(f, z_1)} = \dfrac{-\mathrm{a}}{(\mathrm{z_2 - z_1})^{\mathrm{m}}},\ \mathrm{Res(f, z_2)} = \dfrac{\mathrm{a}}{(\mathrm{z_2 - z_1})^{\mathrm{m}}}$.

d) $(1-\mathrm{e}^{-z})^{-n}$, em $z = 0$.

e) $\dfrac{1+z}{(1+z+z^2)^2}$.

30) Suponha que $f(z)$ tenha uma singularidade isolada em $z = a$ e suponha que $f(z) \not\equiv 0$. Suponha que exista $s \in \mathbb{R}$ tal que uma das seguintes equações vale

$$\lim_{z\to a} |z-a|^s |f(z)| = 0$$
$$\lim_{z\to a} |z-a|^s |f(z)| = \infty$$

a) Mostre que existe um inteiro m tal que a primeira equação vale se $s > m$, e a segunda equação vale se $s < m$.

b) $m = 0$, se $z = a$ é uma singularidade artificial e $f(a) \neq 0$.

c) $m < 0$, se $z = a$ é uma singularidade artificial e f tem um zero em $z = a$ de ordem $-m$.

d) $m > 0$, se $z = a$ é um polo de f de ordem m.

e) Se $z = a$ é uma singularidade essencial de f então nenhuma das equações acima vale para algum $s \in \mathbb{R}$.

31) Seja f uma função holomorfa no disco perfurado $\mathcal{D}^* = \{|z| < 1\} \setminus \{0\}$. Mostre que a função

$$M(r) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(r\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t \qquad 0 < r < 1$$

é uma constante que não depende de r. *Sugestão* : Use o desenvolvimento de Laurent na origem.

32) O que você pode dizer de uma função holomorfa $f(z)$ num perfurado centrado na origem e que satisfaz uma das condições abaixo ?

a) $|f(z)| \geqslant c\dfrac{\mathrm{e}^{a/|z|}}{|z|^n},\ n \in \mathbb{N}, c > 0, a \geqslant 0$

b) $|f(z)| \leqslant \dfrac{1}{|z|^{7/2}}$.

33) Considere a função

$$f(z) = \frac{1}{(1-az)(1-bz)(1-cz)}$$

onde a, a, c são números reais distintos e não nulos. Usando obrigatoriamente o teorema dos resíduos calcule o desenvolvimento em somas parciais de f. Em seguida calcule o desenvolvimento de Taylor na origem de f. Calcule o desenvolvimento de Taylor, por outro método efetuando logo o produto. Compare os resultados e obtenha uma fórmula algébrica.

34) Escreva os desenvolvimentos de Laurent das funções abaixo em torno de cada singularidade.

a) $f(z) = \dfrac{1}{(1-z)\,(1-z^2)}$

b) $f(z) = \dfrac{1}{(1+z^2)\,(1-z^2)^2}$

35) Considere

$$f(z) = \frac{1}{(z^n - 1)^2}$$

a) Calcule os resíduos de $f(z)$ nas singularidades, mostrando que os pólos de f são duplos e que

$$\mathrm{Res(f, a = e^{2k\pi i/n}) = -\, e^{2k\pi i/n}\, \frac{(n-1)}{n^2}}$$

b) Seja γ uma curva simples fechada contida no exterior do disco fechado de raio 1, i.e $[\gamma] \subset \mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$. Mostre que

$$\int_\gamma f(z)\,\mathrm{d}z = 0$$

Deduza a integrabilidade de $f(z)$ no domínio $\mathbb{C} \setminus \overline{B_1(0)}$. Deduza uma outra alternativa demonstração deste fato.

c) Seja $h(z)$ uma função inteira. Calcule

$$\int\limits_{|z-z_k|=\epsilon} \frac{h(z)}{(z^n-1)^2}\,\mathrm{d}z$$

onde z_k é uma singularidade de $f(z)$ e ϵ é tomado suficientemente pequeno.

d) Escreva a série de Taylor de $f(z)$ em $z = 0$.

e) Escreva a série de Laurent de $f(z)$ em $z = 1$.