

Variáveis Complexas 2009–Lista 2

Professor: Ricardo Sá Earp

DIFERENCIABILIDADE

- 1) Mostre a seguinte regra da cadeia: Seja A um conjunto aberto de \mathbb{C} e seja $f \in C^1(A)$. Se B é um aberto de \mathbb{C} tal que $f(A) \subset B$ e $g \in C^1(B)$, então $g \circ f \in C^1(A)$ e

a)

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial z} = \left[\left(\frac{\partial g}{\partial z} \right) \circ f \right] \frac{\partial f}{\partial z} + \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) \circ f \right] \frac{\partial \bar{f}}{\partial z}$$

$$\frac{\partial(g \circ f)}{\partial \bar{z}} = \left[\left(\frac{\partial g}{\partial z} \right) \circ f \right] \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} + \left[\left(\frac{\partial g}{\partial \bar{z}} \right) \circ f \right] \frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}$$

Mostre que

$$\frac{\partial g}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial \bar{g}}{\partial \bar{z}} \right)}$$

- 0) Seja $g(z)$ é uma função anti-holomorfa definida num aberto A do plano complexo \mathbb{C} . Estabeleça a equação diferencial complexa de primeira ordem que $g(z)$ satisfaz. Mostre que se $g(z)$ toma apenas valores imaginários puros então $g(z)$ é constante.

i) Calcule

$$\begin{array}{ll} \frac{\partial}{\partial z} (3\bar{z}^3 - z^2 + 1) & \frac{\partial}{\partial \bar{z}} (z^8 + 2z^3\bar{z}^6) \\ \frac{\partial^5}{\partial z^3 \partial \bar{z}^2} (\bar{z}^{11} z^7 + z^8 + 2\bar{z}^3) & \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} (\bar{z}^{11} z^7 + z^8 + 2\bar{z}^3) \\ \frac{\partial^5}{\partial z^3 \partial \bar{z}^2} (x^{11} y^7 + x^8 + 2y^3) & \frac{\partial^5}{\partial x^3 \partial y^2} (2\bar{z}^6 z^6 + z^5 + 2\bar{z}^7) \end{array}$$

- b) Mostre que $\frac{\partial(\log |z|)}{\partial z} = \frac{1}{2z}$ e $\frac{\partial(\log |z|)}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2\bar{z}}$

c) Se Δ é o laplaciano usual então

$$\Delta = 4 \frac{\partial}{\partial \bar{z}} \frac{\partial}{\partial z} = 4 \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}$$

d) Se $\lambda(z) = \frac{2}{1 - |z|^2}$, $|z| < 1$, então $ds^2 = \lambda^2 |dz|^2$ é a métrica hiperbólica no disco unitário aberto $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$. Mostre que a *curvatura de Gauss* K dada por $K(z) = \frac{-\Delta \log \lambda}{\lambda^2}$ é identicamente igual a -1 .

e) Mostre rigorosamente que as funções $f(z)$ e $\overline{f(\bar{z})}$ são simultaneamente holomorfas.

f) Seja f uma função holomorfa num aberto $U \subset \mathbb{C}$. Suponha que f não se anule. Mostre que

$$\Delta (|f|^p) = p^2 |f|^{p-2} \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2, \quad \text{para } p > 0$$

g) Mostre que se f é harmônica tomando valores reais no aberto U , e se f não se anula, então

$$\Delta (|f|^p) = p(p-1) |f|^{p-2} |\nabla f|^2, \quad \text{para } p \geq 1$$

h) Mostre que o laplaciano em coordenadas polares é escrito da forma

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

i) Seja $P : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ um polinômio. Suponha que

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} P = 0$$

para todo $z \in \mathbb{C}$. Mostre que

$$P(z, \bar{z}) = z \cdot G(\bar{z}) + H(\bar{z})$$

para polinômios G e H que dependem apenas de \bar{z} .

2) Seja f uma função holomorfa definida num domínio Ω de \mathbb{C} .

a) Demonstre que f é constante se uma das condições seguintes são verificadas:

- (i) $\Re f$ é constante (ii) $\Im f$ é constante (iii) $a\Re f + b\Im f + c = 0$,
onde $a, b, c \in \mathbb{R}, a^2 + b^2 > 0$. (iv) $|f|$ é constante.

b) Mostre as mesmas afirmações do item a) assumindo que $f(z)$ é anti-holomorfa.

c) Mostre que $\forall z \in \Omega$

$$\Delta(|f(z)|^2) = 4|f'(z)|^2$$

admitindo o fato de que $f = u + iv, u, v \in C^2(\Omega)$.

(v) Seja $f(z) = u(z) + iv(z), \Re f = u, \Im f = v$ uma função holomorfa num domínio Ω satisfazendo

$$2u^2(z) + v^2(z) = 1, \quad \forall z \in \Omega$$

Determine *todas* tais $f(z)$.

Generalize quando $u(z)$ e $v(z)$ satisfazem a equação geral do segundo grau

$$au^2 + 2buv + cv^2 + du + ev + k = 0 \quad (a, b, c, d, k \in \mathbb{R})$$

3) Seja Ω um domínio do plano complexo. Sejam f e g funções holomorfas em Ω . Assuma que g nunca se anule em Ω e que $\frac{f(z)}{\overline{g(z)}} \in \mathbb{R}$, para todo $z \in \Omega$.

O que você pode dizer da relação entre f e g ?

(4) Seja C uma curva contida no w -plano complexo \mathbb{C} determinada implicitamente pela equação

$$\varphi(u, v) = 0$$

a) Suponha que $f(z) = u(z) + iv(z)$ seja uma função holomorfa definida num aberto A de \mathbb{C} satisfazendo $\varphi(u(z), v(z)) = 0, \forall z \in A$. O que você pode dizer sobre f ?

b) Idem item a) assumindo que $f(z)$ é anti-holomorfa.

(5) Considere a equação diferencial complexa de segunda ordem dada por

$$(*) \quad E_{z\bar{z}} = \frac{\bar{E}}{1 + E\bar{E}} E_z E_{\bar{z}}$$

Encontre duas famílias de soluções da equação (*).

- (6) Sejam f, g duas funções holomorfas definidas num aberto A de \mathbb{C} não se anulando simultaneamente. Seja

$$H(z) := \log \left(\frac{1}{|f(z)|^2 + |g(z)|^2} \right)$$

Mostre que $H(z)$ é superharmônica em A .

- (7) Seja $f_i, i = 1 \dots n$ é uma função holomorfa num domínio Ω . Assuma que a derivada de f também é holomorfa (como veremos posteriormente). Suponha que $|f_1|^2 + \dots + |f_n|^2$ é uma função localmente constante em Ω . Deduza que $f_i, i = 1 \dots n$ é (localmente) constante em Ω .
- (8) Deduza o seguinte teorema de Gauss. “Se c_1, \dots, c_n são os zeros do polinômio $p(z)$, então cada zero $c \in \mathbb{C}$ da derivada de $p'(z)$ está no envelope convexo do conjunto dos zeros de $p(z)$.” *Sugestão:* Obtenha uma fórmula para o quociente $\frac{p'(z)}{p(z)}$ na forma de uma decomposição em frações parciais.