LISTA $3'$ DE VARIÁVEIS COMPLEXAS- 2009

RICARDO SA EARP

(1) Considere a esfera unitária $\mathbb{S}^2 = \{x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ em $\mathbb{R}^3$.

(a) Mostre que a *projeção estereográfica usual do pólo norte* é dada por

$$\Pi_N(x, y, z) = \frac{x + iy}{1 - z} := u + iv := E$$

dando a interpretação geométrica desta aplicação.

(i) A aplicação $z \mapsto 1/z$ é uma isometria positiva ? Descreva-a geometricamente, em termo de uma isometria (não positiva) da esfera $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

(ii) Interprete a aplicação $z \mapsto \dfrac{1}{\overline{z}}$ em termo de uma isometria (não positiva) da esfera $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

(b) Mostre que Π_N leva círculos da esfera em círculos ou retas no plano, determinando geometricamente cada situação.

(c) Mostre que Π_N preserva os ângulos mas inverte as suas orientações.

(d) Mostre que a inversa é dada por

$$z \longmapsto \left(\frac{2u}{E\overline{E} + 1}, \frac{2v}{E\overline{E} + 1}, \frac{E\overline{E} - 1}{E\overline{E} + 1} \right)$$

onde $E\overline{E} = u^2 + v^2$.

(e) Mostre que a métrica Euclideana $\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2$ em $\mathbb{R}^3$ induzida em $\mathbb{S}^2$, induz em $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ a seguinte métrica

$$\mathrm{d}s^2 = \frac{4}{(1 + u^2 + v^2)^2}(\mathrm{d}u^2 + \mathrm{d}v^2)\cdot$$

(f) A curvatura de Gauss de uma superfície Riemanniana é um invariante intrínseco (depende apenas da métrica). Em termos de coordenadas isotérmicas $z = x + iy$ pode ser escrita como

$$K = -\frac{\triangle \log \lambda}{\lambda^2}$$

onde a métrica em termos das coordenadas isotérmicas (conformes) $z = x + iy$, é dada por $\mathrm{d}s^2 = \lambda^2 |\,\mathrm{d}z|^2$.

Mostre que a curvatura de Gauss da referida métrica esférica é $K \equiv +1$.

(g) Mostre que uma isometria positiva da referida métrica é o conjunto das transformações de Möbius da forma

$$T(z) = \frac{az - \overline{c}}{cz + \overline{a}}$$

satisfazendo $|a|^2 + |c|^2 = 1,\ a, c \in \mathbb{C}$.
Conclua que toda isometria positiva da esfera $\mathbb{S}^2$ leva círculos em círculos.

(h) Deduza diretamente, sem usar o item anterior, que toda isometria da esfera leva círculos em círculos.

(i) Seja T uma isometria de de $\mathbb{S}^2 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, satisfazendo $a + \overline{a} \neq 0$. O *círculo isométrico de* T é o círculo I_T dado por $I_T := \{z \in \mathbb{C}; |cz + \overline{a}| = 1\}$. Deduza que T envia o seu círculo isométrico sobre o círculo isométrico de sua inversa e que tais círculos se encontram em dois pontos que são fixados por T. Interprete o resultado geometricamente.

(j) Mostre que dados dois pontos p e q de $\mathbb{S}^2$ existe uma isometria positiva de $\mathbb{S}^2$ que leva p em q, ou seja $\mathbb{S}^2$ é uma variedade homogênea bidimensional.

(k) Mostre que dadas duas geodésicas C_1 e C_2 de $\mathbb{S}^2$ existe uma isometria positiva de $\mathbb{S}^2$ que leva C_1 em C_2.

(l) Defina o conceito de *reflexão numa geodésica* da esfera, geometricamente, sem fazer uso do ambiente Euclideano. Em seguida, mostre que tal reflexão é a restrição de uma reflexão Euclideana de $\mathbb{R}^3$ à esfera.

(m) Defina o conceito de *translação ao longo de uma geodésica* na esfera $\mathbb{S}^2$. Deduza que tais translações são compostas de duas *reflexões em geodésicas*, como definido acima.

(n) Dados $p, q \in \mathbb{S}^2$ seja $\mathrm{dist}_{\mathbb{S}^2}(q, p)$ a distância entre p, q (na métrica das esfera).

  (i) Deduza que existe uma curva C na esfera que *minimiza* o comprimento de arco, dentre *todas* as curvas parametrizadas suaves regulares ligando p à q. Além disso, o traço desta curva é um arco de círculo de raio máximo contido em $\mathbb{S}^2$. Aqui faça um estudo alternativo analizando o funcional comprimento de arco.

  (ii) Seja $C_r := \{q \in \mathbb{S}^2; \mathrm{dist}_{\mathbb{S}^2}(q, p_0) = r\}$, o *círculo esférico de raio r e centro p_0 em $\mathbb{S}^2$*.

    (A) Deduza que o comprimento de C_r é proporcional ao *seno* de r.

(B) Deduza que as isometrias da esfera levam círculos em círculos, em que círculos aqui significa uma curva obtida fazendo a interseção da esfera com um plano de $\mathbb{R}^3$. Dê o significado disto intrínseco, sem fazer menção ao ambiente $\mathbb{R}^3$.