Variáveis Complexas- 2009–Lista3

Professor: Ricardo Sá Earp

APLICAÇÕES E MAPEAMENTOS CONFORMES

1) Lembre-se que a equação geral de uma reta ou círculo no plano complexo é da forma

$$\alpha z\bar{z} + \bar{\beta}z + \beta\bar{z} + \gamma = 0$$

onde $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{C}, |\beta|^2 > \alpha\gamma$.

a) Mostre que a aplicação $f(z) = 1 \big/ z$ é uma aplicação conforme que leva círculos ou retas em círculos ou retas, analisando separadamente os casos em que o círculo ou reta passa pela origem.

b) Mostre que a aplicação $\varphi :\ z \longmapsto \dfrac{r^2}{\bar{z}-\bar{a}} + a$, onde $a \in \mathbb{C}, r > 0$ deixa fixo todos os pontos do círculo C_a de raio r e centro a, e leva cada círculo C ortogonal a C_a em si mesmo.

Tal aplicação é chamada de inversão ou simetia ou reflexão com respeito ao círculo.

- Estude as propriedades da reflexão φ com respeito ao círculo C_a de raio r e centro a.

c) No exercício anterior mostre que quando $a = -i$ e $r = \sqrt{2}$, a aplicação φ composta com a conjugação usual dos números complexos, chamada de ψ, fornece uma equivalência conforme entre o semi-plano $\mathbb{H}^2 = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ e o disco unitário aberto $\mathcal{D} = \{|z| < 1\}$. O que você pode dizer da imagem por ψ de cada semi-reta vertical em $\mathbb{H}^2$ e de cada semi-círculo em $\mathbb{H}^2$ ortogonal a $\{\operatorname{Im} z = 0\}$?

2)

a) Verifique que $\forall \alpha \in IR^* = IR \setminus \{0\}$,

$$f(z) = \frac{z-\alpha}{z+\alpha}$$

determina uma transformação conforme satisfazendo $f(IR_\infty) = IR_\infty$, de maneira que $f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}$, se $\alpha > 0$ e $f(\mathcal{H}) = \mathcal{H}_-$, se $\alpha < 0$.

b) Verifique que uma família de transformações conformes do disco aberto $|z| < r_1$ sobre o disco aberto aberto $|z| < r_2$ é dada por

$$f(z) = cr_2 \cdot \frac{z - \alpha r_1}{r_1 - \bar{\alpha} z}$$

onde $|c| = 1, |\alpha| < 1$. Existem outras equivalências conformes entre $|z| < r_1$ e $|z| < r_2$?

c) Exiba uma família de aplicações de Möbius que são transformações conformes de $\mathcal{D}$ sobre $\mathcal{D}$. Daí obtenha uma família de equivalências conformes entre $\mathcal{D}$ e $\{z \in \mathbb{C}_\infty, |z| > 1\}$. Idem entre $\mathcal{H}$ e $\{z \in \mathbb{C}_\infty, |z| > 1\}$, levando em conta o conhecimento dado em aula de uma equivalência conforme entre $\mathcal{H}$ e $\mathcal{D}$. Você terá obtido em cada caso *todas* as transformações conformes ?

d) Dê uma família de transformações conformes do semi-plano $\Re z > 0$ sobre si mesmo. Idem para transformações conformes de $\Re z > 0$ sobre $\mathcal{D}$. Mostre que no primeiro problema basta conhecer uma família de transformações conformes de $\mathcal{H}$ sobre si mesmo. Quanto ao segundo problema, que conhecimento adquirido em aula que é suficiente para resolvê-lo ?

3) Mostre que a transformação $f(z) = z/(z+1)$ dá uma equivalência conforme entre o primeiro quadrante $\Re z > 0, \operatorname{Im} z > 0$ e o semi-disco aberto $\{w, \operatorname{Im} w > 0, |w - 1/2| < 1/2\}$.

4) Sejam p, q pontos no plano complexo $p \neq q$. Considere

$$f(z) = \frac{z-p}{z-q}, \qquad \Gamma_k = \left\{z,\ \left|\frac{z-p}{z-q}\right| = k\right\}, \qquad k > 0$$

Fazendo desenhos responda as seguintes questões:

a) Se $\widetilde{\Gamma_k} = f(\Gamma_k),\ \Rightarrow \widetilde{\Gamma_k} = \{w,\ |w| = k\}$.

b) A aplicação inversa g de f é dada por $g(w) = (qw - p)/(w-1)$.

c) Como $g(\widetilde{\Gamma_k}) = \Gamma_k$, concluir que Γ_k é um círculo se $k \neq 1$, e Γ_1 é uma reta.

d) Se Λ 'e um círculo passando por p e q, então $\widetilde{\Lambda} = f(\Lambda)$ é uma reta passando por $w = 0$. A reta Λ_0 passando por p e q dá $f(\Lambda_0) = I\!R_\infty$.

e) Se $k \neq 1,\ f^{-1}(\pm k) = g(\pm k)$ determina um diâmetro de Γ_k, daí deduza que o centro z_0 de Γ_k é dado por $1/2\{g(k) + g(-k)\}$ e seu raio R é dado por $1/2|g(k) - g(-k)|$.

f) Verifique que Γ_1 é uma reta de equação paramétrica $\dfrac{p+q}{2} + \dfrac{p-q}{2}it,\ t \in IR$, calculando $g(-1)$ e $g(i)$.

g) Verifique que, se $0 < k < 1,\ \Gamma_k$ é um círculo contendo p no interior do disco que delimita e se $k > 1$, Γ_k é um círculo contendo q no interior do disco que delimita. *Sugestão*: Mostre que em cada caso $|p - z_0| = kR$ e $|q - z_0| = R/k$, respectivamente.
Os círculos de equação $|(z-p)/(z-q)| = k$ são chamados de círculos de *Apollonius* determinados por p e q. Os sistemas ortogonais de coordenadas determinados pelos círculos ortogonais Λ e Γ são chamados de círculos de Steiner.
Por quê são ortogonais ?

6) Considere a aplicação f dada por $z \longrightarrow z^2$.

a) Seja H um semi-plano aberto determinado pela reta $e^{i\theta}IR$, para θ real qualquer. Mostre que $f(H) = \mathbb{C} \setminus L, \qquad L = e^{2i\theta}IR_+$ e que $f : H \longrightarrow f(H)$ é uma transformação conforme. Determine a inversa.

b) Seja $w = u + iv = z^2,\ z = x + iy$. Mostre que $u = u_0$ e $v = v_0$ determina duas famílias de hipérboles ortogonais. Também mostre que $x = x_0$ e $y = y_0$ determina duas famílias de parábolas ortogonais.

c) Mostre que a imagem por f do círculo $S = \{z,\ |z-1| = 1\}$ é um cardióide. Mostre que f fornece uma equivalência conforme entre o domínio aberto delimitado pelo cardióide e o disco aberto delimitado por S.

7) Considere a aplicação

$$g(z) = \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^2$$

a) Mostre que g dá uma equivalência conforme entre o semi-disco aberto aberto $A = \{z,\ \operatorname{Im} z > 0,\ |z| < 1\}$ e o semi-plano aberto $\widetilde{A} = \{w,\ \operatorname{Im} w > 0\}$.

* * *

10) Estude *amplamente* a aplicação de Zhukovsky dada por $f(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$, seguindo as seguintes linhas:

a) Mostre que nos abertos contendo $+1$ ou -1 f não pode ser injetiva.

b) Mostre que o grau de f é 2. "Quais são os pontos de ramificação de f?"

c) Mostre que f não pode ser injetiva num domínio que contenha z e $1/z$ simultâneamente. Reciprocamente num domínio que contenha no máximo um dos números $z,\ 1/z$ $(z \in \mathbb{C}\backslash\{0\})$, mostre que f restrita a este domínio é injetiva.

d) Estude as imagens dos círculos concêntricos centrados na origem $|z| = r$ e $|z| = 1/r$, pela aplicação de Zhukovsky. Estude as imagens das semi-retas partindo da origem pela aplicação de Zhukovsky. Discuta a ortogonalidade entre as imagens deste sistema coordenado.

e) Mostre que f é injetiva nos seguintes domínios: $\mathcal{D} \setminus \{0\},\ V = \{z;\ |z| > 1\}$ e $\mathbb{H}^2$ (Lembremos que $\mathcal{D}$ é a bola unitária aberta e que $\mathbb{H}^2$ é o semi-plano superior).

f) Mostre que $f\ : \mathcal{D} \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus L$, onde $L = [-1, 1]$, é uma equivalência conforme . Idem para $f\ : V \to \mathbb{C} \setminus L$, onde $L = [-1, 1]$,

g) Mostre que $f\ : \mathbb{H}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{C} \setminus S$, onde $S =]-\infty, -1] \cup [1, \infty[$, é uma equivalência conforme.

h) Considere $A = \{z;\ |z + x_0| < 1 + x_0\}$, $B = \{z;\ |z + x_0| > 1 + x_0\}$ e $C = \{z;\ |z + x_0| = 1 + x_0\}$, onde $0 < x_0 < 1$. Faça figuras !!

   i) Seja $\tilde{C} = f(C)$. Mostre que $\tilde{C}$ é uma curva simétrica com respeito ao eixo real passando por 1 e cortando ortogonalmente a reta real no ponto $f(-1 - 2x_0)$.

   ii) Mostre que f é injetiva em C e que a curva de Jordan $\tilde{C}$ é regular, exceto no ponto 1. Mostre que $\tilde{C}$ faz um ângulo tipo "quina" em $w = 1$.

11) Considere Ω o domínio contido no disco de centro 1 e raio $\sqrt{2}$ satisfazendo $\operatorname{Re} z < 0$ (faça um desenho). O objetivo deste item é determinar a imagem de Ω pela aplicação

$$g(z) = \frac{2z}{1 - z^2}$$

Considere a aplicação

$$f(z) = \frac{1 + z}{1 - z}$$

a) Estabeleça uma relação funcional entre $f(z)$, $g(z)$ e a aplicação de Cayley

$T_C(z)$, definida por $z \mapsto T_C(z) := \dfrac{z-i}{z+i}$, mostrando que

$$-if^{-1}\left((T_C(z))^2\right) = g(z)$$

Será que $g(z)$ tem alguma simetria ?

b) Mostre que $g(z)$ dá uma equivalência conforme, levando Ω num certo semi-disco, determinando tal disco.

c) Fazendo um cálculo simples, independente do item (b) acima, determine o efeito de g no ponto i no que concerne o *ângulo*, calculando explicitamente o ângulo da imagem de $\partial\Omega$ na imagem de i.

12) Seja $f(z) = \dfrac{(z+1)^{n/2} - (1-z)^{n/2}}{(z+1)^{n/2} + (1-z)^{n/2}}$, $n \in \mathbb{N}^*$. Decompondo $f(z)$ em funções elementares conhecidas neste ponto, mostre que f leva uma certa região circular Ω conformemente sobre o disco unitário. Sendo que Ω está determinada por dois círculos simétricos em relação ao eixo real, interceptando o eixo real segundo um ângulo π/n.

13) Seja f uma função holomorfa em um domínio Ω que seja localmente injetiva (leia-se: f' nunca se anula. Na verdade, esta propriedade é equivalente a ser localmente injetiva, como veremos posteriormente). A *derivada Schwarziana* de f denotada por S_f está definida por

$$S_f := \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\frac{f''(z)}{f'(z)} - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2$$

a) Mostre que se $w = T(z)$ e $w = Q(z)$ são uma aplicações de Möbius então

$$S_{T\circ f\circ Q}(z) = S_f(Q(z))Q'(z)^2$$

e assim é invariante por aplicações de Möbius, isto é $S_{T\circ f}(z) = S_f(z)$. Conclua que a derivada Schwarziana de uma aplicação de Möbius é nula. A derivada Schwarziana tem papel importante na Análise Complexa.

14) Considere $f(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$.

- Deduza que $f(z)$ é meromorfa em $\mathbb{C}$, holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, e conforme no disco $|z| < 1$.
- Deduza que $f(z) = \overline{f(1/\overline{z})}$, inferindo que $f(z)$ leva o círculo unitário na reta real, daí conclua que

$f(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}) = \mathrm{f}(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}) \in \mathbb{R}, \theta \in (0, 2\pi)$. Deduza que $\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}}{(1-\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta})^2} = -\dfrac{1}{4\mathrm{sen}^2(\theta/2)}$, $\theta \in (0, 2\pi)$, concluindo que a imagem do círculo unitário $|z| = 1$, removendo o ponto $z = 1$, o semi-eixo $(-\infty, -1/4]$, recoberto duas vezes.

- Explicite a série de Taylor de $f(z)$ na origem determinando o raio de convergência da série.
- Deduza que $f(z)$ é univalente em $|z| < 1$, e que assim um mapeamento conforme do disco unitário em $\mathbb{C} \setminus (-\infty, -1/4]$.