Variáveis Complexas 2009–Lista4

Professor: Ricardo Sá Earp

SÉRIES DE NÚMEROS COMPLEXOS

1) Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz mostre que se $\sum_n |a_n| < \infty$ as seguintes séries são convergentes

$$\sum_n |a_n a_{n+1}|^{1/2}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n}, \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{|a_n|^{1/2}}{n^{1/2+p}}, \qquad p > 0.$$

Voce poderia dar uma demonstração mais elementar ?

2) Mostre com todos os detalhes que se $\sum a_n$, $\sum b_n$ são duas séries que convergem absolutamente então o produto das séries converge absolutamente e temos que

$$\left(\sum_n a_n\right)\left(\sum_n b_n\right) = \sum_n c_n$$

onde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0$.

a)

i) Primeiramente deduza que a função exponencial $\mathrm{e}^z := \mathrm{e}^x\, \mathrm{e}^{iy}$, $z = x + iy$ é inteira (holomorfa em todo o $\mathbb{C}$) e que $(\mathrm{e}^z)' = \mathrm{e}^z$. Assumindo que a exponencial é igual a sua série de Taylor, convergente em todo o $\mathbb{C}$ (já que é inteira), deduza que a exponencial está dada por $\mathrm{e}^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$.

b) A função cosseno dada por $\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}$ e a função seno dada por $\mathrm{sen}\, z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}$. Deduza que ambas funções so inteiras, assumindo que analiticidade implica em holomorfia. Agora, usando o resultado sobre produto de séries, mostre que:

i) $2\,\mathrm{sen}\, z \cos z = \mathrm{sen}\, 2z$. Esboce uma dedução alternativa usando continuação analítica (que você poderá assumir para fazer este problema).

ii) $\cos^2 z + \mathrm{sen}^2 z = 1$. Esboce uma dedução alternativa usando continuação analítica (que você poderá assumir para fazer este problema).

iii) $f(z) = \mathrm{e}^{z - 1/z}$ é holomorfa em $\mathbb{C}^*$ e que

$$\mathrm{e}^{z - 1/z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m \geqslant 0 \\ m \geqslant n}}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!} \right) z^n$$

sendo a série absolutamente convergente para $|z| > 0$.

c) Mostre que a série abaixo converge para $p > 0$ e converge absolutamente para $p > 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$$

i) Mostre que a série $\sum c_n$ diverge para $0 < p \leqslant 1/2$, onde

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k \, a_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left((k+1)\,(n-k+1) \right)^{-p}$$

3) Considere a função

$$f(z) = \cos\left(\sqrt{z}\right) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right), z \in \mathbb{C}^*$$

a) Mostre com certo *detalhe* que $f(z)$ está bem definida e é holomorfa em $\mathbb{C}^*$.

b) Escreva o desenvolvimento de $f(z)$ numa "série de potências" em z^n e $\left(\frac{1}{z}\right)^n$, chamada de *desenvolvimento de Laurent* de $f(z)$, absolutamente convergente para $|z| > 0$, i.e $f(z) = \sum_{N=-\infty}^{N=\infty} a_N z^N$ obtendo

i) Os termos a_1, a_0, a_1 explicitamente efetuando o produto.

Mais geralmente obtenha

ii)

$$\cos\left(\sqrt{z}\right) \cos\left(\frac{1}{\sqrt{z}}\right) = \sum_{N=-\infty}^{N=\infty} \sum_{\substack{m \geqslant N \\ m \geqslant 0}} \frac{(-1)^N}{(2m)!\,(2m-2N))} z^N$$

4) Determine o raio de convergência das séries de potências, determinando o disco de convergência. Calcule $f^n(0)$. Determine um domínio compacto em que a série converge normalmente.

a) $\sum_n n^\alpha z^n,\ \alpha \in \mathbb{R}$.

b) $\sum_n n!(z/n)^n$.

c) $\sum_n \alpha^{n^2} z^n,\ \alpha \in \mathbb{C}$.

d) $\displaystyle\sum_n \frac{1}{n!}\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n)z^n,\ \alpha \in \mathbb{C}; \sum_n \frac{1}{n!}\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)z^n,\ \alpha \in \mathbb{C}$.

Sugestão: Considere o caso $\alpha \in \{0, \pm1, \pm2, \pm3, \dots,\}$ *separadamente.*

e) $\sum_n (\log n)^2 z^n$. *Resposta*: 1.

f) $\sum_n n!/(n^n) z^n$.

Sugestão: Considere a fórmula de Stirling $n! = n^n \mathrm{e}^{-n} u_n$ com $\lim_{n\to\infty} u_n^{1/n} = 1$. *Resposta*: e

g) $\sum_n z^{2^n}/(n!)$.

5)

a) Sejam a, b, c números complexos. Suponha que c não é um inteiro $\leqslant 0$. Mostre que o raio de convergência da série abaixo é 1, disco de convergência. Determine um domínio compacto em que a série converge normalmente.

$$1 + \frac{ab}{c}z + \frac{a(a+1)\cdot b(b+1)}{2!c(c+1)}z^2 + \cdots + \frac{a(a+1)\dots(a+n-1)\cdot b(b+1)\dots(b+n-1)}{n!c(c+1)\dots(c+n-1)}z^n + \cdots$$

6) Mostre que as séries de números complexas abaixo, convergem nos conjuntos $\mathcal{C}$ dados

a) $\sum_n (z/(1+z))^n$. $\mathcal{C} = \{z; \Re z > -1/2\}$. Determine um domínio compacto em que a série converge normalmente. *Sugestão*: Você terá que mostrar que $z \mapsto \dfrac{z}{1+z}$ leva o semi-plano $\{z; \Re z > -1/2\}$ no disco unitário centrado na origem.

b) $\sum_n z^n/(1+z^n)$. $\mathcal{C} = \{z; |z| < 1\}$.

c) $\sum \left(\frac{z-1}{z+1}\right)^n$. $\mathcal{C} = \{z, \quad \Re z > 0\}$. *Sugestão*: Veja a sugestão para o item *a*).

d) Discuta a *convergência normal* das séries dos itens anteriores.

Classicamente, o domínio limitado pelas chamadas *curvas de Cassini*, dadas por

$$|z-a|\,|z+a| = R^2, \qquad a, R > 0$$

são chamados de domínios de Cassini. Para $a = R$, a origem é um ponto duplo, para $a > R$ tem duas componentes conexas e para $a < R$ é um domínio estrelado cujo centro é a origem. Esboce desenhos usando o MAPLE.

e) Mostre que a série $\sum_n \left(\frac{1}{2}z(z-1)\right)^{2^n}$, converge em certo domínio de Cassini.

d) Discuta a *convergência normal* das séries dos itens anteriores.

7) Seja R o raio de convergência da série $\sum_{n \geqslant 0} a_n z^n$. Mostre que o raio de convergência $\widetilde{R}$ da série

$$\sum_{n \geqslant 0} \frac{a_n}{1 + |a_n|} z^n$$

é dado por $\widetilde{R} = \max(R, 1)$

8) Determine os raios de convergência das séries. Calcule $f^{(n)}(0)$. Indique um domínio compacto no qual a série converge normalmente:

a) $\sum_{n \geqslant 0} (-1)^n 2^n z^{2n+2}$.

b) $\sum_{n \geqslant 0} 2^{\log n} z^n$.

c) $\sum_{n \geqslant 0} (\sin n) z^n$.

9) Sejam $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ duas seqüências de números reais. Seja $\delta > 0$. Assuma que $(\sin\alpha_1 + \cdots \sin\alpha_n)^2 + (\cos\beta_1 + \cdots + \cos\beta_n)^2 \geqslant \delta$.

Discuta sobre o raio de convergência das séries $\sum a_n z^n$, onde os coeficientes a_n estão dados abaixo.

a) Sejam $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ duas seqüências de números reais. Seja $\delta > 0$. Assuma que $(\sin\alpha_1 + \cdots \sin\alpha_n)^2 + (\cos\beta_1 + \cdots + \cos\beta_n)^2 \geqslant \delta$. Defina: $a_n := (\sin\alpha_1 + \cdots \sin\alpha_n)^2 + (\cos\beta_1 + \cdots + \cos\beta_n)^2$, onde os α_i e os β_j são reais. *Sugestão*: Faça a comparação das médias geométricas e aritméticas de uma certa maneira ou utilize a desigualdade de Cauchy, mostrando que $(\sin\alpha_1 + \cdots \sin\alpha_n)^2 + (\cos\beta_1 + \cdots + \cos\beta_n)^2 \leqslant n$.

b) $a_n = \dfrac{1^k}{n^{k+1}+1} + \cdots + \dfrac{n^k}{n^{k+1}+n}$, $k > 0$. *Sugestão*: Compare com a soma de Riemann da função $f(x) = x^k, x \in [0,1]$, observando que $\dfrac{1^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}+n} \leqslant a_n \leqslant \dfrac{1^k + \cdots + n^k}{n^{k+1}+1}$.

c) $a_n = \dfrac{b_n}{n^n}$, onde b_n b_n satisfaz a equação de diferenças

$$b_{n+1} - (n+1)b_n = 2^n(n+1)! \quad b_0 = 1$$

mostrando que $b_n = n!\,2^n$.

d) a_n satisfaz a equação de diferenças de primeira ordem

$$a_{n+1}\,(a + ba_n) = ca_n, \qquad a,b,c > 0, \quad a_0 > 0$$

mostrando que $x_n = 1/a_n$ satisfaz uma equação de diferenças linear de primeira ordem.

10) Neste exercício você precisará fazer uso de certas *desigualdades clássicas*. Sejam $\{\alpha_n\}$ e $\{\beta_n\}$ duas seqüência de números reais positivos satisfazendo certas condições. Considere a série de potências

$$f(z) = \sum a_n z^n$$

Discuta o raio de convergência da série sabendo que a_n, α_n, β_n satisfazem às seguintes condições abaixo.

a) $a_n := (\alpha_n + \beta_n)^{\alpha_n+\beta_n}$, onde

$$\alpha_n^{\alpha_n}\beta_n^{\beta_n} = O(2^n) \qquad (n \to \infty)$$

Mostre primeiramente que (por exemplo com a ajuda da desigualdade de Young)

$$a^a\,b^b \geqslant \frac{(a+b)^{a+b}}{2}, \quad a \geqslant b > 0$$

b) $a_{n+1} := \alpha_{n+1}\beta_{n+1}^n$, onde

$$\frac{\alpha_{n+1} + n\beta_{n+1}}{n+1} = O(1) \qquad (n \to \infty)$$

Aqui você precisa comparar as quantidades $\dfrac{\alpha_{n+1} + n\beta_{n+1}}{n+1}$ e $\alpha_{n+1}\beta_{n+1}^n$ via a desigualdade da média,

11) Seja $\{a_n, \quad n = 2, 3, \ldots\}$ uma seqüência de números complexos não nulos satisfazendo

$$(*) \qquad \sum_2^\infty n|a_n| < 1$$

a) Discuta sobre o disco de convergência da série

$$(**) \qquad z + \sum_2^\infty ((n-1))^n (\ln 2)a_2(\ln 3)a_3 \cdots (\ln n)a_n z^n$$

Você precisa usar a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, levando em conta $(**)$.

b) Agora suponha $\operatorname{Re} a_n > 0, \quad n = 2, 3, \ldots$.

i) Discuta, *com todos os detalhes*, o raio de convergência da série

$$\sum_2^\infty \frac{a_n^{2^n}}{1 + n\, a_n} z^{n\, 2^n}$$

Aqui você terá que observar que a série apresenta "gaps" e tome cuidado com potenciação para aplicar o critério de Cauchy (raiz).

ii) Dê exemplos de tais a_n satisfazendo $(*)$ e assim exemplos de séries satisfazendo o item i).

12) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência dada por $a_n = 1$, se $n = 2^k, k \in \mathbb{N}$ e $a_n = 0, n \neq 2^k$. Seja $m > 0$. Discuta com detalhes o raio de convergência da série

$$\sum_{n=0}^\infty a_n\, \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\, \mathrm{e}^{mn}\, z^n$$

Novamente você terá que observar que a série apresenta "gaps" e tome cuidado com potenciação para aplicar o critério de Cauchy (raiz).

13) Seja $a = \alpha + i\tau, \alpha, \tau \in \mathbb{R}, \tau > 0$. Considere a série

$$f(z) = \sum_n \log n\, a^n z^{n^2}$$

Determine o raio de convergência e o disco de convergência.
Calcule $f^{(n)}(0)$.