

Variáveis Complexas 2009–Lista 5

Professor: Ricardo Sá Earp

SÉRIES DE FUNÇÕES COMPLEXAS E CONVERGÊNCIA UNIFORME

- 1) Seja $f_n(z) = 1/(z + n)$, $n \in \mathbb{N}$. Mostre que
- $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(z) = 0$, $z \in \mathbb{C}$.
 - Seja $A_\alpha = \{z; \Re z \geq \alpha, z \notin -\mathbb{N}\}$. Mostre que $f_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$) uniformemente em A_α , onde α é um número real qualquer. Mais precisamente, mostre que

$$\sup_{z \in A_\alpha} |f_n(z)| \leq \frac{1}{\alpha + n} \quad \text{se } n > -\alpha$$

- Mostre que se $A = \{z; \Im z \geq 1\}$, então $f_n \not\rightarrow 0$, uniformemente em A , mostrando que $\sup_{z \in A} |f_n(z)| \geq 1$, $n \in \mathbb{N}$.
- 2) Seja $a_n(z) = 1/(z + n^2)$, $n \in \mathbb{N}$. Seja $S = \{-n^2; n \in \mathbb{N}\}$. Considere

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n(z), \quad z \notin S.$$

- Mostre que $\sum_{n \geq 0} |a_n(z)| < \infty$, $z \notin S$.
- Mostre que a série é uniformemente convergente em A_α (cf Ex 1 b)).
- Mostre que se $\alpha \leq 0$, a série $\sum_{n \geq 0} a_n(z)$ não é normalmente convergente em A_α (Ex 1 c)), mostrando que $\|a_n\|_{A_\alpha} = \infty$, para $n^2 \leq -\alpha$.
- Mostre que a série $\sum_{n \geq 0} a_n(z)$ não é uniformemente convergente em A (Ex 1 c)).
- Mostre que a série $\sum_{n \geq 0} a_n(z)$ é uniformemente convergente em todo compacto $K \subset \mathbb{C} \setminus S$; conclua que f é contínua em $\mathbb{C} \setminus S$.
- Discuta as relações entre séries normalmente convergentes, absolutamente convergentes e uniformemente convergentes. Discuta como isto foi aplicado no teorema de séries de potências que relacionou o raio de convergência

da série e da série de potências obtida da original derivando-se termo a termo.

g) Considere $e^z := \sum \frac{z^k}{k!} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \dots$. Mostre que

$$\left| e^z - \sum_0^{n-1} \frac{z^k}{k!} \right| \leq \frac{2}{n!} |z|^n \quad \text{para } n \geq 1 \quad |z| \leq 1 + \frac{1}{2}(n-1)$$

O quê você pode concluir da estimativa acima com respeito à convergência da soma parcial da série dada por e^z ? Você tem outra maneira de ver isto?

3) Seja X um conjunto e sejam f_n , $n = 1, 2, \dots$, f funções complexas definidas em X . Mostre que $f_n \xrightarrow{u} f$ ($n \rightarrow \infty$) $\Leftrightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} (f_n(x_n) - f(x_n)) = 0$, para toda seqüência $\{x_n\}_{n \geq 1}$ em X .

4) Seja $f_n(x) = nx(1-x)^n$ ($0 \leq x \leq 1$, $n = 1, 2, \dots$). Verifique que as funções contínuas f_n convergem (quando $n \rightarrow \infty$) pontualmente à uma função contínua $f \equiv 0$ em $[0, 1]$, sem que a convergência seja uniforme, mostrando que

$$\|f_n\|_{[0,1]} \rightarrow \frac{1}{e} \neq 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

5) Sejam $a_n : X \rightarrow \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}$, onde X é um conjunto e $\{b_n\}$ uma seqüência monótona tendendo à zero. Seja $A_n(x) := a_0 + \dots + a_n(x)$, $x \in X$. Suponha que $\sup_{n \geq 0} \|A_n\| < \infty$.

a) Seguindo o raciocínio do critério de Dirichlet (veja no final desta lista), mostre

que $\sum_n a_n(x) b_n$ converge uniformemente em X . Conclua que a série $\sum_{\nu \geq 1} b_\nu \cos \nu x$ (cf Lista 1) converge uniformemente em $x \in [\alpha, \beta]$, onde $0 < \alpha < \beta < \pi$.

6) Determine um domínio compacto, em cada item dos exercs. 3), 4), 5) da Lista 4, de maneira as série dada no item converge *normalmente* no domínio determinado.

7) Defina para $s \in \mathbb{C}$ e $n \in \mathbb{N}^*$

$$n^s := e^{s \ln n}$$

Considere uma série da forma

$$(*) \quad \sum_{n \geq 1} \frac{a_n}{n^s}, \quad a_n \in \mathbb{C}, s \in \mathbb{C}$$

chamada usualmente de *série de Dirichlet*

- i) Será que se (*) converge absolutamente para $s = a + ib$, então a série converge normalmente para $\Re s \geq a$, e vale que (*) define uma função contínua neste semi-plano fechado ?

Sugestão: Compare a série de funções com uma série de números reais no semi-plano indicado e aplique o teste M de Weierstrass.

Para responder ao próximo exercício você vai precisar utilizar o chamado *teorema de convergência de Weierstrass* que diz o seguinte: *Seja U um aberto (não vazio) de \mathbb{C} , e seja $\{f_n(z), z \in U\}$ uma seqüência de funções holomorfas definidas em U . Se $\{f_n\}$ converge uniformemente localmente em U à uma função $f : U \rightarrow \mathbb{C}$, então $f(z)$ é holomorfa e*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n^{(k)}(z) = f^{(k)}(z), \quad z \in U$$

sendo a convergência uniforme em compactos de U . No caso de séries de funções holomorfas convergindo uniformemente, é válido derivação termo a termo. Para demonstrar este resultado você terá que estudar a teoria da integração complexa, incluindo a fórmula de Cauchy e variantes. Assumindo isto responda ao seguinte:

- ii) Será que se (*) converge absolutamente para $s = a + ib$, então a série define uma função holomorfa no semi-plano $\{\Re s > a\}$ satisfazendo

$$f^{(k)}(s) = \sum_{n \geq 1} a_n n^{-s} (-\ln n)^k, \quad k \in \mathbb{N}^*$$

neste semi-plano ?

- iii) Considere agora o caso de que $a_n = 1, \forall n$. Neste caso a série é a famosa *função zeta* de Riemann dada por

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

Assumindo o teorema de Weierstrass enunciado acima responda ao seguinte:

Será que $\zeta(s)$ é holomorfa para $\Re s > 1$?

Finalmente, será que a função $\zeta(s)$ possui alguma simetria ?

Note que

$$\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

8) Considere $f(z) = z + \sum_2^{\infty} a_n z^n$. Assuma que

$$\sum_2^{\infty} n|a_n| \leq 1$$

a) Mostre que f é contínua em $\bar{\Delta} := \{|z| \leq 1\}$.

Com base no que foi dito acima sobre o teorema de convergência de Weierstrass,

b) Mostre que f é holomorfa em Δ .

9) Considere a seqüência $a_n(z) := \{z^n/(1+z^n)\}, z \in \mathbb{C}$.

(a) Deduza que para valores $z \in \mathbb{C}$ tais que $|z| < 1$, tem-se $a_n(z) \xrightarrow{p} 0$ ($n \rightarrow \infty$), i.e $a_n(z)$ converge pontualmente a zero, quando n vai para infinito.

(b) Encontre uma seqüência $\{\alpha_n\}, |\alpha_n| < 1$, satisfazendo $|\alpha_n| \rightarrow 1$ com $a_n(\alpha_n) \not\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$). Deduza daí a não convergência uniforme de $a_n(z)$ no disco unitário $|z| < 1$.

(c) Mostre que a série $\sum_n z^n/(1+z^n)$ converge absolutamente em $\{z; |z| < 1\}$.
Mostre que a série $\sum_n z^n/(1+z^n)$ converge uniformemente em $\{z; |z| \leq r < 1\}$.

Nota cultural matemática:

i) A série de Taylor de $\frac{z}{e^z - 1}$ em torno da origem está definida por

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_0^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k, \quad B_k \in \mathbb{C}$$

Valem as seguintes afirmações

- i) $B_1 = 0$ e $B_{2k+1} = 0$ para $k \geq 1$.
- ii)

$$\binom{n}{0}B_0 + \binom{n}{1}B_1 + \binom{n}{2}B_2 + \cdots + \binom{n}{n-1}B_{n-1} = 0$$

Os números acima são chamados de *números de Bernoulli*. Determine-os recursivamente, calculando

$$B_0 = 1, B_2 = 1/6, B_4 = -1/30, B_6 = 1/42 \\ B_8 = -1/30, B_{10} = 5/66, B_{14} = 7/6$$

Curiosidade: $B_{26} = 8553103/6 \dots$

Para entender o desenvolvimento acima, considere $1 = \frac{e^z - 1}{z} \cdot \frac{z}{e^z - 1}$, assim como o desenvolvimento de Taylor da função exponencial, e o resultado sobre produtos e divisões de séries de potências (veja listaC).

ii)) Existe uma relação entre os números de Bernoulli e a função zeta de Riemann

$$B_{2n} = \frac{(-1)^{n+1}(2n)! \zeta(2n)}{2^{2n-1}\pi^{2n}}$$

iii) A função zeta de Riemann admite um prolongamento analítico à $\mathbb{C} \setminus \{1\}$, sendo $z = 1$ um pólo simples de resíduo 1.

iv) A *hipótese de Riemann* é um dos *problemas do milênio* que diz o seguinte: “Os zeros de $\zeta(z)$ na faixa crítica $0 \leq \Re z \leq 1$ estão todos na reta $\Re z = \frac{1}{2}$ (já se sabe que existem uma infinidade de tais zeros)”

* * *

- (*Lema da soma parcial de Abel*): Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}$ duas seqüências de números complexos, $n \in \mathbb{N}_0 := \mathbb{N} \cup \{0\}$. Coloquemos $A_n = a_0 + \cdots + a_n, n \geq 0$; então para $n \geq 0, k \geq 1$, temos que

$$\sum_{j=n+1}^{n+k} a_j b_j = \sum_{j=n+1}^{n+k-1} A_j (b_j - b_{j+1}) - A_n b_{n+1} + A_{n+k} b_{n+k}$$

Deduzza: $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge se $\sum_{n \geq 0} A_n (b_n - b_{n+1})$ converge e $\lim_{n \rightarrow \infty} A_n b_n$ existe.

- a) (*Cr terio de Abel*) Da fórmula de Abel deduza que se $\sum_{n \geq 0} a_n$   convergente e se $\{b_n\}$   uma seq ncia monótona limitada; então $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.
- b) (*Cr terio de Dirichlet*) Mostre que se a seq ncia das somas parciais $\{A_n\}$ de $\sum_n a_n$   limitada e se a seq ncia $\{b_n\}$   uma seq ncia real monótona tendendo a zero, então $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

Daí deduza o critério de Leibniz: Seja $\{\alpha_n\}$ uma seq ncia monótona de números reais tendendo a zero, então $\sum_{n \geq 0} (-1)^n \alpha_n$ converge. D  exemplos de séries convergentes, mas não absolutamente convergentes.

Também deduza o seguinte: Se $\sum_n |b_n - b_{n+1}| < \infty$ e se $\sum_n a_n$ converge então $\sum_{n \geq 0} a_n b_n$ converge.

- Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ seq ncias de números reais estritamente positivos com

$$\sum_n c_n < \infty, \sum_n d_n = \infty.$$

- a) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \frac{c_{n+1}}{c_n}, \quad n \geq N,$$

$$\text{então } \sum_n a_n < \infty.$$

- b) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} \geq \frac{d_{n+1}}{d_n}, \quad n \geq N,$$

$$\text{então } \sum_n a_n = \infty.$$

Sugestão: Para o item a) observe que a seq ncia $\{a_n/c_n\}$   uma seq ncia decrescente.

- (*Cr terio de Kummer*): Sejam $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ seq ncias de números reais estritamente positivos com $\sum_n d_n = \infty$.

- a) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$ e um número $\rho > 0$ temos que

$$b_n - \frac{a_{n+1}}{a_n} b_{n+1} \geq \rho > 0, \quad n \geq N,$$

$$\text{então } \sum_n a_n < \infty.$$

b) Mostre que se para algum $N \in \mathbb{N}$ temos que

$$\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{d_{n+1}} \leq 0, \quad n \geq N,$$

então $\sum_n a_n = \infty$.

Sugestão: Para o item b) veja o exercício anterior item b). Para o item a) observe que $w_n := a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq a_n \rho > 0, n \geq N$. Também observe que $\sum_n w_n$ é convergente.

- (*Critério de Raabe-Duhamel*). Guardando as notações do exercício 5), tomando $b_n = n - 1 (n \geq 2)$ no exercício 5 a) e $d_n = 1/(n - 1)$ no item b) obtém-se

$$\sum_n a_n < \infty \quad \text{se, para algum } \alpha > 1 \quad \text{e um } N \in \mathbb{N}, \quad n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) \geq \alpha, \quad n \in N$$

$$\sum_n a_n = \infty \quad \text{se, para algum } N \in \mathbb{N}, \quad n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) < 1, \quad n \in N$$

Em particular, se $\lim_{n \rightarrow \infty} n \left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = L$ então $\sum_n a_n < \infty$ se $L > 1$ e $\sum_n a_n = \infty$ se $L < 1$. Mostre que se $L = 1$, todas as hipóteses podem ocorrer.

- (*Critério de Gauss*) Seja $\{a_n\}$ uma seqüência de números reais estritamente positivos tais que, para algum $N \in \mathbb{N}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + \frac{\beta_n}{n^p}, \quad n \geq N$$

onde $p > 1, \alpha \in \mathbb{R}$ e $\sup_{n \geq N} |\beta_n| < \infty$.

- a) Mostre que $\sum_n a_n < \infty$, se $\alpha > 1$ e $\sum_n a_n = \infty$, se $\alpha \leq 1$.

Sugestão: Se $\alpha \neq 1$ utilize o exercício 6). Para $\alpha = 1$ utilize o exercício 5 b) com $1/d_n = (n - 1) \log(n - 1)$, $n \geq 3$ verificando que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{d_n} - \frac{a_{n+1}}{a_n} \cdot \frac{1}{d_{n+1}} \right) = -1.$$

b) Seja $a \in \mathbb{C}$. Seja $z_n = \binom{a}{n}$, onde $\binom{a}{0} = 1, \binom{a}{1} = a$,

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1) \cdots (a-n+1)}{n!}, \quad n \geq 1.$$

Mostre que $\sum_n |z_n| < \infty$ se $\operatorname{Re} a > 0$ ou $a = 0$ e, $\sum_n |z_n| = \infty$ se $\operatorname{Re} a \leq 0$, $a \neq 0$.

Sugestão: Considere

$$r_n = \left| \frac{z_{n+1}}{z_n} \right| = \left| \frac{a-n}{n+1} \right|$$

Quando $\operatorname{Re} a \neq 0$ aplique o exercício 6), verificando que

$$n(1-r_n) = \frac{n}{1+r_n} \cdot \frac{1-|a|^2+2n(1+\operatorname{Re} a)}{(n+1)^2} \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} n(1-r_n) = 1 + \operatorname{Re} a$$

Quando $\operatorname{Re} a = 0$, $a \neq 0$, $a = it$, $t \in \mathbb{R}$, $t \neq 0$ e

$$r_n = \frac{n}{n+1} \left(1 + \frac{t^2}{n^2} \right)^{1/2}$$

verifica-se que

$$n^2 \left(r_n - 1 + \frac{1}{n} \right) = \frac{n^3}{n+1} \left(\left(1 + \frac{t^2}{n^2} \right)^{1/2} - 1 \right) + \frac{n^2}{n(n+1)} \rightarrow \frac{t^2}{2} + 1$$

O resultado agora segue do item a).

- Mostre que

$$A_n = \frac{1}{2} + \sum_{\nu=1}^n \cos \nu x = \frac{\sin(n+1/2)x}{2 \sin(x/2)}$$

$$B_n = \sum_{\nu=1}^n \sin \nu x = \frac{\cos(x/2) - \cos(n+1/2)x}{2 \sin(x/2)}$$

se $n \in \mathbb{N}$ e $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$ utilizando as fórmulas

$$2 \sin(1/2)x \cos \nu x = \sin\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(\nu - \frac{1}{2}\right)x$$

$$2 \sin(1/2)x \sin \nu x = \cos\left(\nu - \frac{1}{2}\right)x - \cos\left(\nu + \frac{1}{2}\right)x.$$

Conclua que se $x \notin 2\pi\mathbb{Z}$, $n \geq 1$ as séries

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \cos \nu x, \quad \sum_{\nu=1}^{\infty} b_{\nu} \sin \nu x$$

são convergentes, desde que a seqüência $\{b_n\}_{n \geq 1}$ seja monótona tendendo a zero. Dê exemplos particulares disto.

- 10) Mostre com todos os detalhes que se $\sum a_n$, $\sum b_n$ são duas séries que convergem absolutamente então o produto das séries converge absolutamente e temos que

$$\left(\sum_n a_n \right) \left(\sum_n b_n \right) = \sum_n c_n$$

onde $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0$.

- a) Considerando a função exponencial e^z , mostre que

$$e^{z-1/z} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{\substack{m \geq 0 \\ m \geq n}}^{\infty} \frac{1}{m!} \frac{(-1)^{m-n}}{(m-n)!} \right) z^n$$

- b) Mostre que a série abaixo converge para $p > 0$ e converge absolutamente para $p > 1$.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n+1)^p}$$

- i) Mostre que a série $\sum c_n$ diverge para $0 < p \leq 1/2$, onde

$$c_n = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k} = \sum_{k=0}^n ((k+1)(n-k+1))^{-p}$$

O que isto significa para você conceitualmente ?