

Variáveis Complexas 2009–Lista 6

Professor: Ricardo Sá Earp

SÉRIES DE TAYLOR E ANALITICIDADE

Seja $f(z) = 1/z(z-1)$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$. Obtenha o desenvolvimento de $f(z)$ em $z = 2$, usando a seguinte técnica

$$\begin{aligned} f(z) &= -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{2} \left(1 + \frac{z-2}{2}\right)^{-1} + (1 + (z-2)) \\ &= -\frac{1}{2} \left\{1 - \frac{z-2}{2} + \left(\frac{z-2}{2}\right)^2 - \dots\right\} + \{1 - (z-2) + (z-2)^2 - \dots\} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} - 1\right)(z-2) + \dots + \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n}{2^n} + (-1)^n\right)(z-2)^n + \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} (-1)^n \left(1 - \frac{1}{2^{n+1}}\right) (z-2)^n \end{aligned}$$

Qual é o raio de convergência da série acima? Discuta isto!

1) Considere

$$f(z) = z^2/(z-2), \quad z \neq 2$$

a) Mostre que $f(z)$ é holomorfa. Encontre os termos de ordem ≤ 3 do desenvolvimento em série de potências da função $f(z)$ em $z = 1$.

Resposta: $-1 - (1+2)(z-1) - (1+2+1)(z-1)^2 - (1+2+1)(z-1)^3$.

b) Agora, aplicando a técnica acima desenvolvida em sala de aula, obtenha a série de Taylor de $f(z)$ em $z = 1$. Daí calcule $f^{(n)}(1)$, $n \geq 0$

2) Considere a função

$$f(z) = \frac{2z}{z^2 - 3z + 2}, \quad z \neq 1, 2$$

a) Obtenha o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ em $z = 0$, determinando o termo geral da série. Calcule o raio de convergência da série de Taylor.

- b) Obtenha o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ em $z = 3/2$, determinando o termo geral da série. Calcule o raio de convergência da série de Taylor.
- 3) Idem item 2) com respeito a função $f(z) = z/((z + 1)^2(z - 3))$.
- 4) Idem item 2) com respeito a função $f(z) = z/(z^2 + 1)(z - 1)^2$.
- 5) Seja $a \in \mathbb{R}$. Considere a série $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} z^n \cosh na$.

Determine o raio de convergência R da série e calcule $f^{(2^n)}(0)$, $n \in \mathbb{N}$ a derivada de ordem 2^n na origem.

Encontre uma função elementar $f(z)$ que seja meromorfa em \mathbb{C} ; satisfazendo $f(z) = S(z)$; $|z| < R$.

- 6) Mostre que $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} + \frac{i/2}{(z - i)}$ ($z \neq i$) e $f(i) = 1/4$, é holomorfa para $|z - i| < 2$, deduzindo que

$$f(z) = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{4} \left(\frac{i}{2}\right)^n (z - i)^n, \quad |z - i| < 2$$

- 7) Considere a função

$$(*) \quad f(z) = \frac{1}{1 + z + z^2}$$

Seja $\sum a_n z^n$ o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ na origem.

- a) Mostre que os coeficientes a_n satisfazem uma relação de recorrência que dá a seguinte equação de diferenças linear de primeira ordem:

$$a_{n+1} + a_n + a_{n-1} = 0, \quad a_0 = 1, a_1 = -1$$

- b) Calcule a_n , mostrando que

$$a_n = \frac{i}{\sqrt{3}} e^{\pi i(2n-1)/3} - \frac{i}{\sqrt{3}} e^{-\pi i(2n-1)/3}$$

- c) Calcule $f^{(n)}(0)$, a derivada de ordem n de $f(z)$ na origem.
- d) Determine o desenvolvimento de Taylor de f na origem, verificando que a função racional (*) acima dá a *forma fechada* de tal desenvolvimento, verificando o seu resultado.
- e) Calcule o raio de convergência da série de Taylor.

f) Mostre que $f(z)$ satisfaz uma equação diferencial de segunda ordem (envolvendo $f(z), f'(z), f''(z)$) não linear.

8) Considere

$$J(z) = \sum_0^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n!)^2} \left(\frac{z}{2}\right)^{2n}$$

Qual é o raio de convergência da série? Indique um domínio compacto no qual a série converge normalmente.

Mostre que $J(z)$ satisfaz a equação diferencial (Veja num livro outros exemplos de equações lineares complexas, regulares e singulares-regulares, de segunda ordem)

$$z^2 J''(z) + zJ'(z) + z^2 J(z) = 0$$

9) Sejam a, b, k constantes reais, com $k \neq 0$. Defina-se uma seqüência $\{a_n\}$ pela relação de recorrência (equação de diferenças linear de segunda ordem):

$$a_0 = a, \quad a_1 = b, \quad ka_{n+2} - (1 + k^2)a_{n+1} + ka_n = 0$$

Considere a série

$$f(z) = \sum_0^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$$

a) Mostre que $f(z)$ satisfaz a uma equação diferencial linear de segunda ordem. Encontre uma *expressão explícita para $f(z)$* e em seguida encontre uma expressão para os a_n . Analise os casos $k = \pm 1$, separadamente.

10) Considere $\{a_n\}$ uma seqüência satisfazendo a equação de diferenças de segunda ordem

$$a_n = \frac{a_{n-2} + a_{n-1}}{2}, \quad n \geq 1$$

com condições iniciais $a_1 = 0, a_2 = 1$.

Considere a série de potências

$$f(z) = \sum_1^{\infty} a_n z^n$$

a) Mostre que a série define uma função holomorfa $f(z)$ numa vizinhança da origem.

- b) Determine $f(z)$ numa “closed form”, i.e na forma de uma fração racional, obtendo $f(z) = \frac{2z^2}{2 - z - z^2}$.
- c) Calcule $f^{(n)}(0)$, $n \geq 0$, e calcule o raio de convergência da série, mostrando que $a_n = \frac{2}{3} + \frac{(-1)^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2}{3}$

11) Considere a equação de diferenças

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad n \geq 2$$

satisfazendo as condições iniciais $a_0 = a_1 = 1$. Esta é uma equação linear de diferenças de segunda ordem com coeficientes constantes. Você deveria saber resolver isto com os métodos do Cálculo IV! Vamos propor outra solução via a teoria das funções analíticas. À propósito: Tal seqüência é chamada de *seqüência de Fibonacci*.

- a) Mostre que $A(z) := \sum a_n z^n$ tem raio de convergência $R > 0$.
- b) Mostre que $A(z) = \frac{1}{1 - z - z^2}$, concluindo que $A(z)$ tem raio de convergência $R = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$.
- c) Mostre que

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right)$$

O número $\frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1,618\dots$ é o número áureo dos gregos da antiguidade.

12) Verifique (ou obtenha) os desenvolvimentos de Taylor das funções abaixo, justificando a convergência (raio e disco de convergência) em cada caso. Discuta convergência normal.

- a) $\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)z^n, \quad |z| < 1.$
- b) $\frac{1}{(1-z)^{m+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1) \cdots (n+m)}{m!} z^n, \quad |z| < 1, m \in \mathbb{N}.$
- c) $\sin(\alpha z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\alpha^{2n+1}}{(2n+1)!} z^{2n+1}, \quad z \in \mathbb{C}.$
- d) $\cos z^{1/2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^n}{(2n)!}, \quad z \in \mathbb{C}.$

$$e) \frac{1}{z^2 + 1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \sin(n+1) \frac{\pi}{4}}{(\sqrt{2})^{n+1}} (z-1)^n, \quad |z-1| < \sqrt{2}.$$

$$f) \frac{1}{1 - 2z \cos \theta + z^2} = \sum_0^{\infty} \frac{e^{(n+1)i\theta} - e^{-(n+1)i\theta}}{e^{i\theta} - e^{-i\theta}} z^n, \quad |z| < 1$$

g) Exiba as séries abaixo escrevendo uma expressão numa “forma fechada” ($s \in \mathbb{R}$)

$$\sum_{n \geq 0} z^n \cos ns$$

$$\sum_{n \geq 0} z^n \sin ns$$

13) Considere a função $f(z) = \frac{e^{-z}}{1+z}$.

- Encontre o desenvolvimento de Taylor de f na origem, determinando os coeficientes da série.
- Calcule o raio de convergência por dois métodos distintos.
- Calcule $f^{(n)}(0)$.

Doravante, vamos ter como base o seguinte resultado fundamental enunciado em sala de aula:

“Analiticidade é equivalente a holomorfia, além disso, se uma função f holomorfa num disco aberto $B_R(z_0)$, $R > 0$ centrado num ponto z_0 , a série de Taylor de f em z_0 converge em todos os pontos do disco $B_R(z_0)$ e é igual a f neste disco”

**

14) Responda verdadeiro ou falso. Caso verdadeiro esboce uma dedução rigorosa. Caso falso esboce um contra-exemplo detalhadamente.

- Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função holomorfa definida num domínio Ω . Seja $c_n, n = 0, 1, 2, \dots$, uma seqüência de pontos de Ω com $c_n \rightarrow c$ ($n \rightarrow \infty$). Assuma que $f(c_n) = 0$. Segue então que $f \equiv 0$ em Ω .
- Suponha que $0 \in \Omega$ e que $f(z)$ e $g(z)$ são duas funções holomorfas em Ω com $f(z)$ não se anulando na seqüência $a_n = \frac{2^n}{n!}$ e $g(z)$ não se anulando em $z = 0$; então se $f(z)$ e $g(z)$ satisfazem $\frac{f'(a_n)}{f(a_n)} = \frac{g'(a_n)}{g(a_n)}$; segue que

existe uma relação funcional simples entre $f(z)$ e $g(z)$. Determine tal relação.

- c) Seja $f : \Omega \subset \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ uma função anti-holomorfa definida num domínio Ω . Seja $c_n, n = 0, 1, 2, \dots$, uma seqüência de pontos de Ω que possui um ponto de acumulação pertencendo ao domínio Ω . Assuma que $f(c_n) = 0$. Segue então que $f \equiv 0$ em Ω .
- d) Seja $f(z) := \frac{e^z}{(1-z)}$. Segue que $f(z)$ meromorfa em \mathbb{C} com um pólo simples em $z = 1$. Alm disso, segue que $f(z)$ é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ e $f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$ para $|z| < 1$, onde o raio de convergncia da série é igual a 1 e é dado por

$$a_n = \left(1 + \dots + \frac{1}{n!} \right), \quad n \geq 1, \quad a_0 = 1$$

- e) Existem funções holomorfas definidas num domínio contendo a origem que satisfaçam a condição abaixo: $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = e^{-\sqrt{n}}$, onde $n \in \mathbb{N}^*$.
- f) Se f e g são duas funções holomorfas definidas em Ω satisfazendo $f(z)g(z) = 0$ para todo $z \in \Omega$, então $f(z) \equiv 0$ ou $g(z) \equiv 0$ em Ω .
- g) Seja $\{a_n, n \in \mathbb{N}\}$ uma seqüência limitada. Segue então que o raio de convergência da série $\sum_0^\infty a_n (z-c)^n$ é igual a 1.
- h) Se a série $\sum_0^\infty a_n (z-c)^n$, tem raio de convergência $R > 0$ e $a_n \rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$); então $\sum_0^\infty |a_n| R^n < \infty$.
- i) Se a série $\sum_0^\infty a_n (z-c)^n$ é uma série de raio de convergência R , então
- i) Se $\sup_n |a_n| < \infty$, mas $a_n \not\rightarrow 0$ ($n \rightarrow \infty$), então $R = 1$.
- j) Existe uma série $\sum_0^\infty a_n (z-c)^n$ de raio de convergência R , que admite um prolongamento analítico $F(z)$ que é holomorfa num aberto U contendo o disco fechado $\overline{B_R(c)}$ centrado em c e de raio R .
- k) Existe uma série $\sum_0^\infty a_n (z-c)^n$ de raio de convergência R , que admite um prolongamento analítico $F(z)$ que é meromorfa num aberto U contendo

o disco fechado $\overline{B_R(c)}$ centrado em c e de raio R .

15) Verificar as afirmações abaixo com respeito a existência de uma função analítica f definida numa vizinhança (aberta) de $z = 0$.

a) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \cos n\pi$, $n = 1, 2, \dots$, é impossível.

b) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)$, $n = 1, 2, \dots$, é impossível.

c) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, implica que $f(z) = z/(z+1)$.

d) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2 \sin(\pi/n)}{n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, implica que $f(z) = \sin(\pi z)/z(z+1)$,
com $f(0) = \pi$.

e) $f\left(\frac{1}{n}\right) = f\left(\frac{1}{2n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$, implica que f é constante.

f)

$$an^{-5/2} \leq \left| f\left(\frac{1}{n}\right) \right| \leq bn^{-5/2}$$

onde a, b são constantes ≥ 0 , implica que f é identicamente nula.

g) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$, $n = 1, 2, \dots$, implica que $f(z) = z/(z+2)$.

h) $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2n + \cos(n\pi)}$ é impossível.

16) Seja Ω um domínio e sejam f e g duas funções holomorfas definidas em Ω .

a) Assuma que $f(z)\overline{g(z)} = 0$ para todo $z \in \Omega$. O quê você pode dizer de f e de g ?

b) Suponha que $f^2(z) = z$ e que $g^2(z) = z$ para todo $z \in \Omega$. O que você pode dizer de f e de g ?

17) Seja $u = u(x+iy)$ uma função harmônica definida num domínio Ω . Assumindo que localmente uma função harmônica é parte real de uma função holomorfa, o que você pode dizer do conjunto $\mathcal{C} = \{u_x = u_y = 0\}$?

* * *

O seguinte problema para equações diferenciais ordinárias holomorfas de primeira ordem é fundamental

Considere $f(z, w)$ uma função holomorfa nas variáveis z, w , para z numa vizinhança de a e w numa vizinhança de b . Considere o seguinte problema com condição

inicial

$$\begin{cases} \frac{dw}{dz} = f(z, w) \\ w(a) = b \end{cases} \quad (*)$$

O seguinte resultado é fundamental: O problema acima (*) possui uma e apenas uma solução.

O mesmo resultado vale para equações diferenciais ordinárias holomorfas de ordem superior:

$$\begin{cases} \frac{d^n w}{dz^n} = f(z, w, w', \dots, w^{(n-1)}) \\ w(a) = b \\ w'(a) = b_1 \\ w''(a) = b_2 \\ \dots \\ w^{(n-1)}(a) = b_{n-1} \end{cases} \quad (**)$$

Quando a equação é linear um pouco mais pode ser dito: Considere

$$w'' + p(z)w' + q(z)w = 0 \quad (**)$$

onde $p(z)$ e $q(z)$ são holomorfas para $|z - a| < R$, $R > 0$. Segue então que a solução geral de (**) é combinação linear de duas soluções linearmente independentes holomorfas para $|z - a| < R$.

18) Os próximos exercícios dizem respeito ao que foi discutido acima:

a) Considere a equação diferencial abaixo

$$w'(z) + 2zw(z) = z^2 \quad (*)$$

- i) Mostre que toda solução de (*) é inteira e que sempre existe tal solução.
- ii) Seja $w(z) = \sum a_n z^n$, uma solução de (*). Mostre que os coeficientes a_n satisfazem uma equação de diferenças linear de segunda ordem, usualmente chamada de *relação de recorrência*. Resolva esta equação calculando os coeficientes. Determine a solução geral da equação.

b) Considere a equação diferencial

$$\begin{cases} (z^2 - 2z - 3) \frac{d^2 w}{dz^2} + 3(z - 1) \frac{dw}{dz} + w = 0 \\ w(1) = 4 \\ w'(1) = 1 \end{cases} \quad (*)$$

- i) Dê um argumento, sem fazer conta, que (*) possui uma solução que é dada por uma série de potências $f(z) = \sum a_n (z - 1)^n$, de raio de convergência R igual a 2.
- ii) Encontre a equação de diferenças satisfeita pelos coeficientes a_n , referidos no item i).
- iii) Encontre uma fórmula para os coeficientes a_n em função de n .
- iv) Fazendo obrigatoriamente dois cálculos distintos, calcule de duas maneiras distintas explicitamente o raio de convergência da série.
- v) Calcule $f^{(2004)}(1)$.
- vi) Encontre a solução da equação diferencial

$$\begin{cases} (z^2 - 2z - 3) \frac{d^2 w}{dz^2} + 3(z - 1) \frac{dw}{dz} + w = 1 + z + z^2 \\ w(1) = 4 \\ w'(1) = 1 \end{cases}$$

19) Considere a equação diferencial complexa de segunda ordem dada por:

$$(*) \quad E_{z\bar{z}} = \frac{\bar{E}}{1 + E\bar{E}} E_z E_{\bar{z}}$$

Dizemos que uma função $E : U \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^2 definida num domínio $U \subset \mathbb{C}$ é uma *solução trivial* da equação (*), se E é holomorfa ou anti-holomorfa. Sejam $f(z)$ e $g(z)$ funções holomorfas em U .

- a) Assuma que $E(z) = f(z)\overline{g(z)}$ seja uma solução de (*). Mostre que E é uma solução trivial de (*).

b) Assuma que $E(z) = f(z) + \overline{g(z)}$ seja uma solução de (*). Mostre que E é uma solução trivial de (*).

20) Seja $w = g(z)$ uma função meromorfa em \mathbb{C} , tal que $g \neq i$. Deduza que a equação diferencial complexa de Ricatti $g' + g^2 + 1 = 0$, é verificada apenas para a família $g(z) = i \frac{a e^{2iz} + 1}{a e^{2iz} - 1}$, $a \in \mathbb{C}$. *Sugestão:* Considere a função meromorfa obtida pela composta de $g(z)$ com a transformao de Möbius $w \mapsto \frac{w+i}{w-i}$, dada

$$\text{por } f(z) := \frac{g(z) - i}{g(z) + i}.$$

21) Seja $f(z)$ uma função analítica definida numa vizinhança da origem. Mostre que se $f(z)$ satisfaz

$$f(2z) = 2f'(z) \cdot f(z)$$

então $f(z)$ é uma função inteira, i.e definida em todo plano complexo \mathbb{C} . Dê exemplos de funções elementares que satisfazem a igualdade acima.

No próximo exercício você vai ter que assumir o fato de que uma **aplicação analítica é aberta**.

22) Considere $\varphi(z) = u(z) + iv(z)$ uma função complexa de classe C^1 definida em um domínio Ω . Relembre do fato que $\frac{\partial \varphi}{\partial z} = \overline{\left(\frac{\partial \bar{\varphi}}{\partial \bar{z}}\right)}$.

a) Suponha agora que φ seja analítica em Ω . Suponha ainda que existe um disco aberto $V \subset \Omega$, tal que $\overline{\varphi(z)} \in \Omega$, $\forall z \in V$. Mostre que $w = \overline{\varphi(\overline{\varphi(z)})}$ é uma função holomorfa num aberto de Ω . Considere o conjunto $\mathcal{A} = \{z \in V, \bar{z} = \varphi(z)\}$. Suponha finalmente que $a \in \mathcal{A}$ seja um ponto de acumulação de \mathcal{A} . Mostre que $z \equiv \overline{\varphi(\overline{\varphi(z)})}$ em V . Conclua que $|\varphi'(a)| = 1$.

23) Seja $f(z)$ uma função holomorfa no disco unitário aberto centrado na origem. Suponha que para $-1 < x < 1$ ($x \in \mathbb{R}$), $u = f(x)$ satisfaça a equação diferencial

$$u'(x) = \frac{2u(x)}{1-x} + \frac{1}{(1-x)^2}$$

Assuma que $f(0) = 0$. Encontre $f(z)$. Calcule $f^{(n)}(0)$.

24) Seja $f(z) = \frac{1}{(1-z)(1-z^2)(1-z^3)}$. Deduza a decomposição:

$$f(z) = \frac{A}{(1-z)^3} + \frac{1/4}{(1-z)^2} + \frac{1/4}{(1-z^2)} + \frac{1/3}{(1-z^3)}$$

- a) Determine A e escreva $f(z) = \sum_{n \geq 0} c(n)z^n$, $|z| < 1$, o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ na origem. Deduza fazendo um mínimo de contas que $c(n) \sim n^2/12$ (quando $n \rightarrow \infty$), i.e $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c(n)}{n^2/12} = 1$.
- b) Generalize para $\frac{1}{(1 - z^{p_1})(1 - z^{p_2}) \cdots (1 - z^{p_k})} = \sum_{n \geq 0} c(n)z^n$, $|z| < 1$ onde p_1, \dots, p_k , são números primos.
- 25) Exiba um exemplo de uma aplicação meromorfa $f(z)$ no plano complexo \mathbb{C} com um número finito de polos, satisfazendo:
- $f(z)$ leva o disco aberto unitário $|z| < 1$ no disco aberto unitário $|w| < 1$.
 - $f|_{B_1(0)} : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ é própria.
 - $f(z)$ tem um zero de ordem 2^k no ponto $1/2^{k+1}$, $k = 0, 1, \dots, N$, para $N \in \mathbb{Z}^+$, e $f(z)$ não tem outros zeros.
 - Para cada $w \in B_1(0)$, o conjunto $f^{-1}(w)$ contém $2^{N+1} - 1$ elementos (cada ponto w na imagem tem $2^{N+1} - 1$ pré-imagens).

* * *

Nota cultural matemática:

Seja f uma função holomorfa num disco Ω de \mathbb{C} . Diz-se que Ω é o *domínio de holomorfia* de f se f não possui nenhum prolongamento à um domínio $\tilde{\Omega}$ contendo Ω com $\tilde{\Omega} \neq \Omega$. Pode-se mostrar que para todo domínio Ω de \mathbb{C} , existe uma função holomorfa f definida em Ω para a qual Ω é seu domínio de holomorfia. Neste caso o bordo $\partial\Omega$ de Ω é chamado de *fronteira natural de holomorfia* de f e os pontos de $\partial\Omega$ são chamados de *pontos singulares* de f , ou seja, f não admite prolongamento analítico a nenhum aberto \mathcal{U} contendo um ponto ζ qualquer de $\partial\Omega$.

- Note que todos os pontos do bordo do disco de convergência da série abaixo são pontos singulares, i.e o círculo $S^1 = \partial\Omega$ é a *fronteira natural* de f e o disco de convergência é o domínio de holomorfia de f :

$$f(z) = z + z^2 + z^4 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^{2^n}.$$

OBS: : para ver isto note que o *limite radial* quando o raio tende à 1 é ∞ . Mais

precisamente, note primeiramente que

$$\lim_{t \rightarrow 1} |f(re^{it})| = \infty$$

quando cada t é da forma $2\pi k/2^\ell$, $k \in \mathbb{Z}$, $\ell \in \mathbb{N}$. Em seguida note que isto é suficiente para mostrar que um ponto ζ qualquer de $\partial\Omega$ é um ponto singular de f .

- Note que sempre tem um ponto singular no bordo do disco de convergência de uma função analítica.
- Seja R , $0 < R < \infty$ o raio de convergência de série

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n$$

O teorema de Abel diz o seguinte: *Se ζ é um ponto da fronteira do disco de convergência $|z-a| < R$, se a série converge para $z = \zeta$, então o limite radial existe em $z = \zeta$, isto é (mas, o limite, em geral não existe !)*

$$\lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ 0 \leq t < 1}} f(a + t(\zeta - a)) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (\zeta - a)^n. \quad (*)$$

Usando o teorema de Abel note que

$$\log 2 = \lim_{\substack{t \rightarrow 1 \\ 0 \leq t < 1}} \log(1+t) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Conclua que, de fato, tem-se que

$$\log 2 = \lim_{z \rightarrow 1} \log(1+z) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

Seja

$$f(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \dots = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \quad |z| < 1$$

verificar que o raio de convergência da série é 1 e que $f'(z) = \frac{1}{(z^2+1)}$, $|z| < 1$. Deduzir que para t real em $(-1, 1)$, $f(t) = \arctan t$. Pelo teorema de Abel conclua que (série de Gregory e Leibniz)

$$\frac{\pi}{4} = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots$$