Variáveis Complexas 2009–Lista 7

Professor: Ricardo Sá Earp

FUNÇÕES ANALÍTICAS ELEMENTARES

1) Mostre que se $0 < a < 1$, então

$$2\pi i \mathrm{e}^{i\pi a} \Big/ (\mathrm{e}^{2\pi a i} - 1) = \frac{\pi}{\sin a\pi}$$

Para que valores $a \in \mathbb{C}$ a igualdade acima é verdadeira ?

2) Mostre que se $q = \mathrm{e}^{i\pi\tau}$, $\operatorname{Im}\tau > 0$ e se $\theta = \mathrm{e}^{i\pi u}$, então

$$\frac{\sin \pi(n\tau - u) \cdot \sin \pi(n\tau + u)}{\sin^2(\pi n\tau)} = \frac{(1 - q^{2n}\theta^{-2})(1 - q^{2n}\theta^2)}{(1 - q^{2n})^2}$$

3) Seja

$$f(z) = a\operatorname{sen}\mathrm{z} - \mathrm{e}^{\mathrm{z}}, \qquad \mathrm{z} \in \Omega := \{\mathrm{z};\ |\Re \mathrm{z}| \leqslant \pi/2, \quad |\operatorname{Im}\mathrm{z}| \leqslant \pi/2\}$$

a) Calcule

$$\max_{\partial\Omega} |f(z)|$$

Será que $\max\limits_{\Omega} |f(z)| = \max\limits_{\partial\Omega} |f(z)|$?

4) Mostre que a função $w = \mathrm{e}^{1/z^k}, k \in \mathbb{N}^*$ em qualquer disco perfurado da origem, toma todos os valores complexos w uma infinidade de vezes, exceto $w = 0$. Idem para $w = \sin(1/z)$. ***Nota cultural matemática***: relacione com o *grande teorema de Picard.*

5) Seja $f(z) = \exp(az) + \exp(bz)$, onde a, b são constantes complexas e $z \in \mathbb{C}$. Mostre que f é periódica $\Leftrightarrow$ $a = b = 0$ ou $b = ra$, onde r é um número real racional.

6) Mostre que

a) $|\exp z^2| \to \infty$ se $|z| \to \infty, |\arg z| \leqslant \alpha < \pi/4$.

b) $\cos z$ é real $\Leftrightarrow y = 0$ ou $x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.
c) $\sin z$ é imaginário puro $\Leftrightarrow x = n\pi,\ n \in \mathbb{Z}$.
d) $\exp\left((1+i)z\right) = \sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2} \exp\left(\frac{in\pi}{4}\right) \frac{z^n}{n!},\ \forall z \in \mathbb{C}$.
e) $\exp(\cos z)\cos(\sin z) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\cos nz}{n!},\ \forall z \in \mathbb{C}$. *Sugestão*: Verifique que

$$\exp(\exp \pm iz) = \sum_n \frac{\exp(\pm inz)}{n!} = \sum_n \frac{\cos nz}{n!} \pm \sum_n i \frac{\sin nz}{n!}$$

e que $\exp(\exp \pm iz) = \exp(\cos z)\exp(\pm i \sin z)$.
f) $\cos i + i \sin i = e^{-1}$.
g) $\log \exp(1 + 4i) = 1 + (4 - 2\pi)i$.
h) $\forall z \in \mathbb{C},\ |\cos z| \leqslant \cosh |z|$ e que $|\sin z| \leqslant \sinh |z|$. Deduza que para $|z| < 1, |\cos z| < 2$ e $|\sin z| \leqslant 6|z|/5$.

7)
a) Seja $f \in H(\mathbb{C})$ uma função inteira tal que $f(0) = 1$. Mostre que se $f(z + w) = f(z)f(w),\ \forall z, w \in \mathbb{C}$; então $f(z) = e^{\alpha z},\ \forall z \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{C}$.
b) Seja f uma função contínua tal que

$$f(z + w) = f(z) + f(w), \qquad z, w \in \mathbb{C}.$$

Mostre que

$$f(z) = az + b\bar{z}, \qquad z \in \mathbb{C},\ \text{para},\ a, b \in \mathbb{C}.$$

8) Verificar que $\cos z = w$, implica que

$$z = -i \log\left(w \pm \sqrt{w^2 - 1}\right) + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Em particular, concluir que $\cos : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é sobrejetiva.

9) Verificar que $\sin z = w$, implica que

$$z = -i \log\left(iw \pm \sqrt{1 - w^2}\right) + 2n\pi,\ n \in \mathbb{Z}.$$

Em particular, concluir que $\sin : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ é sobrejetiva.

10) Verificar todas as determinações de

a) 2^i. *Resposta*: $e^{-2n\pi}\{\cos(\log 2) + i\sin(\log 2)\},\ n \in \mathbb{Z}$.
b) i^i. *Resposta*: $\exp\left\{-\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)\right\},\ n \in \mathbb{Z}$.

11) Encontrar todos os números a e z complexos tais que:
a) Toda determinação de a^z são reais.
b) Toda determinação de a^z seja de valor absoluto 1. *Sugestão*: Seja $z = x+iy, x, y$ reais e $a = re^{i\theta}, r > 0, \theta \in (-\pi, \pi]$.

12) Sejam $\alpha = a + ib,\ a, b$ reais e $z \in \mathbb{C}^*$. Verifique que

$$|z^\alpha| = |z|^a e^{-b\arg z}$$

deduza que
a) $\lim\limits_{z\to 0} |z^\alpha| = 0 \Leftrightarrow \Re\alpha > 0$.
b) $\lim\limits_{z\to 0} |z^\alpha| = \infty \Leftrightarrow \Re\alpha < 0$.

13) Verificar que, se $|z| < 1$,

$$\frac{1}{2} + z + z^2 + \cdots = \frac{1}{2}\cdot\frac{1+z}{1-z}$$

colocando $z = re^{i\theta},\ 0 \leqslant r < 1$, deduza:

$$\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\theta = \frac{1}{2}\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}$$

deduza ainda fórmula análoga trocando-se cos por sin na expressão a esquerda da igualdade.

14) Seja $z = x + iy$, com x, y reais. Verifique que $|\sin nz| \leqslant e^{n|y|},\ n = 1, 2, \ldots$; deduza que $\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}\sin nz$ converge absolutamente se $|\operatorname{Im} z| < \log 2$. Por outro lado se $|\operatorname{Im} z| \geqslant \log 2$, mostre que $|2^{-n}\sin nz| \not\to 0$, quando $n \to \infty$ (veja o exercício seguinte), de modo que $\sum_{n\geqslant 1} 2^{-n}\sin nz$ diverge se $|\operatorname{Im} z| \geqslant \log 2$.

15) Mostrar que a série $\sum_{n\geqslant 1} n^{-2}\sin nz$ converge apenas para z real, mostrando que

$$|\sin nz| \geqslant \frac{1}{2}\left(e^{n|y|} - e^{-n|y|}\right),\ y = \operatorname{Im} z.$$

16) Mostre que não existe nenhuma função contínua

$$f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{C}^* \qquad \text{talque } \left(f(z)\right)^2 = z,\ \forall z \in \mathbb{C}^*.$$

Sugestão: Observe que $f(z) \neq 0$, $\forall z \in \mathbb{C}^*$. Passando a $-f$ se necessário, suponha que $f(1) = 1$. Mostre que a função $z \to f(z)f(w)/f(zw)$ é continua e identicamente igual a 1. Infira daí uma contradição .

Mostre que não existe nenhum ramo contínuo de $z^{1/2}$ em $\mathbb{C}^*$, por outro lado $z \to z^{1/2}$ é holomorfa em $\mathbb{C} - (-\infty, 0]$.

Conclua também que não existe nenhuma função logaritmo no domínio $\mathbb{C}^*$.

17) As séries de Taylor de $\dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$, $\cot z$ e $\tan z$.

a) A série de Taylor de $\dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$ em torno da origem está definida por

$$\frac{z}{\mathrm{e}^z - 1} = \sum_0^\infty \frac{B_k}{k!} z^k, \quad B_k \in \mathbb{C}$$

Mostre as seguintes afirmações

i) $B_1 = 0$ e $B_{2k+1} = 0$ para $k \geqslant 1$.

ii)

$$\binom{n}{0} B_0 + \binom{n}{1} B_1 + \binom{n}{2} B_2 + \cdots + \binom{n}{n-1} B_{n-1} = 0$$

Os números acima são chamados de *números de Bernouille* (veja listaD)

Sugestão: Considere $1 = \dfrac{\mathrm{e}^z - 1}{z} \cdot \dfrac{z}{\mathrm{e}^z - 1}$.

b) Mostre que

$$\cot z = \frac{1}{z} + \sum_1^\infty (-1)^k \frac{4^k}{(2k)!} B_{2k} z^{2k-1}$$

$$\tan z = \sum_1^\infty (-1)^{k-1} \frac{4^k(4^k - 1)}{(2k)!} B_{2k} z^{2k-1}$$

Discuta o raio de convergência da série de $z \cot z$.

18) Considere a série

$$(*) \qquad f(z) = \sum_0^\infty \frac{z^{3n}}{(3n)!}$$

a) Mostre que f satisfaz $f'''(z) - f(z) = 0$. Mostre ainda que $f(z) = \dfrac{1}{3}\left(\mathrm{e}^z + 2\,\mathrm{e}^{-z/2} \cos \dfrac{\sqrt{3}z}{2}\right)$.

i) Deduza, partindo da série $(*)$, trocando z por $-z$ e somando que

$$\frac{1}{3}\Big(\cosh z + 2\cosh z/2\cos(\sqrt{3}z/2)\Big) = \sum_{0}^{\infty} \frac{z^{6n}}{(6n)!}$$

19) Considere a função $f(z) = \log\dfrac{1+z}{1-z}$, $|z| < 1$. Calcule $f^{(n)}(0)$, a n-ésima derivada de f na origem. Use obrigatoriamente o desenvolvimento de Taylor de f na origem para calcular, $\log\dfrac{m}{n}$, $\log 2$ e $\log|\cot z|$.

28) Considere a função $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^{-z}}{1+z}$. Mostre que a n-ésima derivada de f na origem é dada por $f^{(n)}(0) = (-1)^n n!\left(1 + 1 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!}\right)$.

20) Mostrar que

$$\log\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = \log(1+z) - \log(1-z) \qquad \text{se } z \notin E = \{t \in \mathbb{R};\ |t| \geqslant 1\},$$

explicitando quais são os ramos do logaritmo nas fórmulas acima.

Sugestão: Verifique que as duas funções são holomorfas em $\mathbb{C} \setminus E$ e que a igualdade é verificada para $z \in \mathbb{R}$ e $|z| < 1$.

21) Seja

$$f(z) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

Verificar que f é holomorfa em $\mathbb{C} \setminus F$, onde $F = \{it,\ t \in \mathbb{R},\ |t| > 1\}$. De acordo com o item anterior conclua que

$$f(z) = \frac{1}{2i}\log(1+iz) - \log(1-iz) \qquad \text{se } z \notin F$$

Concluir que $f(z)$ é um prolongamento analítico da função f dada por

$$f(z) = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots = \sum_{n \geqslant 0} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}, \qquad |z| < 1$$

Deduzir que para t real em $(-1, 1)$, $f(t) = \arctan t$. Conclua que $\tan(f(z)) = z$, $z \in \mathbb{C} \setminus F$. $f(z)$ é o ramo principal de $\arctan z$.

22) Considere a série

$$f(z) := \sum_{0}^{\infty} \frac{z^n}{(n+1)(n+2)(n+3)}$$

a) Mostre que $f(z)$ é analítica no disco aberto $|z| < 1$.

b) Mostre que $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left[z^2\,(zf(z))'\right]$ pode ser escrita em termos de funções analíticas elementares no anel $0 < |z| < 1$. Daí escreva $f(z)$ explicitamente usando funções conhecidas.

23) Verifique (ou obtenha) os desenvolvimentos de Taylor das funções abaixo , justificando a convergência (raio e disco de convergência) em cada caso. Discuta convergência normal.

a) Este exercício é para ser feito por dois métodos. Obtenha via o método do produto de séries (relação de recorrência entre os coeficientes) e também pelo método das frações parciais o seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1-2z\cos\theta+z^2} &= \sum_0^\infty \frac{\mathrm{e}^{(n+1)i\theta}-\mathrm{e}^{-(n+1)i\theta}}{\mathrm{e}^{i\theta}-\mathrm{e}^{-i\theta}}z^n \\ &= \frac{1}{\sin\theta}\sum_0^\infty z^n\sin(n+1)\theta, \qquad |z|<1\end{aligned}$$

b) Exiba as séries abaixo escrevendo uma expressão numa “forma fechada” $(s \in \mathbb{R})$

$$\sum_{n\geqslant 0} z^n\cos ns$$
$$\sum_{n\geqslant 0} z^n\sin ns$$

c) Exiba o desenvolvimento de Taylor na origem das funções $f(z)$ abaixo, determinando o raio de convergência das respectivas séries

$$f(z) = \ln(1+z+z^2+z^3+z^4)$$
$$f(z) = \ln(1+2z+2z^2+z^3)$$

Sugestão: procure fatorar os polinômios envolvidos no argumento do log .

d) Escreva a série abaixo como soma de duas funções elementares (“closed form”)

$$\sum_0^\infty \frac{z^{4n}}{(4n)!}$$

Sugestão: Procure encontrar duas funções conhecidas cuja soma dá a série. Ou ainda, verifique que a série satisfaz uma equação diferencial resolvendo-a.

24) Considere a função $w = u+iv = \cos z = \cos x \cosh y - i \sin x \sinh y,\ z = x+iy$.

a) Mostre que a imagem das retas $\{y = y_0 \neq 0\}$ e $\{x = x_0,\ \sin x_0 \neq 0,\ \cos x_0 \neq 0\}$ dão elipses e hipérboles ortogonais e confocais, respectivamente. Observando que $\cos \bar{z} = \overline{\cos z}$, $\cos(-z) = \cos(z)$, estude as imagens das retas quando $y > 0$, $y = 0$, $y < 0$ e $-\pi < x < \pi$.

b) Mostre que $z \mapsto w = \cos z$ leva conformemente a semi-faixa aberta $\{0 < x < \pi,\ y > 0\}$ sobre o semi-plano inferior $\{\operatorname{Im} z < 0\}$. Mostre ainda que $z \mapsto w = \cos z$ envia conformente a faixa $0 < x < \pi$ sobre o domínio $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus ((-\infty, -1] \cup [1, \infty))$.

c) Considere $g(w) = \dfrac{1}{i} \log \left(w + i\sqrt{1-w^2} \right)$. Mostre que $1 - w^2 \leqslant 0 \Leftrightarrow w$ é real e $|w| \geqslant 1$. Mostre que $w + i\sqrt{1-w^2} \in \mathbb{C} \setminus I\!R_-$ para $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$. Conclua que $w \mapsto w + i\sqrt{1-w^2}$ é holomorfa para $w \in \widetilde{\mathbb{C}}$. Mostre que $\arccos x = g(x),\ \forall x \in (-1,1)$. Conclua finalmente que a inversa de $z \mapsto \cos z$ (ramo principal de $w = \arccos z$) é dada por $\arccos w = g(w),\ \forall w \in \widetilde{\mathbb{C}}$ e que $\dfrac{d}{dw}(\arccos w) = -(1-w^2)^{-1/2},\ \forall w \in \widetilde{\mathbb{C}}$.

25) Elabore um estudo da função $f(w) = \arcsin w$ definida em $\widetilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \setminus \Big((-\infty, -1] \cup [1, \infty) \Big)$, nos moldes que foi feito no exercício anterior para $\arccos w$, onde f é a inversa da função $z \mapsto \sin z$ restrita à $-\pi/2 < \Re z < \pi/2$ (ramo principal de $w = \arcsin z$). Mostre que $\arcsin w = \dfrac{1}{i} \log(iw + \sqrt{1-w^2}),\ \forall w \in \widetilde{\mathbb{C}}$ e que $\dfrac{d}{dw}(\arcsin w) = (1-w^2)^{-1/2},\ \forall w \in \widetilde{\mathbb{C}}$.

Sugestão: $\sin z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$.

26) Mostre que $z \mapsto w = \tan z$ envia conformemente a faixa aberta $\{-\pi/2 < \Re z < \pi/2\}$ sobre $\mathbb{C} \setminus \mathcal{L}$, onde $\mathcal{L} = \{it,\ t \in I\!R,\ |t| \geqslant 1\}$. Mostre que a função inversa (ramo principal de $w = \arctan z$) é dada por $\arctan w = \dfrac{1}{2i} \log\left(\dfrac{i-w}{i+w}\right)$ e que $\dfrac{d}{dw} \arctan w = \dfrac{1}{1+w^2}$.

* * *

Nota cultural matemática:

- Considere a *série binomial*

$$b_\sigma(z) := \sum_0^\infty \binom{\sigma}{n} z^n$$

onde

$$\binom{\sigma}{0} := 1 \qquad \binom{\sigma}{n} := \frac{\sigma(\sigma-1)\cdots(\sigma-n+1)}{n!}$$

ou seja

$$b_\sigma(z) = 1 + \sigma z + \frac{\sigma(\sigma-1)}{2} + \cdots$$

Note que b_σ é holomorfa na bola unitária aberta centrada na origem, já que o raio de convergência da série que define b_σ é igual a 1. Note que $b_{-1} = \dfrac{1}{1+z}$, $|z| < 1$. Vale a fórmula de multiplicação :

$$(1+z)b_{\sigma-1} = b_\sigma$$

Infire-se que

$$b'_\sigma(z) = \sigma b_\sigma/(1+z)$$

Seja $\lambda(z) := \displaystyle\sum_1^\infty \frac{(-1)^{n-1} z^n}{n}$. Note que

$$b_\sigma(z) = \mathrm{e}^{\sigma\lambda(z)}, \qquad |z| < 1$$

Vale a fórmula de Abel-Newton

$$(1+z)^\sigma = \sum_0^\infty \binom{\sigma}{n} z^n, \qquad \forall \sigma \in \mathbb{C}, \quad |z| < 1.$$