

Variáveis Complexas 2009–Lista 8

Professor: Ricardo Sá Earp

INTEGRAÇÃO COMPLEXA E FÓRMULA DE CAUCHY

1) Calcular

$$\int_{\gamma} \frac{e^z}{z(1-z)^3} dz$$

quando γ é um círculo orientado positivamente (e simplesmente) dado por

a) $|z| = 1/2$. *Resp:* $2\pi i$

b) $|z - 1| = 1/2$. *Resp:* $-i\pi e$

c) $|z| = 2$. Dê uma fórmula que relacione a integral do item c) com as integrais dos itens a) e b). Justifique sua resposta tanto geometricamente como analiticamente. *Resp:* $i\pi(2 - e)$

d) $2(\cos \theta)^n + i2(\sin \theta)^n$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, $n \in \mathbb{N}$.

2) Suponha que $f(z)$ seja analítica num aberto contendo a curva fechada γ . Mostre que

$$\int_{\gamma} \overline{f(z)} f'(z) dz$$

é um número imaginário puro.

3) Suponha que $f(z)$ seja analítica e que satisfaça $|f(z) - 1| < 1$ em um domínio Ω . Mostre que

$$\int_{\gamma} \frac{f'(z)}{f(z)} dz = 0,$$

para toda curva fechada, seccionalmente C^1 , em Ω .

4) Se $P(z)$ é um polinômio e C denota o círculo $|z - a| = R$, calcule $\int_C P(z) d\bar{z}$.
Resp: $-2i\pi R^2 P'(a)$.

5) Seja γ uma curva C^1 por partes e seja $\bar{\gamma}$ sua imagem obtida pela aplicação $z \rightarrow \bar{z}$. Suponha que $f(z)$ seja uma função contínua sobre γ .

a) Mostre que $z \rightarrow \overline{f(\bar{z})}$ é contínua sobre $\bar{\gamma}$ e tem-se que

$$\overline{\int_{\gamma} f(z) dz} = \int_{\bar{\gamma}} \overline{f(\bar{z})} dz = \int_{\gamma} \overline{f(z)} d\bar{z}$$

Se γ é uma curva simples fechada contida no disco aberto unitário \mathcal{D} e $f(z)$ é uma função analítica em \mathcal{D} , o que voce pode dizer da integral do meio? Sempre se anula? A função $z \rightarrow \overline{f(\bar{z})}$ é holomorfa em $\bar{\mathcal{D}}$?

- b) Em particular, se γ é o círculo unitário positivamente orientado, mostre que

$$\overline{\int_{|z|=1} f(z) dz} = - \int_{|z|=1} \overline{f(\bar{z})} \frac{dz}{z^2}$$

Cuidado com a orientação? Nas duas fórmulas acima o círculo γ está positivamente orientado!!

- 6) Considere a série dada por

$$f(z) := \sum_0^{\infty} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}} := \sum f_n(z)$$

- a) Mostre que $f(z)$ determina uma função holomorfa definida no disco unitário $B_1(0)$ mostrando que a série converge normalmente em compactos de $B_1(0)$.
- b) Mostre que $f(z) = \frac{z}{1-z}$. *Sugestão:* Considere $g(z) := f(z) - \frac{z}{1-z}$, mostrando que $g(z^{2^n}) = g(z)$.
- c) Determine a classe de curvas fechadas γ tais que o valor da integral $\int_{\gamma} f_n(z) dz$ é não nulo.
- 7) Seja f uma função contínua num domínio Ω . Seja γ uma curva regular (por partes) parametrizada pelo comprimento de arco s , cujo traço esteja contido em Ω . Seja \mathbf{T} o vetor velocidade de γ e seja \mathbf{n} um dado campo de vetores normal unitário ao longo de γ . Dizemos que o *fluxo* ou campo dado por $z \mapsto f(z)$ (considerando $f(z)$ como um campo de vetores definido em Ω) é nulo (f é então chamado de *fluxless*) se (o símbolo \cdot denota o produto escalar no plano)

$$\int_{\gamma} f \cdot \mathbf{n} ds = 0$$

para toda curva simples (C^1 por partes) e fechada γ em Ω . Dizemos que o campo que $z \mapsto f(z)$ é conservativo (ou *irrotational*) se

$$\int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} \, ds = 0$$

para toda curva simples (C^1 por partes) e fechada γ em Ω .

- a) Mostre que se um fluxo (ou campo) $z \mapsto f(z)$ em um domínio Ω é simultaneamente *fluxless* e *conservativo* então $f(z)$ é uma *função anti-holomorfa* em Ω .

Sugestão: Mostre que

$$\int_{\gamma} \overline{f(z)} \, dz = \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{T} \, ds + i \int_{\gamma} \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} \, ds$$

- b) Exiba um exemplo de função anti-holomorfa $f(z)$ definida num certo domínio Ω com o campo $z \mapsto f(z)$ não sendo simultaneamente *fluxless* e conservativo.
- c) Defina o conceito de um campo ser *localmente fluxless* e o conceito de ser *localmente conservativo* e analise se a recíproca da proposição do item a) é verdadeira neste contexto.
- 8) Seja $f(z)$ uma função holomorfa em $|z| < R$, $R > 1$. Calcule de duas maneiras distintas as integrais

$$\int_{|z|=1} \left[2 \pm \left(z + \frac{1}{z} \right) \right] \frac{f(z)}{z} \, dz,$$

obtendo as seguintes igualdades

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \cos^2 \frac{\theta}{2} \, d\theta &= 2f(0) + f'(0) \\ \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta}) \sin^2 \frac{\theta}{2} \, d\theta &= 2f(0) - f'(0) \end{aligned}$$

- 9) Mostre que se $f(z)$ é holomorfa em um aberto que contenha o disco fechado $|z| \leq 1$ então vale

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{\bar{f}(z)}{z-a} \, dz = \begin{cases} \bar{f}(0) & \text{se } |a| < 1, \\ \bar{f}(0) - \bar{f}(1/\bar{a}) & \text{se } |a| > 1, \end{cases}$$

Sugestão: Use o exercício 5 b) e a fórmula de Cauchy.

10) Verifique que

$$\int_a^b \frac{dt}{z - it} = i\{\log(z - ib) - \log(z - ia)\}$$

onde $-\infty < a < b < \infty$, $\Re z > 0$. Conclua que

$$\int_a^b \frac{x dt}{x^2 + (y - t)^2} = \arctan\left(\frac{y - a}{x}\right) - \arctan\left(\frac{y - b}{x}\right).$$

11) Calcule

a) $\int_{\gamma} z dz$

b) $\int_{\gamma} \bar{z} dz$

c) $\int_{\gamma} \Re z dz$ onde γ é o caminho poligonal $0 \rightarrow (1 + i) \rightarrow 2$.

12) Calcule a integral $\int_{\gamma} z^{\alpha} dz$, $\alpha \in \mathbb{C}$, nos seguintes casos:

a) γ é o semi-círculo indo de 1 à -1 no semi-plano superior (ou $\text{Im } z \geq 0$).

b) γ é o semi-círculo indo de 1 à -1 no semi-plano inferior.

c) γ é o círculo de centro 0 e raio 1. *Resp:* $\frac{2i}{\alpha + 1} \sin(\alpha + 1)\pi$, se $\alpha \neq -1$, $2\pi i$, se $\alpha = -1$. Para qual ramo de z^{α} vale esta resposta? Para que valores de α temos o valor 0?

13) Mostre com todos os detalhes que

$$\left| \int_{\gamma} \frac{dz}{z^4 + 1} \right| \leq \frac{2\pi R}{R^4 - 1}$$

onde γ é o círculo $|z| = R$, $R > 1$.

14) Sabendo-se que $\int_{\gamma} \frac{dz}{z} = 2\pi i$, se γ é uma curva simples fechada positivamente orientada (e portanto de índice 1) verifique às seguintes fórmulas

a) $\int_0^{2\pi} \frac{dt}{a^2 \cos^2 t + b^2 \sin^2 t} = \frac{2\pi}{ab}$,

onde o traço de γ é a elipse de equação $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$.

b) $\int_0^{2\pi} \frac{\sin^2 t \cos^2 t}{\cos^6 t + \sin^6 t} dt = \frac{2\pi}{3}$

onde γ descreve o astróide dado por $t \mapsto \cos^3 t + i \sin^3 t$, $0 \leq t \leq 2\pi$.

15) Calcule

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{dz}{(z - a)(z - 1/a)}, \quad a \neq 0, |a| \neq 1.$$

Use o resultado acima para calcular

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{1 - 2a \cos t + a^2}.$$

- 16) Seja $f(z)$ uma função holomorfa definida num disco de raio R , $R > 0$ centrado na origem. Suponha que $f(0)$ seja real. Mostre que para $0 < r < R$ e $|z| < r$ tem-se a *fórmula integral de Schwarz*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \Re f(re^{it}) \frac{r e^{it} + z}{r e^{it} - z} dt$$

- a) Conclua que se $g = \Re f$ então vale a fórmula de Poisson

$$g(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(re^{it}) \frac{r^2 - |z|^2}{|r e^{it} - z|^2} dt$$

- b) Escreva a função g do item a) como soma de uma função holomorfa e de uma função anti-holomorfa e re-obtenha que g é harmônica para $|z| < r$.
Sugestão : Escreva

$$(*) \quad \frac{r^2 - |z|^2}{|r e^{it} - z|^2} = \frac{r e^{it}}{r e^{it} - z} + \frac{r e^{-it}}{r e^{-it} - \bar{z}} - 1$$

- c) (*Desigualdade de Harnack*) Seja $g(z)$ uma função harmônica não negativa definida num disco de raio R , $R > 0$ centrado na origem. Mostre que para $0 < r < R$ e $|z| < r$ tem-se que

$$\frac{r - |z|}{r + |z|} \cdot g(0) \leq g(z) \leq \frac{r + |z|}{r - |z|} \cdot g(0)$$

Sugestão: Estime o núcleo de Poisson (*)

- d) (*Princípio de Harnack*) Aplique a desigualdade de Harnack para demonstrar o princípio de Harnack: Seja $u_1 \leq u_2 \leq \dots$ uma seqüência crescente de funções harmônicas definidas num domínio Ω . Mostre que ou bem $u_n \rightarrow \infty$ ($n \rightarrow \infty$) uniformemente em compactos, ou bem existe uma função harmônica u em Ω tal que $u_n \rightarrow u$ ($n \rightarrow \infty$) uniformemente em compactos de Ω .

- e) Uma função real contínua f num aberto $U \subset \mathbb{C}$ é chamada de sub-harmônica se satisfaz a *desigualdade da média*, i.e, se o fecho de um disco de raio R e centro p está inteiramente contido em U , então

$$f(p) \leq \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(p + e^{it}) dt$$

Nota: Uma função f de classe C^2 é sub-harmônica, sse $\Delta f \geq 0$.

- i) Mostre que se $g : U \rightarrow \mathbb{C}$ é harmônica, então $f := |g|$ é sub-harmônica. Será $|g|$ harmônica ?
- ii) Mostre que se $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ é harmônica e se $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função não decrescente e convexa então $\varphi \circ f$ é sub-harmônica. *Sugestão* : Aplique a desigualdade de Jensen (veja num livro). Conclua que e^f é sub-harmônica e f^2 é sub-harmônica se f é não negativa em U .
- iii) Mostre que se f é holomorfa em U e $p > 0$ então $|f|^p$ é sub-harmônica. Agora suponha que f seja harmônica. Mostre que $|f|^p$ é sub-harmônica quando $p \geq 1$.
- 17) Seja $f(z) = \sum_0^{\infty} a_n z^n$ uma série cujo raio de convergência é 1. Suponha que $|f(z)|(1 - |z|) \leq 1$ para todo z tal que $|z| < 1$. Mostre que para todo inteiro positivo tem-se que

$$|a_n| \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n (n+1) < e(n+1)$$

- 18) Mostre que $I(z) = \int_{|\zeta - z_0|=R} \frac{1}{\zeta - z} d\zeta$ satisfaz

$$\frac{\partial I}{\partial \bar{z}}(z) = \frac{\partial I}{\partial z}(z) = 0$$

concluindo que $I(z)$ não depende de z e que $I(z) = 2\pi i$.

- 19) Seja f uma função contínua no círculo $S^1 = \{|z| = 1\}$. Defina

$$F(z) = \begin{cases} f(z) & \text{se } |z| = 1, \\ \frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta & \text{se } |z| < 1 \end{cases}$$

Será F contínua em $\{|z| \leq 1\}$? *Sugestão:* procure um contra-exemplo simples e use a fórmula de Cauchy.

20) Neste exercício você vai trabalhar com ramos de funções multivalentes e integração complexa.

a) Considere a função *multivalente*

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z(z-1)}}$$

- i) Mostre que pode-se definir um *ramo* de $f(z)$ no domínio $\mathbb{C} \setminus [0, 1]$.
- ii) Usando um resultado dado em sala de aula, calcule a integral

$$\int_{|z|=2} \frac{1}{\sqrt{z(z-1)}} dz$$

- b) Idem para $f(z) = \frac{1}{\sqrt{21z^2 - 10z + 1}}$, e o contorno $|z| = 1$.

Para atingir o *rigor* matemático você precisará aplicar a fórmula de Newton-Abel, convenientemente. No mesmo espírito, calcule

$$\int_{|z|=R} \frac{z}{\sqrt{(z-a)(z-b)}} dz$$

para $a, b \in \mathbb{C}$ e R suficientemente grande.