Variáveis Complexas 2009–Lista 9

Professor: Ricardo Sá Earp

PROPRIEDADES DE FUNÇÕES HOLOMORFAS

1) (*Lema de Schwarz*) Vamos lembrar o enunciado do Lema de Schwarz. Seja $f(z)$ uma função holomorfa no disco $|z| < 1$. Suponhamos que

$$f(0) = 0, \qquad |f(z)| < 1 \qquad \text{para } |z| < 1.$$

Mostre que

i) $|f(z)| \leqslant |z|$ para $|z| < 1$.

ii) Se vale a igualdade $|f(z_0)| = |z_0|$, para algum $z_0 \neq 0$, então $f(z) = \lambda z$, $\forall z$, $|z| < 1$ e $|\lambda| = 1$. O que você pode dizer sobre a derivada de $f(z)$ em $z = 0$?.

a) Mostre que uma equivalência conforme do disco aberto unitário $\mathcal{D}$ sobre si mesmo que deixa fixa a origem é uma rotação . Quais destas transformações satisfaz $f(a) = 0$, para $|a| < 1$? Mostre que o conjunto de todas as equivalências conformes de $\mathcal{D}$ é igual ao conjunto de todas as aplicações de Möbius que preservam $\mathcal{D}$. O quê são estas ?

b) Mostre que o conjunto de todas as equivalências conforme do semi-plano superior aberto $\mathcal{H} = \{\operatorname{Im} z > 0\}$ que deixa fixo o ponto i é dado pela família a 1-parâmetro

$$z \longrightarrow \frac{z + \tan\dfrac{\theta}{2}}{1 - z\tan\dfrac{\theta}{2}}$$

que dependem do parâmetro real θ. Este é na linguagem da teoria dos grupos o sub-grupo de isotropia do ponto $z = i$ do grupo das transformações de Möbius que preservam $\mathcal{H}$.

c) *Problemas de extremo*: Sejam a e b números complexos tais que $|a| < 1$ e $|b| < 1$. Quão grande $|f^{'}(a)|$ pode ser se f está sujeita às condições $f(z)$ é holomorfa, $\|f\|_\infty \leqslant 1$ e $f(a) = b$? *Resp* :$|f^{'}(a)| \leqslant \dfrac{1 - |b|^2}{1 - |a|^2}$. Quando é que vale a igualdade ?

Suponha também que $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Maximize $\left|f\left(\frac{3}{4}\right)\right|$. Para quais funções f o máximo é atingido ? *Resp* :$\frac{2}{5}$. Agora dentre todas as funções holomorfas e limitadas por 1 no disco unitário aberto $\mathcal{D}$, mostre que max $\left|f'\left(\frac{1}{3}\right)\right|$ é assumido quando $f\left(\frac{1}{3}\right) = 0$. Para que funções este máximo é assumido?

* * *

O lema de Schwarz tem muitas aplicações na teoria de aplicações conformes. Também tem aplicações na moderna teoria da Dinâmica Complexa.

Seja $f(z)$ uma função holomorfa no disco aberto $B_1(0)$, satisfazendo $\Re f(z) > 0$, e $f(0) = 1$. Mostre que

$$\frac{1-|z|}{1+|z|} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{1+|z|}{1-|z|}$$

Dê exemplos explícitos de tais $f(z)$. O que você pode dizer da família $\mathcal{F}$ de funções que satisfazem as hipóteses acima, $\mathcal{F}$ é *normal* ? O que acontece se relaxamos nas hipóteses acima, colocando $\Re f(z) \geqslant 0$?

Seja $f(z)$ uma função holomorfa limitada no disco $B_1(0)$. Suponha que $|f(z)| \leqslant 1,\ \forall z \in B_1(0)$. Mostre que

$$\frac{|f'(z)|}{1-|f(z)|^2} \leqslant \frac{1}{1-|z|^2}$$

Seja $f(z)$ uma função holomorfa limitada no disco $B_1(0)$. Suponha que $|f(z)| \leqslant 1,\ \forall z \in B_1(0)$. Suponha que $a_1, a_2, \ldots, a_n$, sejam zeros de $f(z)$. Mostre que

$$|f(z)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} \left|\frac{z-a_k}{1-\overline{a_k}z}\right|$$

em particular conclua um caso particular da fórmula de Jensen

$$|f(0)| \leqslant \prod_{k=1}^{n} |a_k|$$

(*Princípio de subordinação*). Note as seguintes aplicações do princípio de subordinação que, essencialmente, é uma forma do Lema de Schwarz (assim, se você conhece bem o Lema de Schwarz, deverá poder fazer os exercícios abaixo).

Mostre que se $f(z)$ é holomorfa no disco aberto $B_1(0)$, e satisfaz $-1 < \mathbb{R}f(z) < 1$, então se $f(0) = 0$, segue que $f(z)$ satisfaz

$$|f'(0)| \leqslant \frac{4}{\pi}$$

sendo a igualdade satisfeita apenas pela função $\frac{4}{\pi}\arctan(\lambda z)$, onde $|\lambda| = 1$. Além disso, mostre que

$$|f(z)| \leqslant \frac{2}{\pi}\log\frac{1+r}{1-r}, \qquad |z| = r < 1$$

Seja $F(z)$ uma função meromorfa univalente no disco $B_1(0)$, com seguinte expansão

$$F(z) = \frac{1}{z} + a_0 + a_1 z + \cdots$$

em $B_1(0)$. Suponha que $F(z)$ leva $B_1(0)$ num *certo domínio* Ω. Seja $f(z)$ uma função holomorfa no disco perfurado $B_1(0) \setminus \{0\}$, com expansão

$$f(z) = \frac{\alpha}{z} + b_0 + b_1 z + \cdots$$

em $B_1(0) \setminus \{0\}$.
Mostre que se $f(z)$ leva $B_1(0)$ em Ω, então $|\alpha| \geqslant 1$.

Seja $f(z)$ uma função holomorfa no disco perfurado $B_1(0) \setminus \{0\}$, com expansão

$$f(z) = \frac{\alpha}{z} + b_0 + b_1 z + \cdots$$

Mostre que se $f(z)$ leva $B_1(0)$ em $\mathbb{C} \setminus (a, b)$, (com a, b reais e $a < b$) então $|\alpha| \geqslant \frac{b-a}{4}$. *Sugestão* : Você terá que encontrar uma função meromorfa univalente que leva o disco $B_1(0)$ conformemente sobre a esfera de Riemann $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$ *cortada ao longo do segmento* $[a, b]$.

* * *

2) Seja $\mathcal{A}$ um conjunto aberto em $\mathbb{C}$ e seja γ uma curva seccionalmente C^1 em $\mathbb{C}$. Suponha que $\varphi : [\gamma] \times \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ é contínua e defina $g : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ por

$$g(z) = \int_\gamma \varphi(z, w)\mathrm{d}w.$$

Mostre que

a) g é contínua.

b) Se $\dfrac{\partial \varphi}{\partial z}$ existe para cada $(w, z) \in [\gamma] \times \mathcal{A}$ e é contínua, então g é analítica e

$$g'(z) = \int_\gamma \frac{\partial \varphi}{\partial z}\mathrm{d}w$$

c) Suponha que φ é contínua em $[\gamma]$. Use o exercício anterior para mostrar que

$$g(z) = \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{w - z}\mathrm{d}w$$

é analítica em $\mathbb{C} \setminus [\gamma]$ e que

$$g^{(n)}(z) = n! \int_\gamma \frac{\varphi(w)}{(w - z)^{n+1}}\mathrm{d}w$$

3) *Caracterizações das funções racionais*

a) Seja f uma função inteira tal que para $r > 0$, $\alpha \in (0, 1)$ e para $b \in \mathbb{R}^+$, apropriados tem-se que

$$|f(z)| \leqslant a + b|z|^\alpha, \qquad \text{se } |z| > r$$

Mostre que f é uma constante

b) Seja f uma função inteira tal que $\Re f \geqslant 0$. Mostre que f é uma função constante.

c) Seja f uma função inteira. Suponha que existe $M \geqslant 0$, $\alpha \geqslant 0$, $r \geqslant 0$, tais que

$$|f(z)| \leqslant M|z|^\alpha, \qquad |z| > r$$

Mostre que f é um polinômio de grau $N \leqslant \alpha$.

d) (*Fazer após o estudo das singularidades isoladas de uma função holomorfa*) Seja f uma função inteira; se $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = L$ existe (finito ou infinito), mostre que f é um polinômio.

e) (*Fazer após o estudo das singularidades isoladas de uma função holomorfa*) Seja f uma função meromorfa em $\mathbb{C}$ tendo um número finito de polos. Se $\lim\limits_{|z|\to\infty} |f(z)| = L$ existe (finito ou infinito), então $f(z)$ é uma função racional de z (isto é quociente de dois polinômios). *Sugestão*: Considerar os casos $0 < L \leqslant \infty$ e $L = 0$, separadamente.

4) Seja $f(z) = z(z-1)(z-2)$. Mostre que o máximo de f em $|z| \leqslant 1$ é atingido no círculo $|z| = 1$ e vale 6.

5) Mostre que $\sup\{|\sin z|;\ |\Re z| \leqslant \pi, |\operatorname{Im} z| \leqslant \pi\} = \sqrt{1+\sinh^2\pi}$. Em que pontos este máximo é atingido?

6) Seja f uma função holomorfa não constante definida em $|z| < R$; coloquemos $M(r) = \sup\limits_{|z|=r} |f(z)|$ com $0 \leqslant r < R$. Mostre que $M : [0,R) \to [0,\infty)$ é estritamente crescente.

7) Seja f uma função holomorfa não constante definida que está para $|z| > R$ $(R \geqslant 0)$ tal que $c = \lim_{|z|\to\infty} |f(z)|$ existe; para $r > R$ define-de $M(r)$ como no exercício precedente. Mostre que

$$M(r) = \sup_{|z|\geqslant r} |f(z)|$$

e $M : [R,\infty) \to [0,\infty)$ é estritamente decrescente.

8) Seja f um polinômio de grau n; seja $M(r)$ como no exercıcio 31). Mostre que para $0 < r < s$

$$\frac{M(r)}{r^n} \geqslant \frac{M(s)}{s^n}$$

sendo que a igualdade vale $\Leftrightarrow$ $f(z)$ é da forma $a\,z^n$. *Sugestão*: Aplique o exercício anterior na função g dada por $g(z) = f(z)/z^n$.

* * *

Nota cultural matemática:

Seja f uma função inteira, verificar

$$f(z) - f(0) = \frac{z}{2\pi i}\int_{\gamma_R} \frac{f(w)}{w(w-z)}\,\mathrm{d}w \qquad \text{se } |z| < R$$

onde $\gamma_R(t) = R\mathrm{e}^{it},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ e $R > 0$. Deduzir que, para $|z| < R$,

$$|f(z) - f(0)| \leqslant \frac{|z|R}{2\pi(R - |z|)} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} |f(R\mathrm{e}^{it})|\, \mathrm{d}t$$

Concluir que se

$$\sup_{R>0} \int_0^{2\pi} |f(R\mathrm{e}^{it})|\, \mathrm{d}t < \infty$$

então f é uma constante. (Note que isto generaliza o teorema de Liouville; este raciocínio é devido a Cauchy e é anterior ao enunciado do teorema de Liouville).

Continuando o exercício precedente mostre que se f é uma função inteira e se

$$\lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} |f(R\mathrm{e}^{it})|\, \mathrm{d}t = 0$$

entâo f é uma constante. O mesmo se

$$\limsup_{R\to\infty} \frac{1}{R} \int_0^{2\pi} |f(R\mathrm{e}^{it})|\, \mathrm{d}t < \infty$$

mostrar que $f(z)$ é da forma $a + bz$, onde a, b são constantes complexas.

Seja f uma função inteira; se

$$I = \iint_{\mathbb{R}^2} |f(x + iy)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y < \infty$$

mostrar que $f \equiv 0$, utilizando os seguintes raciocínios:

$\iint_{\mathbb{R}^2} |f(x + iy)| \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi \int_0^\infty r\, M_1(r) \mathrm{d}r$ onde

$$M_1(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(r\mathrm{e}^{it})| \mathrm{d}t.$$

Se $\inf_t |r\mathrm{e}^{it} - z| \geqslant 1,\ |z| < r,\ r > 1$ então obtém-se $|f(z)| \leqslant r\, M_1(r)$, escrevendo

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma_r} \frac{f(w)}{w - z} \mathrm{d}w$$

onde $\gamma_r(t) = r\mathrm{e}^{it},\ 0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

Do item b) deduzir que se $\liminf_{r\to\infty} r\, M_1(r) = 0$ então $f \equiv 0$.

Do item a) deduzir que $\lim_{r\to\infty} r\, M_1(r) = 0$ se $I < \infty$.

Seja f uma função holomorfa definida num domínio Ω que contém o disco unitário fechado, isto é, $\{|z| \leqslant 1\} \subset \Omega$. O que você pode dizer de f se f satisfaz: $|f(z)| = 1$, se $|z| = 1$? (*Observação* : Não darei sugestões neste exercício de propósito para você testar a sua força!).

Seja $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$, $|z| < R$. Coloquemos $u = \Re f$, $v = \operatorname{Im} f$. Mostre que para $0 < r < R$, $n = 1, 2, \ldots$

$$c_n = \frac{1}{\pi r^n} \int\limits_0^{2\pi} u(r\,\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t = \frac{i}{\pi r^n} \int\limits_0^{2\pi} v(r\,\mathrm{e}^{it})\mathrm{e}^{-int}\,\mathrm{d}t.$$

Deduzir que se f é real sobre o círculo $|z| = r$, $0 < r < R$, então f é uma constante real em $|z| < R$. *Observação : Para ser lida após o princípio de reflexão de Schwarz.* Tente dar outra demonstração mais elegante utilizando o princípio de reflexão de Schwarz, combinado com o teorema de Liouville ou o princípio do máximo!!

(*Generalização do Teorema de Liouville.*) Continuação do exercício anterior: Seja $A(r) = \sup_{|z|=r}\{\Re f(z)\}$.

Estabeleça que

$$\Re c_0 = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} u(r\,\mathrm{e}^{it})\,\mathrm{d}t,$$

deduza do exercício anterior que para $n = 1, 2, \ldots, 0 < r < R$,

$$|c_n| r^n + 2\Re c_0 \leqslant \frac{1}{\pi} \int\limits_0^{2\pi} \left\{ \left|u(r\,\mathrm{e}^{it})\right| + u(r\,\mathrm{e}^{it}) \right\} \mathrm{d}t.$$

Conclua que para $n = 1, 2, \ldots, 0 < r < R$,

$$|c_n| r^n \leqslant \max\{4A(r), 0\} - 2\Re f(0).$$

Use o que foi feito antes para mostrar o seguinte: se f é uma função inteira e se $A(r) < M r^{\alpha}$, para $r > R$ e $M, \alpha > 0$ dados então f é um polinômio de grau $n \leqslant \alpha$. Em particular, mostre que se $A(r)$ é limitada superiormente então f é constante (Veja o ex. 6)).