

PROVA 1 DE VARIÁVEIS COMPLEXAS 2009

PROFESSOR RICARDO SA EARP

JUSTIFIQUE CORRETAMENTE A SUA RESPOSTA. OS EXERCÍCIOS SÃO INDEPENDENTES, VOCÊ PODE USAR UM RESULTADO AFIRMADO NUM ITEM PARA RESOLVER UM ITEM SUBSEQUENTE

(1) Considere sequência $\{A_n, n = 1, 2, \dots\}$. Assuma que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|A_n|} = r$$

onde $r \in [0, \infty]$.

Considere a série

$$A_0 + A_1(z - z_0)^{-1} + A_2(z - z_0)^{-2} + \dots + A_n(z - z_0)^{-n} + \dots \quad (1)$$

- (a) **(1 pt)** Deduza que se $r = 0$, então a série (1) é absolutamente convergente em $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$.
- (b) **(1 pt)** Deduza que se $r > 0$ então a série (1) é absolutamente convergente para $|z - z_0| > r$.
- (c) **(1 pt)** Deduza que se $r = 0$ ou $r > 0$ então a série (1) é uniformemente convergente em qualquer conjunto compacto K contido em $|z - z_0| > r$, i.e $K \subset \mathbb{C} \setminus \{\overline{B_r(z_0)}\}$ quando $r > 0$ ou $K \subset \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ quando $r = 0$.
- (d) **(1 pt)** Assuma que $r = 0$ ou $r > 0$. Deduza que a série (1) representa uma função holomorfa $f(z)$ em $|z - z_0| > r$. Calcule explicitamente a derivada $f'(z)$.
- (e) **(1 pt)** Seja $\sum_0^{\infty} a_n(z - z_0)^n$ uma série satisfazendo

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1}{R}$$

com $R > r \geq 0$.

Defina $a_{-n} = A_n, n = 1, 2, \dots$. Considere a série

$$\sum_0^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \sum_1^{\infty} a_{-n}(z - z_0)^{-n} \quad (2)$$

Deduza que (2) representa uma função holomorfa $g(z)$ no anel $0 \leq r < |z - z_0| < R$, deduzindo que a série, chamada

de *série de Laurent*, converge normalmente no anel compacto $r < s \leq |z - z_0| \leq t < R$.

A recíproca do que você acaba de deduzir é verdadeira: Toda função holomorfa num anel $0 \leq r < |z - z_0| < R$, admite um desenvolvimento em *série de Laurent* dada pela equação (2). Vamos ver um caso particular disto, num exercício adiante. Quando $f(z)$ é holomorfa um disco perfurado $0 < |z - z_0| < R$, o coeficiente a_{-1} da série de Laurent de $f(z)$ é chamado de *resíduo*.

- (f) Assuma neste item que holomorfia implica analiticidade. Seja

$$f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$$

onde $P(z)$ e $Q(z)$ são holomorfas no disco $|z - a| < r$. Assuma que $P(a) \neq 0$ e que $Q(z)$ tem um único zero $z = a$ no disco $|z - a| < r$. Além disso, assuma que $z = a$ é um zero simples de $Q(z)$.

- (i) **(1 pt)** Deduza que no disco $B_r(a)$, $f(z)$ é uma função meromorfa e que

$$f(z) = \frac{P(a)/Q'(a)}{z - a} + \sum_0^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

onde a série tem raio de convergência $R \geq r$. Calcule o resíduo de $f(z)$ em $z = a$.

- (ii) **(1 pt)** Agora assuma que tanto $P(z)$ quanto $Q(z)$ sejam polinômios de grau 2 e que $Q(z)$ tenha raízes distintas a_1 e a_2 que não são raízes de $P(z)$. Deduza que

$$f(z) - \frac{P(a_1)/Q'(a_1)}{z - a_1} - \frac{P(a_2)/Q'(a_2)}{z - a_2} = g(z)$$

onde $g(z)$ é uma função inteira.

- (iii) **(1 pt)** Aplicando o *Grande Teorema de Picard*, convenientemente, deduza que $g(z)$ é constante, determinando esta constante em termo dos coeficientes de $P(z)$ e de $Q(z)$.

- (2) Seja $a \in \mathbb{C}$; $\Re a > 0$. Considere

$$f(z) = \frac{z^2 - 4z \cosh a + 3}{z^2 - 2z \cosh a + 1}$$

- (a) **(1 pt)** Deduza que $f(z)$ é uma função meromorfa em \mathbb{C} , calculando os seus polos e identificando as ordens destes polos.
- (b) **(1 pt)** Usando que holomorfia implica analiticidade, sem fazer um cálculo explícito, exiba o raio de convergência da série de Taylor de $f(z)$ na origem, exibindo um argumento que mostra que esta converge no disco considerado.
- (c) **(2 pt)** Deduza, usando o exercício (1), que $f(z)$ tem a seguinte forma

$$f(z) = C + \frac{A}{z-a} + \frac{B}{z-b} \quad (3)$$

determinando as constantes A, B, C . Relate um outro método, digamos *calculatoire* para obter a expressão (3) acima, sem fazer as contas.

- (d) **(2 pt)** Obtenha explicitamente o desenvolvimento de Taylor de $f(z)$ na origem. Calcule diretamente o raio de convergência da série (3).
- (3) **(2 pt)** Exiba um exemplo de uma aplicação meromorfa $f(z)$ no plano complexo \mathbb{C} :
- (a) $f(z)$ leva o disco aberto unitário $|z| < 1$ no disco aberto unitário $|w| < 1$.
- (b) $f|_{B_1(0)} : B_1(0) \rightarrow B_1(0)$ é própria.
- (c) $f(z)$ tem um zero de ordem 2 no ponto $1/2$ e $f(z)$ não tem outros zeros.
- (4) **(1 pt)** Discuta sobre a “unicidade” do seu exemplo do item (3).
- (5) **(1 pt)** Determine todos os mapeamentos conformes do disco unitário $B_1(0)$ em si mesmo.